APPROXIMATIONS PÉRIODIQUES EN THÉORIE ERGODIQUE DIFFÉRENTIQBLE.

INTRODUCTION

1. Approximations périodiques.

Un système dynamique est dit périodique ou d'ordre fini si un de ses itérés est égal à l'identité. L'exemple le plus simple étant celui d'une rotation d'angle rationnel sur le cercle. L'étude des approximations des systèmes dynamiques par des dynamiques périodiques (dans différents espaces de transformations munis de différentes topologies) a toujours été un outil crucial en théorie ergodique, aussi bien dans la compréhension gńérale et la classification de comportements asymptotiques usuels que dans la construction d'exemples aux comportements nouveaux. Aussi, les approximations par des transformations d'ordre fini apparaissent d'une façon très naturelle dans l'étude de ce qu'on appelle les systèmes quasi-périodiques provenant de nombreux problèmes de la physique tels que la mécanique céleste ou l'étude de l'équation de Schrödinger.

Avec les travaux de Rokhlin et Halmos [R,H], puis avec ceux d'Oxtoby et Ulam [OU], les approximations périodiques ont permis d'établir la généricité de certaines propriétés (comme le mélange faible, mais aussi l'absence de mélange) parmi les systèmes dynamiques abstraits (munis de la topologie faible) et parmi les homéomorphismes (munis de la topologie uniforme) en dimension supérieure à deux. Les dynamiciens russes ont adopté à la fin des années 60 une approche systématique des approximations périodiques pour caractériser et classifier les comportements ergodiques génériques, notamment avec les travaux de Katok et Stepin (voir section II. 7).

Dans le cadre de la théorie ergodique abstraite, la thecnique de construction dite de découpage et d'empilement (cutt and stack), fondamentale dans la construction d'exemples mais aussi dans la compréhension générale de la théorie, est également basée sur l'approximation périodique comme outil inductif de construction.

En dynamique différentiable, c'est l'absence d'approximations périodiques trop rapides qui est l'hypothèse principale dans la théorie KAM (Kolmogorov, Arnol'd, Moser) visant à établir la prévalence de la stabilité dans les dynamiques quasi-périodiques. Cette stabilité se traduit par la persistence et la régularité de certains objets étudiés comme par exemple les tores invariants supportant des dynamiques analytiquement conjuguées à des translations dans le cas des systèmes hamiltoniens voisins de systèmes complètement intégrables. Un autre exemple est donné par les difféomorphismes lisses du cercle, où l'absence d'approximations périodiques trop rapides correspond au fait que le nombre de rotation (déplacement moyen) du difféomorphisme soit diophantien, c'est-à-dire mal approché par les rationnels (voir la section II.1 pour la définition exacte d'un vecteur diophantien). La stabilité dans ce cas se traduit par le fait qu'un tel difféomorphisme est toujours $C^\infty-$conjugué à la rotation d'angle égal à son nombre de rotation. Les tores quasi-périodiques qui persistent dans le premier exemple sont exactement ceux dont le vecteur de translation est diophantien.

En général, la prévalence de la stabilité est tout simplement due au fait que les vecteurs diophantiens sont de mesures de Lebesgue totale sur $\mathbf{R^n}$, pour tout $n \geq 1$. Les vecteurs liouvilliens sont les vecteurs irrationnels (dont les coordonnées ne sont rationnellement indépendantes) qui ne sont pas diophantiens. L'existence d'approximations périodiques rapides, dit phénomène liouvillien, est au contraire source d'instabilité et conduit à la disparition des structures régulières et à l'apparition de dynamiques plus complexes que celles des modèles linéaires, c'est-à-dire des translations sur les tores.

