1.1 Suites réelles

Où trouve-t-on des suites ?

- Approximation des nombres réels :
  Approcher des réels tels que $\sqrt{2}$, π ou de nombres définis comme solution d'une équation ($e^x = x - 3$). Le but est alors de trouver les "meilleures" suites de réels, c'est-à dire celles qui convergent le plus vite vers ces nombres ...

- Description du comportement de phénomènes dont l'état, à un moment donné (mois, année), est représenté par un nombre réel.

  "Un homme met un couple de lapins dans un lieu isol de tous les cts par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple compter du troisime mois de son existence ? "(Liber abaci, ouvrage de Leonardo Fibonacci crit en 1202)

1.2 Définition, convergence, limite

Définition 1

Une suite de nombre réels est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$,

$$(x_n) : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow x_n. \end{array}$$

Exemple :

- suite arithmétique : $x_n = a + nr$ avec $a, r \in \mathbb{R}$,
- suite géométrique : $x_n = ak^n$ avec $a, k \in \mathbb{R}$,
- suite puissance : $x_n = n^\alpha$ avec $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
- suite récurrente : $x_{n+1} = f(x_n)$ avec f une fonction donnée.

D'une suite donnée on peut prendre dans l'ordre certains de ses termes, on dit alors qu'on en extrait une sous-suite.

Définition 2

Soit $\Phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On dit que (y_n) est une suite extraite (ou une sous-suite) de (x_n) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{\Phi(n)}$.

Exemple : $\Phi(n) = 2n, y_n = x_{2n}$.

Définition 3

On dit que (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon),\ \forall n \geq N(\epsilon), \quad |x_n - \ell| < \epsilon.$$

Autrement dit, à partir d'un certain rang x_n est proche de ℓ.

On note $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \ell$ ou $\lim\limits_{n} x_n = \ell$.

Le réel ℓ est point d'accumulation des termes de la suite, c'est-à-dire que tous les termes de la suite, excepté un nombre fini, sont situés dans tout voisinage de ℓ.

Définition 4

La suite (x_n) tend vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \quad x_n > A.$$

La suite (x_n) tend vers $-\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, \quad x_n < A.$$

On note $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n \to +\infty} x_n = -\infty$)

Définition 5

On dit d'une suite qui ne converge pas dans $\mathbb{R}$ qu'elle diverge.

Exemple :

- La suite $x_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0.
- La suite $x_n = 2n + 1$ tend vers $+\infty$.
- La suite $x_n = \sin(n)$ diverge.

Proposition 1

Si (x_n) est une suite convergente, alors il existe un réel unique ℓ tel que (x_n) converge vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Définition 6

Si (x_n) est une suite convergente, l'unique réel ℓ, tel que (x_n) converge vers ℓ, s'appelle la limite de la suite et se note $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ ou $\lim\limits_{n} x_n$.

1.3 Suites croissantes, majorées

Définition 7

Une suite (x_n) est

i) majorée si : $\exists M > 0, \forall n \geq 0,\ x_n \leq M$.

ii) minorée si : $\exists m > 0, \forall n \geq 0,\ x_n \geq m$.

iii) bornée si elle est majorée et minorée, i.e. $\exists M > 0, \forall n \geq 0,\ |x_n| \leq M$.

Proposition 2

Toute suite convergente est bornée.

Remarque : La réciproque est fausse. En effet prenons par exemple la suite (x_n) définie par $x_n = (-1)^n$. Cette suite est bien bornée mais est divergente.

Définition 8

i) Une suite (x_n) est croissante à partir d'un certain rang si

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad x_{n+1} \geq x_n.$$

ii) Une suite (x_n) est décroissante à partir d'un certain rang si

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad x_{n+1} \leq x_n.$$

iii) Une suite (x_n) est stationnaire si à partir d'un certain rang elle est constante.

