

Parmi les erreurs intervenant dans la résolution d'un système linéaire :

- les erreurs d'arrondis résultant du codage des valeurs réelles sur un nombre fini de bits (32, 64 bits,...),
- les erreurs résultant de l'éventuelle méthode d'approximation.

Une façon de minimiser ces erreurs est d'étudier le conditionnement de la matrice du système. 3.1

ÉLÉMENTS D'ANALYSE MATRICIELLE

Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{R}^n .

Définition 1 (Norme vectorielle)

On dit qu'une application $\| \cdot \|$ de V dans \mathbb{R}^+ est une **norme** sur V si :

- 1 $\forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0,$
- 2 $\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ (propriété d'homogénéité),
- 3 $\forall v, w \in \mathbb{R}^n, \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (inégalité triangulaire).

Définition 2

Les normes l_∞ , l_1 et l_2 d'un vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ de \mathbb{R}^n sont définies respectivement par :

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

La norme l_2 est appelée **norme euclidienne** du vecteur \mathbf{x} .

Théorème 1

Pour tout vecteur \mathbf{x} de \mathbb{R}^n , on a $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty$.

Définition 3

Soient $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Les distances l_2 et l_∞ entre \mathbf{x} et \mathbf{y} sont définies par

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Exemple : La solution du système linéaire

$$\begin{cases} 3.3330 x_1 + 15920 x_2 - 10.333 x_3 = 15913 \\ 2.2220 x_1 + 16.710 x_2 + 9.6120 x_3 = 28.544 \\ 1.5611 x_1 + 5.1791 x_2 + 1.6852 x_3 = 8.4254 \end{cases}$$

est $(x_1, x_2, x_3)^t = (1.0000, 1.0000, 1.0000)$. Supposons maintenant que la précision est de 5 chiffres après la virgule. Alors l'algorithme de Gauss conduit à la solution

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^t = (1.2001, 0.99991, 0.92538)^t.$$

L'erreur comise peut être mesurée en calculant les normes l_2 et l_∞ de $\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$:

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2 = 0.21356 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty = 0.2001.$$

Définition 4 (Norme matricielle)

On dit qu'une application $\|\cdot\|$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^+ est une **norme matricielle** si :

- 1 $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$,
- 2 $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ (propriété d'homogénéité),
- 3 $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (inégalité triangulaire),
- 4 $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Remarque : La notation des normes vectorielle et matricielle est la même.

Si $\|\cdot\|$ est une norme vectorielle sur \mathbb{R}^n , alors $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ est une norme matricielle. Cette norme est appelée **norme subordonnée** à la norme vectorielle $\|\cdot\|$.

Proposition 1

Soient x un vecteur non nul de \mathbb{R}^n et A une matrice $n \times n$. Alors $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$.

Définition 5

On définit les normes l_∞ , l_1 et l_2 d'une matrice A sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ respectivement par :

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty, \quad \|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \quad \text{et} \quad \|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2.$$

Proposition 2

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

3.2 CONDITIONNEMENT D'UNE MATRICE

Le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{pmatrix}$ a pour solution $\mathbf{x} = (1, 1)^t$. Notons $\tilde{\mathbf{x}} = (3, 0)^t$ une approximation de la solution de ce système. Alors le **vecteur résidu** \mathbf{r} est :

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.0002 \end{pmatrix},$$

et donc $\|\mathbf{r}\|_\infty = 0.0002$. Or $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty = 2!!$

Proposition 3

Soit le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec A une matrice inversible. Soient $\tilde{\mathbf{x}}$ une approximation de \mathbf{x} et $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}$ le vecteur résidu. Alors pour n'importe quelle norme,

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{r}\| \|A^{-1}\|,$$

et si $\mathbf{x} \neq 0, \mathbf{b} \neq 0$,

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Remarque : Les quantités $\|A^{-1}\|$ et $\|A\| \|A^{-1}\|$ donnent une indication sur le lien entre le vecteur résidu et la précision de l'approximation.

Définition 6

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible on définit le **nombre de conditionnement** de A par rapport à la norme $\|\cdot\|$ par

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Ainsi, $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq \text{cond}(A) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|A\|}$ et $\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$. **Remarques.**

- 1 Le conditionnement exprime la sensibilité de la solution aux perturbations des données.
- 2 $\text{cond}(A) \geq 1$. Une matrice est dite **mal conditionnée** si $\text{cond}(A) \gg 1$.
- 3 Il faut calculer A^{-1} pour calculer $\text{cond}(A)$ ce qui est généralement trop coûteux : on calcule alors une approximation de $\text{cond}(A)$.