Le phénomène liouvillien a été systématiquement éxploité, en particulier en complément à la théorie KAM, pour produire entre autres des exemples non linéarisables, de germes holomorphes (Crémer), de difféomorphismes du cercle (Arnol'd), de flots de translation reparamétrés (Kolmogorov, Shklover) et de produits croisés au-dessus des rotations (Grabar et Furstenberg). Le phénomène liouvillien peut donner lieu à des comportements bien éloignés du modèle linéaire (voir par exemple [Y1,Y3,PM1,PM2,F1,F4,7,8]). Même si le modèle diophantien est dominant vu que les vecteurs diophantiens sont de mesure totale, le phénomène liouvillien subsiste, que ce soit dans les familles à paramètres ou lorsqu'on considère un système quelconque au voisinage d'un systèmes quasi-périodique. Qui plus est, ce phénomène peut être générique du point de vue de la catégorie de Baire (voir par exemple [He3]) vu que les nombres (ou vecteurs) liouvilliens forment un G^δ dense de R^n, pour tout $n \geq 1$.

Explicitement ou implicitement, la plupart des exemples d'instabilité mentionnés ci-dessus s'obtiennent comme limite de transformations conjuguées à des translations périodiques. Une approche systématique des constructions par approximations périodiques ou constructions par conjugaisons successives fut introduite dans [AK], qui est adaptée au cadre conservatif et à des variétés plus générales que les tores. Cette méthode de construction a connu et connaît encore beaucoup de succès grâce à la grande fléxibilité qu'elle offre (voir section II.5).

Pour résumer, le phénomène liouvillien participe à compléter la description donnée par la théorie KAM de systèmes provenant de dynamiques quasi-périodiques et permet souvent de montrer l'optimalité des hypothèses sous lesquelles un théorème de régularité est obtenu (voir par exemple [He1,Y1,Y3,F2]). Par ailleurs, le phénomène liouvillien permet d'explorer des dynamiques différentiables complexes et variées et de montrer leur coexistence avec le modèle linéaire prédominant. Dans ce texte, nous nous efforcerons aussi à montrer comment ce phénomène peut être éxploité au-delà du cadre quasi-périodique, comme par exemple dans l'étude des dynamiques exhibant de l'hyperbolicité et dans les nombreuses intéractions entre théorie des nombres et théorie ergodique.

2. Réalisation différentiable.

Il y a en théorie ergodique abstraite des paradigmes et des classes d'équivalences d'une importance proéminente à la fois d'un point de vue théorique que pratique tels que les systèmes Bernoulli à un extrême de l'échelle de la compléxité dynamique et les systèmes à spectre discret à l'autre. Mais entre ces deux extrêmes il y a une multitude de systèmes aux comportements très sophistiqués, de constructions exotiques rassemblant des propriétés choisies à la carte parmi les propriétés ergodiques possibles, pourvu que celles-ci ne soient pas en contradiciton par définition. On en vient à déplorer l'absence de théorèmes (voir l'introduction de [K3]) et à invoquer des zoos ergodiques où tout est possible. En théorie ergodique différentiable, où il s'agit d'étudier les propriétés asymptotiques de systèmes dynamiques différentiables par rapport à des mesures invariantes naturelles (volume, mesure SRB, mesure physique, etc.), les possibilités de classification devraient être plus importantes et les classes d'équivalence plus structurées. La problématique des réalisations différentiables est d'explorer ces possibilités de classification tout en cherchant également à construire de nouveaux exemples ou des contre-exemples qu'on pourrait qualifier de pathologiques. Dans sa forme la plus générale, le problème de réalisation différentiable se pose comme suit.

Problème de réalisation différentiable. *Etant donné un automorphisme T préservant la mesure d'un espace de Lebesgue probabiblisé (X, m), existe-t-il une variété compacte différentiable M et un difféomorphisme f (de classe C^∞) de M préservant une forme volume différentiable (de classe C^∞) ν tel que le système (M, f, ν) soit isomorphe à (X, T, m) ?*

À ce jour, la seule restriction connue pour qu'un système abstrait puisse admettre une réalisation différentiable est la finitude de son entropie métrique. On peut aborder le problème des réalisations différentiables en cherchant des exemples de systèmes abstraits non réalisables tout comme on peut s'efforcer de trouver des réalisations différentiables de systèmes abstraits appartenant à diverses classes d'équivalence connues. En avançant vers une réponse au problème de réalisation différentiable, les recherches dans les deux voies indiquées ci-dessus permettent surtout :