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad x_n = x_N.$$

Définition 9

Une suite est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Proposition 3

- Une suite majorée et croissante est convergente.
- Une suite minorée et décroissante est convergente.
- Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

1.4 Suites adjacentes

Définition 10

Deux suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes si

- (x_n) est croissante et (y_n) est décroissante,
- $x_n \leq y_n$ pour tout n,
- $\lim_n (y_n - x_n) = 0$.

Proposition 4

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

1.5 Point fixe

Théorème 1

Soient (x_n) une suite convergente d'éléments d'un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ dont la limite l appartient à $\mathcal{I}$, et ϕ une fonction continue en ℓ. Alors la suite $\phi(x_n)$ est convergente et a pour limite $\phi(\ell)$.

Définition 11

Un tel point ℓ est dit point fixe de ϕ.

Remarque : Un point fixe, de coordonnées (ℓ, ℓ), est le point d'intersection du graphe de ϕ et de la premire bissectrice.

1.6 Résultats fondamentaux

Proposition 5

Tout élément de $\mathbb{R}$ est la limite d'une suite d'eléments de $\mathbb{Q}$.

Théorème 2 (de Bolzano-Weirstrass.)

Toute suite bornée de $\mathbb{R}$ admet une sous-suite convergente.

1.7 Comparaison de suites

Soient (x_n) et (y_n) deux suites à coefficients strictement positifs.

Définition 12

- La suite (y_n) est dominée par (x_n) si la suite $(\frac{y_n}{x_n})$ est bornée. On note $y_n = \mathcal{O}(x_n)$.
- La suite (y_n) est négligeable devant (x_n) si $(\frac{y_n}{x_n})$ converge vers 0. On note $y_n = o(x_n)$.

Définition 13

Les suites (x_n) et (y_n) sont dites équivalentes si $\lim_n \frac{y_n}{x_n} = 1$. On note $x_n \sim y_n$.

Proposition 6

On a les résultats suivants.

i) $x_n \sim y_n$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des suites réelles.

ii) Si $x_n \sim y_n$ et y_n est convergente, alors x_n est convergente et $\lim_n x_n = \lim_n y_n$.

iii) Si $x_n \sim y_n$ et y_n est divergente, alors x_n est divergente.

iv) Si $x_n \sim y_n$, alors $x_n - y_n = o(x_n) = o(y_n)$.

v) Si $x_n \sim y_n$ et $x'_n \sim y'_n$, alors $x_n x'_n \sim y_n y'_n$ et $\dfrac{x_n}{x'_n} \sim \dfrac{y_n}{y'_n}$ si $x'_n \neq 0$ et $y'_n \neq 0$.

vi) Si $x_n = o(z_n)$ alors $x_n + y_n = o(z_n)$.

Attention ! En général, $x_n \sim y_n$ et $v_n \sim w_n$ n'implique pas $x_n + y_n \sim y_n + w_n$.

2.1 Séries numériques

- Paradoxe de Zenon d'Elée : Achille ne rattrape jamais la tortue après laquelle il court ! Supposons qu'Achille et la tortue courrent le long d'une ligne droite, Achille avançant à $10\mathrm{m}.s^{-1}$, la tortue à $1\mathrm{m}.s^{-1}$ et la tortue partant avec 100m d'avance.
  Le temps (en seconde) nécessaire est :
  $$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$$
  Il s'agit d'une somme comportant une infinité de termes ... qui vaut un nombre fini !
- les séries réelles permettent de construire des nombres comme e qui ne sont ni rationnels ni même algébriques et d'en calculer des valeurs approchées.
  Les séries de fonctions conduisent à définir de nouvelles fonctions. Les séries entières et les séries de Fourier, en particulier.

Définition 1

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On associe à cette suite la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La suite (S_n) s'appelle la série de terme général u_n et S_n est appelée la somme partielle d'ordre n de la série.
On notera simplement $(\sum u_n)$ cette suite.

Définition 2

- La série $(\sum u_n)$ converge si la suite (S_n) converge et diverge sinon. Si la série converge alors $s = \lim\limits_{n} S_n$ est appelée la somme de la série et on note $s = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Soit $(\sum u_n)$ une série convergente de somme s. On appelle le reste d'ordre n de la série $(\sum u_n)$, $R_n = s - S_n$.