Exemple de R.S. Wilson :

On s'intéresse à la sensibilité du système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ à des perturbations du second membre \mathbf{b}

ou de la matrice A avec $A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$.

- La solution de ce système est : $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)$.
- Perturbons le second membre de sorte que $\mathbf{b}_p = (32.01, 22.99, 33.01, 30.99)$. La solution de $A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p$ est $\mathbf{x}_p = (1.82, -0.36, 1.35, 0.79)$.

- L'erreur relative sur \mathbf{x} est $\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = 0.8198$ alors que l'erreur relative sur \mathbf{b} est

$$\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} = 3.3119 \cdot 10^{-4}.$$

Soit une amplification de la perturbation de l'ordre de 2460 !

EXEMPLE DE MATRICE MAL CONDITIONNÉE : LA MATRICE DE HILBERT

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

| | | | | | |
|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $\text{cond}(H_n)$ | $1.93 \cdot 10^1$ | $5.24 \cdot 10^2$ | $1.55 \cdot 10^4$ | $4.77 \cdot 10^5$ | $1.49 \cdot 10^7$ |

3.3 MÉTHODES DIRECTES DE RÉOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

On cherche à résoudre des systèmes linéaires de la forme $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec \mathbb{A} une matrice carrée d'ordre n .

QUELQUES RAPPELS

- **Produit matriciel.** Soient $\mathbb{A} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ et $\mathbb{B} = (b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p}$ deux matrices de taille $n \times m$ et $m \times p$ resp. Alors les coefficients de la matrice $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ sont :
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}.$$
- Une matrice carrée est dite **triangulaire supérieure** lorsque $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$ et est dite **triangulaire inférieure** lorsque $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$.
- Une matrice carrée \mathbb{A} d'ordre n est dite **invertible ou régulière ou non singulière** s'il existe une matrice \mathbb{B} d'ordre n telle que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}_n$, \mathbb{I}_n étant la matrice identité d'ordre n . On note alors \mathbb{B} , \mathbb{A}^{-1} . Une matrice qui n'est pas invertible est dite **singulière**.
- Le déterminant d'une matrice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ d'ordre n est : $\det(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det \mathbb{A}_{1j}$ avec \mathbb{A}_{1j} les sous-matrices d'ordre n .

Soient \mathbb{A} une matrice réelle d'ordre n et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. On considère le système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (S)$$

Proposition 4 (Existence et unicité.)

Le système (S) admet une unique solution si et seulement si l'une des propositions ci-dessous est vraie.

- 1 La matrice \mathbb{A} est inversible.
- 2 $\text{rg}(\mathbb{A}) = n$.
- 3 Le système homogène $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet uniquement la solution nulle.

Ces trois propositions sont équivalentes.

Proposition 5

La solution du système (S) est donnée par la formule de Cramer :

$$x_j = \frac{D_j}{\det(\mathbb{A})}, \quad j = 1, \dots, n.$$

D_j est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la j -ème colonne de \mathbb{A} par \mathbf{b} .

On peut montrer que le nombre de multiplications requises pour calculer le déterminant d'une matrice carrée $n \times n$ est supérieur à $n!$.

Si $n = 50$, résoudre un système linéaire $n \times n$ par la méthode de Cramer sur un ordinateur 1 gigaflop nécessite environ $4,8 \cdot 10^{49}$ années !!

Objectif : Réduire le temps de calcul pour résoudre un système linéaire en utilisant des méthodes de résolution exacte ou approchée.

- **méthodes directes** de résolution d'un système linéaire sont des méthodes numériques permettant d'obtenir une solution en un nombre fini d'itérations.
- **méthodes itératives** de résolution d'un système linéaire sont des méthodes numériques permettant d'obtenir une solution en un nombre infini (théoriquement) d'itérations.

3.3.1 MÉTHODE DE GAUSS

Objectif : Transformer le système $Ax = b$ en un système équivalent de la forme $Ux = \hat{b}$, où U est une matrice triangulaire supérieure et \hat{b} est le second membre convenablement modifié.

Définition 7

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :

- i) **Échange** de deux lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$).
- ii) **Multiplication** d'une ligne par une constante non nulle ($L_i \leftarrow \lambda L_i$).
- iii) **Substitution** : remplacer une ligne par elle-même plus un multiple d'une autre ligne ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).

On rappelle que deux systèmes sont dits **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Théorème 2

On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire en appliquant une ou plusieurs opérations élémentaires à sa matrice augmentée.