–de déterminer et d'étudier des invariants d'isomorphisme métrique et de développer certains critères simples les impliquant ;

–de développer des techniques nouvelles de construction et d'élaborer sur des techniques existantes, ainsi que de trouver des cas de rigidité différentiable où ces techniques ne sont plus applicables et où la régularité voulue aux exemples impose des contraintes dynamiques inviolables (comme par exemple dans [9]) ;

–de montrer dans ces situations de rigidité l'optimalité des hypothèses, comme mentionné plus haut au sujet de la théorie KAM, mais dans d'autres cas aussi comme pour les conditions impliquant l'ergodicité locale des systèmes non uniformément hyperboliques (voir [6]).

Les recherches autour du problème de réalisation différentiable ont aussi l'intérêt d'améliorer notre compréhension :

– de ce qui peut être possible comme comportement ergodique pour les systèmes différentiables, et plus particulièrement ceux provenant de la physique, par exemple de la mécanique classique ou de la physique statistique, et de déterminer suivant différents critères si les comportements étudiés sont plutôt rares ou prévalents ;

– des différents liens (ou absence de liens) qui existent entre les propriétés topologiques, métriques et spectrales d'un système dynamique différentiable ;

J'exposerai dans la troisième section de ce mémoire mes résultats reliés au problème de réalisation différentiable en les classant sous trois rubriques : reparamétrages de flots de translation sur le tore, constructions par conjugaisons successives, liens entre propriétés ergodiques et propriétés topologiques. Les thèmes des différentes rubriques étant liés, certains résultats pourraient être déplacés d'une rubrique à une autre et leur emplacement est parfois arbitraire.

3. Approximations périodiques et exposants de Lyapunov.

Dans la quatrième section du mémoire deux articles sont exposés où les approximations périodiques interviennent dans l'étude de systèmes qui présentent de l'hyperbolicité.

4. Approximations periodiques et propriétés ergodiques.

Dans la cinquième et dernière section, j'inclus des résultats qui montrent le rôle que jouent les approximations périodiques dans les propriétés ergodiques de certains systèmes dynamiques usuels comme les translations sur le tore ou les cascades cylindriques.

Ce mémoire porte essentiellement sur la théorie ergodique différentiable. Avant d'exposer les différents résultats dans les sections III, IV et V, je donne dans la première section un aperçu rapide des différentes propriétés dynamiques, topologiques, métriques et spectrales qui seront en jeu, puis j'expose rapidement dans la deuxième un nombre de constructions classiques et d'outils qui seront utiles par la suite. Le lecteur familier avec la théorie ergodique des systèmes dynamiques peut passer directement à la troisième section. Pour des exposés plus complets d'introduction générale à la théeorie ergodique et à la théorie spectrale des systèmes dynamiques, ainsi que des références, voir [HK] et [KT].

I. QUELQUES PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES USUELLES

1. Propriétés topologiques.

1.1. Transitivité topologique. On dit qu'un système (T, M) est topologiquement transitif s'il exite une orbite dense par T dans M, c'est à dire s'il exite un point $x \in M$ tel que pour tout $y \in M$, il y a une suite $k_n \in \mathbf{N}$ telle que $T^{k_n}x$ converge vers y. On rappelle que pour des espaces métriques complets et séparables la transitivité topologique est équivalente au fait que pour toute paire d'ouverts U et V dans M, il existe un entier N tel que $T^N U \cap V \neq \emptyset$, ou d'une façon équivalente si tout ouvert invariant par T a son adhérence égale à M. En prenant une base dénombrable d'ouvert on voit que si T a une orbite dense, alors l'ensemble des points dont l'orbite est dense forme un G_δ-dense dans M.