Remarque : La suite peut-être définie pour $n \geq 1$, auquel cas on utilisera le même vocabulaire.

Définition 3

La série de terme général $u_n = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, est appelée série géométrique de raison x.

Proposition 1

- Si $|x| \geq 1$, la série $\sum x^n$ diverge.
- Si $|x| < 1$, la série $\sum x^n$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{1-x}$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Proposition 2 (Linéarité)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes. Alors la série $\sum(u_n + v_n)$ est convergente et

$$\sum(u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n.$$

Proposition 3

Si $(\sum u_n)$ converge alors $\lim_n u_n = 0$.

Remarque : La réciproque est fausse.

Définition 4

Si le terme général u_n ne tend pas vers 0 on dit que la série $(\sum u_n)$ diverge grossièrement.

Théorème 1 (de comparaison.)

Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries.

i) Si à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq v_n$ et si la série $(\sum v_n)$ est convergente, alors la série $(\sum u_n)$ est convergente.

ii) Si à partir d'un certain rang, $0 \leq v_n \leq u_n$ et si la série $(\sum v_n)$ est divergente, alors la série $(\sum u_n)$ est divergente.

Théorème 2 (Règle de Cauchy.)

Soit $(\sum u_n)$ une série de terme général u_n positif. S'il existe $\ell < 1$ tel qu'à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{u_n} \leq \ell$ alors la série $(\sum u_n)$ converge.
En particulier si $\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \ell$ alors

- si $\ell < 1$ la série converge,
- si $\ell > 1$ la série diverge grossièrement,
- si $\ell = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

Théorème 3 (Règle de d'Alembert.)

Soit $(\sum u_n)$ une série de terme général u_n positif. S'il existe

- $\ell < 1$ tel qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell$ alors $(\sum u_n)$ converge.
- $\ell \geq 1$ tel qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq \ell$ alors $(\sum u_n)$ diverge.

En particulier, si $\lim\limits_n \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ et

- si $\ell < 1$, alors $(\sum u_n)$ converge,
- si $\ell > 1$, alors $(\sum u_n)$ diverge,
- si $\ell = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

Proposition 4 (Critère des séries alternées.)

Soit (v_n) une suite décroissante vers 0, alors la série $(\sum(-1)^n v_n)$ converge.

Définition 5

- La série $(\sum u_n)$ est absolument convergente si la série $(\sum |u_n|)$ est convergente.
- Une série convergente qui ne converge pas absolument est dite semi-convergente.

Exemple : Les séries de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\frac{\cos n}{n\sqrt{n}}$ sont des exemples de séries absolument convergentes.

Proposition 5 (Séries de Riemann et de Bertrand.)

- La série, dite de Riemann, $(\sum \frac{1}{n^p})$ converge si et seulement si $p > 1$.
- La série, dite de Bertrand, $(\sum \frac{1}{n(\ln n)^p})$ converge si et seulement si $p > 1$.

Séries de fonctions

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de E dans F, avec E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{C}$. Une **suite** de fonctions est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}$,

$$(f_n): \quad \begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ n &\longrightarrow f_n(x). \end{aligned}$$

Elle est notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (f_n).

Définition 6

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}$. On associe à cette suite la suite $(S_n(x))$ définie pour $x \in E$ par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

Définition 7

La série $(\sum f_n(x))$ converge sur E si la suite $(S_n(x))$ converge E et diverge sinon. Si la série converge alors $s(x) = \lim_n S_n(x)$ est appelée la somme de la série de fonctions et on note pour tout x dans E, $s(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Séries de Fourier

Un signal est une représentation physique d'une information à transmettre.

- Onde acoustique : courant délivré par un microphone (parole, musique, ...)
- Signaux biologiques : EEG, ECG
- Tension aux bornes d'un condensateur en charge
- Signaux géophysiques : vibrations sismiques
- Finances : cours de la bourse
- Débit de la Seine
- Images, Vidéos
- ...