Méthode (du pivot de Gauss)

Soit $\mathbb{A} = (a_{ij})$.

Itération k : en permutant éventuellement deux lignes du système (\mathcal{S}) , on peut supposer que $a_{kk} \neq 0$.

On transforme toutes les lignes L_i avec $i > k$ de la façon suivante :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} L_k.$$

Le terme a_{kk} est appelé **pivot**.

Remarques

- L'algorithme de Gauss ci-dessus ne prend pas en compte la recherche d'un pivot non nul ! Dans la pratique il faut rajouter cette étape.
- Le nombre d'opérations nécessaires à la résolution d'un système de taille n

▶ pour l'algorithme de Gauss à l'itération k est :

- ★ $(n - k) + (n - k)(n - k + 1) = (n - k)(n - k + 2)$ multiplications/divisions,
- ★ $(n - k)(n - k + 1)$ additions/soustractions,

le nombre total d'opérations pour l'algorithme de Gauss est donc $\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 5n) + \frac{1}{3}(n^3 - n)$.

▶ pour l'algorithme de substitution rétrograde :

- ★ $\frac{1}{2}(n^2 + n)$ multiplications/divisions,
- ★ $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ additions/soustractions.

Le nombre total d'opérations est : $(\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}) + (\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6})$, c'est-à-dire de l'ordre de $O(\frac{2}{3}n^3)$.

Définition 8

Une matrice est une **matrice élémentaire** si elle résulte d'une unique opération élémentaire effectuée sur les lignes de la matrice identité.

Il existe donc trois types de matrices élémentaires, correspondant aux trois types d'opérations élémentaires :

- \mathbb{E}_a : multiplier une (ou plusieurs) ligne(s) de la matrice identité par $a \neq 0$,
- $\tilde{\mathbb{E}}$: permuter deux lignes de la matrice identité,
- $\mathbb{E}_j(c)$: ajouter c fois la j -ème ligne de la matrice identité à une (ou plusieurs) de ses autres lignes.

Proposition 6

Soient \mathbb{A} une matrice quelconque et \mathbb{E} une matrice élémentaire résultant d'une certaine opération élémentaire effectuée sur une lignes de la matrice identité. Alors, la matrice $\mathbb{E}\mathbb{A}$ est le résultat de la même opération élémentaire appliquée aux lignes de \mathbb{A} .

Proposition 7

Toute matrice élémentaire est inversible, et on a :

- $[\mathbb{E}_a]^{-1} = \mathbb{E}_{\frac{1}{a}}$, $a \neq 0$,
- $[\tilde{\mathbb{E}}]^{-1} = \tilde{\mathbb{E}}$,
- $[\mathbb{E}_j(c)]^{-1} = \mathbb{E}_j(-c)$.

3.3.2 DÉCOMPOSITION (FACTORISATION) LU

Principe : Écrire la matrice \mathbb{A} comme produit d'une matrice \mathbb{L} triangulaire inférieure et d'une matrice \mathbb{U} triangulaire supérieure.

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Ainsi la solution du système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est obtenue en résolvant successivement les deux systèmes triangulaires $\mathbb{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ et $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

- Les matrices \mathbb{L} et \mathbb{U} ainsi définies ne sont pas uniques. En effet, il y a n^2 coefficients dans la matrice \mathbb{A} et $n^2 + n$ coefficients inconnus dans les matrices \mathbb{L} et \mathbb{U} .
- On impose par exemple aux coefficients diagonaux de \mathbb{L} d'être égaux à 1.

Appliquons l'algorithme de Gauss à la matrice \mathbb{A} et supposons que tous les pivots $a_{kk}^{(k)}$ sont non nuls. L'écriture matricielle de l'algorithme de Gauss, $\mathbb{U} = \mathbb{E}^{(n-1)}\mathbb{E}^{(n-2)} \dots \mathbb{E}^{(1)}\mathbb{A}$, conduit à

$$\mathbb{A} = [\mathbb{E}^{(n-1)}\mathbb{E}^{(n-2)} \dots \mathbb{E}^{(1)}]^{-1}\mathbb{U}.$$

En posant $\mathbb{L} = [\mathbb{E}^{(n-1)}\mathbb{E}^{(n-2)} \dots \mathbb{E}^{(1)}]^{-1} = (\mathbb{E}^{(1)})^{-1} \dots (\mathbb{E}^{(n-1)})^{-1}$, on obtient bien la décomposition $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$. On vérifie que :

- la matrice \mathbb{U} est triangulaire supérieure,
- la matrice \mathbb{L} ainsi définie est une matrice triangulaire inférieure,
- la k -ième colonne de \mathbb{L} est la k -ième colonne de $(\mathbb{E}^{(k)})^{-1}$ vaut

$$(0 \dots 1 \ m_{k+1k} \ \dots \ m_{nk})^t.$$

Quelles sont les matrices ne nécessitant pas de permutation de lignes dans l'algorithme de Gauss ?