Le traitement du signal est l'ensemble de techniques permettant de :

- créer,
- analyser,
- transformer les signaux en vue de leur exploitation.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) est un mathématicien et physicien français qui a notamment travaillé sur la propagation de la chaleur dans un solide. Il décriva ce phénomène par des équations différentielles qu'il ne pu résoudre que sous forme d'une série de fonctions de terme général de la forme $\cos(nx)$*. Il fût ainsi le premier à résoudre le problème du développement d'une fonction périodique en série trigonométrique.*

Un signal est dit périodique si les variations de son amplitude se reproduisent régulièrement au bout d'une période T constante.
La fréquence d'un signal périodique est le nombre de périodes par seconde. Elle s'exprime en hertz (Hz). La fréquence en hertz est égale à l'inverse de la période exprimée en secondes : $f = \dfrac{1}{T}$.

Une représentation fréquentielle de l'information est souvent plus facile à interpréter que la représentation temporelle.

Lorsque le signal est sinusoïdal, $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ on a immédiatement la fréquence : f_0 !
La *Décomposition en Série de Fourier* consiste à exprimer un signal périodique comme une combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux.

- Pour les signaux périodiques, la décomposition en Série de Fourier constitue le lien entre la représentation temporelle d'un signal et sa représentation fréquentielle.
- Pour les signaux non périodiques, on utilise la Transformée de Fourier.

- Un nombre complexe est un nombre z qui s'écrit $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = 1$. a est la partie réelle de z, et b sa partie imaginaire.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
- Le conjugué de $z = a + ib$ est le complexe $\bar{z} = a - ib$.
- Le module de $z = a + ib$ est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. On a aussi $|z|^2 = z\bar{z}$. Le module vérifie les deux identités suivantes :
  - $\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2, |z \times w| = |z| \times |w|$
  - $\forall (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, |\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$
  - Le module vérifie l'inégalité triangulaire $\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2, |z + w| \leq |z| + |w|$.
  - Si $w \neq 0$ et $z \neq 0$, on a égalité dans cette inégalité si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que $z = cw$.

- Pour tout nombre complexe z de module 1, il existe un réel θ tel que $z = \cos\theta + i \sin\theta$. On note $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.
- Formule d'Euler : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$.
- Formule de Moivre : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$.
- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(x) = g(x) + ih(x)$ avec g et h deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x + i \int_a^b h(x)\mathrm{d}x.$$

1.2 Quelques formules de trigonométrie.

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

1.3 Sur les fonctions numériques

Définition 1 (Fonction périodique)

Soit un réel $T > 0$.

- On dit que la fonction f est T-périodique lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.
- La fréquence ν est l'inverse de la période.
- La pulsation est le réel définit par $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$. Si $T = 2\pi$, alors $\omega = 1$.

Définition 2 (Continuité et dérivabilité par morceaux)

- La fonction f est continue par morceaux sur l'intervalle $\mathcal{I}$ lorsqu'elle est continue sur $\mathcal{I}$, sauf en un nombre fini de points de discontinuité où elle admet néanmoins une limite finie à droite et à gauche différentes.
  Si a est une valeur de discontinuite de f, on note :

$$f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{et} \quad f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

- La fonction f est dérivable par morceaux sur $\mathcal{I}$ lorsqu'elle est dérivable sur $\mathcal{I}$, sauf en un nombre fini de points où elle admet néanmoins une dérivée à droite et à gauche différentes.

1.4 Intégration d'une fonction numérique

Proposition 1

Toute fonction f continue par morceaux sur un intervalle $\mathcal{I}$ est intégrable sur $\mathcal{I}$.

Définition 3

Soient f une fonction T-périodique et Δ un intervalle de longueur T. On appelle valeur moyenne de f sur une période le réel $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\Delta} f(x)\mathrm{d}x$.

Proposition 2

- Si f est une fonction T-périodique. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$.