Définition 9

Soit $\mathbb{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée $n \times n$. La matrice \mathbb{A} est dite à **diagonale strictement dominante** si $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, i = 1, \dots, n$.

Proposition 8

Une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.
Dans ce cas, l'algorithme de Gauss peut-être mené sans permutation de lignes.

Définition 10

On appelle **sous-matrices diagonales d'ordre k** les matrices définies pour $k = 1, \dots, n$ par

$$\Delta^k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Théorème 3 (Existence et Unicité de la décomposition)

Soit $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice d'ordre n . Si les sous-matrices diagonales d'ordre k de \mathbb{A} sont inversibles, alors la décomposition LU de \mathbb{A} existe et est unique.

Que faire si un pivot est nul ?

On échange deux lignes de la matrice \mathbb{A} , autrement dit on applique une matrice de permutation à \mathbb{A} .

Proposition 9

Pour toute matrice \mathbb{A} , il existe au moins une matrice de permutation \mathbb{P} telle que la matrice $\mathbb{P}\mathbb{A}$ admette une décomposition LU.

3.3.4 DÉCOMPOSITION DE CHOLESKY

Principe : Pour une matrice \mathbb{A} symétrique définie positive faire une décomposition $\mathbb{L}\mathbb{U}$ où $\mathbb{U} = \mathbb{L}^T$.

Définition 11

La matrice \mathbb{A} est dite **symétrique définie positive** si elle est symétrique et si $x\mathbb{A}x^T > 0$ pour tout vecteur x de \mathbb{R}^n non nul.

Si \mathbb{A} est une matrice définie positive alors

- i) \mathbb{A} est inversible.
- ii) $a_{ii} > 0$ pour $i = 1, \dots, n$.
- iii) $\max_{i \leq k, j \leq n} |a_{kj}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|$.

Proposition 10

Une matrice est définie positive si et seulement si ses sous-matrices diagonales ont un déterminant strictement positif.

Lorsque \mathbb{A} est définie il existe une matrice \mathbb{M} inversible telle que $\mathbb{A} = \mathbb{M}\mathbb{M}^T$. Ici \mathbb{M} n'est pas unique.

Théorème 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une **matrice symétrique définie positive**. Alors, il existe une unique matrice triangulaire inférieure \mathbb{H} dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs telle que

$$\mathbb{A} = \mathbb{H}\mathbb{H}^T.$$

COMMENT CALCULE-T-ON LA MATRICE \mathbb{H} ?

De la définition du produit matriciel et du fait que \mathbb{L} et \mathbb{U} sont des matrices triangulaires on a

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^n h_{is} h_{sj} = \sum_{s=1}^{\min(i,j)} h_{is} h_{sj}.$$

On en déduit que $h_{11} = \sqrt{a_{11}}$ et pour $i = 2, \dots, n$

$$h_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} h_{jk} h_{ik} \right) / h_{jj}, \quad j = 1, \dots, i-1,$$

$$h_{ii} = \sqrt{ \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2 \right) }.$$

POURQUOI FAIRE UNE DÉCOMPOSITION LU ?

- ① La décomposition LU nécessite un nombre d'opérations de l'ordre de $\frac{n^3}{3}$.
- ② La décomposition LU permet de calculer \mathbb{A}^{-1} , $\det(\mathbb{A})$, $\text{rg}(\mathbb{A})$, $\text{Ker}(\mathbb{A})$
- ③ Une approximation de \mathbb{L} et de \mathbb{U} fournit un préconditionneur de \mathbb{A} .

POURQUOI FAIRE UNE DÉCOMPOSITION DE CHOLESKY?

- ① La décomposition de Cholesky nécessite un nombre d'opérations de l'ordre de $\frac{n^3}{6}$, alors que la méthode de Gauss nécessite un nombre d'opérations de l'ordre de $\frac{n^3}{3}$.
- ② La décomposition de Cholesky permet de calculer \mathbb{A}^{-1} , $\det(\mathbb{A})$ de calculer le conditionnement de \mathbb{A} , de calculer un préconditionneur.