  En particulier $\displaystyle\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

- Si f est une fonction paire, $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

- Si f est une fonction impaire, $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Proposition 3 (Intégration par parties)

Soien f et g deux fonctions dérivables sur $\mathcal{I}$, dont les dérivées sont continues sur $\mathcal{I}$. Alors,

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

2. Séries trigonométriques

Définition 4

On appelle série trigonométrique à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une série de fonctions d'une variable réelle x de la forme

$$\sum_{n\geq 0} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

avec $b_0 = 0$, (a_n) et (b_n) des suites de nombres réelles ou complexes.

Propriétés :

i) La somme d'une série trigonométrique est une fonction prériodique de période 2π.

ii) si tous les coefficients a_n d'une série trigonométrique sont nuls, alors la somme de cette série est impaire.

iii) si tous les coefficients b_n d'une série trigonométrique sont nuls, alors la somme de cette série est paire.

Proposition 4

Soient n et p deux entiers. On a les égalités

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(px)\mathrm{d}x &= \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq p \\ \pi \text{ pour } n = p, n \neq 0 \\ 2\pi \text{ si } n = p = 0 \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(px)\mathrm{d}x &= 0 \\
\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(px)\mathrm{d}x &= \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq p \\ \pi \text{ pour } n = p, n \neq 0 \\ 0 \text{ si } n = p = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Proposition 5

Les coefficients d'une série trigonométrique $\sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ sont donnés par

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} S(x)\mathrm{d}x &= 2\pi a_0, \\
\int_0^{2\pi} S(x)\cos(px)\mathrm{d}x &= \pi a_p, \qquad p \neq 0, \\
\int_0^{2\pi} S(x)\sin(px)\mathrm{d}x &= \pi b_p, \qquad p \neq 0.
\end{aligned}$$

Définition 5

Soit f une fonction périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $[0, 2\pi]$.

- Les coefficients de Fourier réels de f sont donnés pour $n \geq 1$ par

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x.$$

- La série de Fourier de f est la série trigonométrique

$$SF_f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)).$$

Exemple. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f, 2π-périodique, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{si } -\pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Représentation de l'approximation de f par $SF_f^K(t) = a_0 + \sum_{n=1}^K (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$.

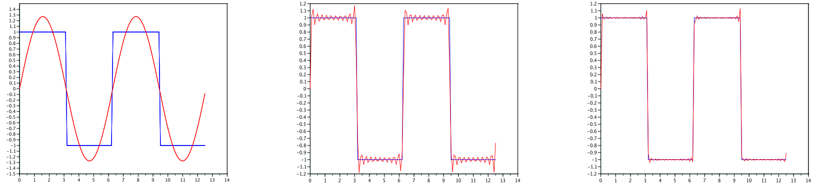


Figure: De gauche à droite : $SF_f^1(x)$, $SF_f^{10}(x)$ et $SF_f^{50}(x)$.

Remarques.

- Les fonction intégrées étant 2π-périodiques, l'intervalle $[0, 2\pi]$ peut être remplacé par n'importe quel intervalle de longueur 2π.
- Lorsque f est une fonction T-périodique les coefficients de Fourier réels s'écrivent pour $n \geq 0$:
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega x) \mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(n\omega x) \mathrm{d}x,$$
avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$. La série de Fourier de f est la série trigonométrique
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Dans tout ce qui suit $\omega = \frac{2\pi}{T}$, avec $T > 0$.

Définition 6

Le terme $a_1 \cos(\omega x) + b_1 \sin(\omega x)$ est appelé le fondamental (de fréquence $\frac{1}{T}$). Pour $n \geq 2$, $a_n \cos(\omega n x) + b_1 \sin(\omega n x)$ est appelé harmonique de rang n (c'est un signal de féquence $\frac{n}{T}$, multiple du fondamental).

Forme complexe des coefficients de Fourier

Définition 7

Les coefficients de Fourier complexes de f sont donnés par $c_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(x) e^{-in\omega x} \mathrm{d}x$.

Ainsi, la série de Fourier de f est la fonction définie par

$$SF_f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}.$$

Définition 8

Le coefficient $c_0 = a_0$ est appelé valeur moyenne de f.

4. Propriétés des coefficients de Fourier

Propriétés algébriques

Proposition 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Proposition 7

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On retrouve les coefficients complexes à partir des coefficients réels :

$$c_n + c_{-n} = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)\mathrm{d}x, \quad i(c_n - c_{-n}) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)\mathrm{d}x.$$

- Les coefficients complexes d'indices opposés sont conjugués : $c_{-n} = \overline{c_n}$.

5. Energie et spectre des fréquences

Définition 9

L'énergie de l'harmonique de rang $n \geq 1$ est le réel $E_n(f) = |c_n|^2 + |c_{-n}|^2$.

Proposition 8

L'énergie de l'harmonique de rang $n \geq 1$, vaut $E_n = \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}$.

Définition 10

Le spectre des fréquences de f s'obtient en représentant les fréquences $\frac{n}{T}$ des harmoniques en abscisse, et $|c_n| + |c_{-n}| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ en ordonnées.

Théorème 1 (de Riemann-Lebesgue)

Soit f une fonction T-périodique, alors ses coefficients de Fourier vérifient :

$$\lim_{n \to +\infty} |c_n| = \lim_{n \to -\infty} |c_n| = \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 0.$$

Remarque : Ce théorème signifie que lorsque n est grand, l'harmonique de rang n est négligeable (son amplitude est petite).
En pratique on néglige les termes de rangs "élevés" de la somme de Fourier en fonction de la précision souhaitée.

THÉORÈMES DE CONVERGENCE.

Théorème 2 (égalité de Bessel-Parseval)

Soit f une fonction T-périodique tel que f^2 est intégrable sur une période T. Alors

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

Cette égalité permet de calculer la somme de quelques séries usuelles. L'idée étant de créer un signal périodique dont les coefficients de Fourier sont "semblables" aux termes de la série étudiée.
En termes physiques, l'énergie d'un signal périodique f est la somme des énergies des harmoniques et du carré de la valeur moyenne.

Théorème 3 (de Dirichlet)

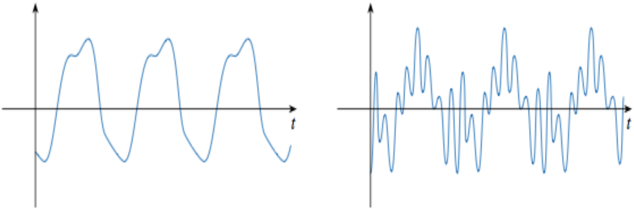
Si f est une fonction périodique dérivable par morceaux, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad SF_f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

En particulier, si f est continue en x, alors $SF_f(x) = f(x)$.

6. Séries de Fourier et musique

- Le son provient de variations de la pression atmosphérique.
- Un microphone en mesurant les variations de pression permet "se se faire une image" du son.
- Pour "visualiser" le signal sonore, on peut représenter le déplacement $s(t)$ de la membrane du microphone en fonction du temps t. Le signal correspondant à une note de musique a la particularité d'être périodique.
- Comment peut-on faire la distinction entre une note produite par deux instruments de musique différents ?



 Variation de la pression dûe à la note Do jouée par une flûte, à gauche, et un violon, à droite.

La différence de son entre les deux instruments provient des énergies des deux signaux.

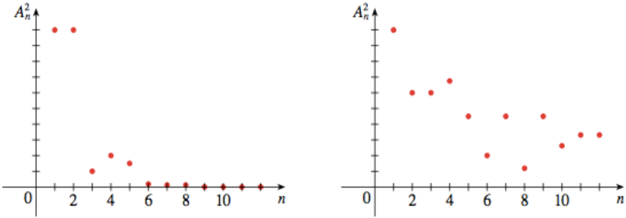


Figure: Spectre des fréquences pour la flûte, à gauche, et le violon, à droite.