1.2. Minimalité. On dit qu'un système dynamique (T, M) est minimal si l'orbite de tout point de M est dense dans M, ou d'une façon équivalente si le seul fermé non vide invariant par T est M.

Plus généralement, un férmé non vide $X \subset M$ invariant par T ($TX = X$) est dit minimal pour T si T restreint à X est minimal. L'inclusion établit un ordre partiel sur les fermés invariants et les ensembles minimaux sont les éléments minimaux de cet ordre. Dans le cas d'un espace compact M, comme l'intersection d'une suite décroissante de fermés invariants est toujours non vide, T possède par le Lemme de Zorn un ensemble minimal invariant (voir [section 2.2.c, HK] pour une preuve n'utilisant pas le Lemme de Zorn).

Dans le cas non compact, un système peut ne pas avoir d'ensemble minimal. Ainsi le produit croisés sur $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$: $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \varphi(x))$ où α est irrationel et φ est de classe C^1, de moyenne nulle et n'est pas un cobord continu au-dessus de R_α, n'a aucun ensemble minimal (voir [MS]).

La transitivité et la minimalité sont tous les deux, par ordre croissant de force, des propriétés d'irréductibilité en dynamique topologique. Dans le premier cas on ne peut pas isoler l'orbite d'un ouvert, et dans le second on ne peut pas isoler l'orbite de n'importe quel point.

Un renforcement de la notion de transitivité est donné par la propriété suivante :

1.3. Mélange topologique. On dit qu'un système (T, M) est topologiquement mélangeant si pour toute paire d'ouvert U et V il existe un entier N tel que $T^n(U) \bigcap V \neq \emptyset$ pour tout $n \geq N$.

La minimaltié et le mélange topologique sont tous les deux des renforcements strictes de la notion de transitivité mais il n'y a pas de relation hiérarchique entre eux puisque d'un côté, les rotations d'angle irrationel sur le cercle sont minimales mais ne sont pas topologiquement mélangeantes, et d'un autre, les automorphismes hyperboliques du tore sont topologiquement mélangeants mais clairement pas minimaux puisqu'ils ont des points periodiques.

1.4. Conjugaison topologique. On dit que deux systèmes (T, M) et (S, L) sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme $h : M \to L$ tel que $h \circ T(x) = S \circ h(x)$ pour tout $x \in M$. La conjugaison topologique est une relation d'équivalence entre les sytèmes dynamiques qui préserve les propriétés asymptotiques qualitatives les plus significatives telles que les points periodiques, les ensembles minimaux, les ensembles limites, les attracteurs, le mélange topologique et autres.

Dans le cas des flots, la notion de conjugaison ($h \circ T^t = S^t \circ h$) est trop restrictive car elle forcerait par exemple les cycles des flots conjugués à avoir la même longueur. Une autre notion plus souple, qui relève seulement les propriétés géométriques qualitatives des flots est celle de l'équivalence des orbites, c'est à dire l'existence d'un homéomorphisme envoyant les orbites d'un flot sur les orbites de l'autre sans respecter le temps. Typiquement, un flot reste équivalent à lui-même après reparamétrage (voir la définition à la section II.1). Parce qu'elle est plus robuste, c'est plutôt la deuxième notion qui est utilisée pour classifier les flots en général, mais nous aurons l'occasion de voir tout au long de cet exposé comment plusieurs propriétés dynamiques importantes, telles que le mélange topologique pour les flots, sont altérées par la relation d'équivalence. Ceci parce que le mélange est une propriété sensible au reparamétrage contrairement à la minimalité ou à la transitivité qui ne sont pas affectées par le changement de temps.

2. Propriétés spectrales et métriques.

Etant donné un espace de Lebesgue non atomique $(M, \mathcal{A}, \mu)$ on considère des systèmes dynamqieus sur cet espace qui sont des flots ou des transformations inversibles mesurables, préservant la mesure μ. Dans cette section, on suppose toujours $\mu(M) = 1$.

2.1. Récurrence de Poincaré et théorème ergodique de Birkhoff. Le théorème de récurrence de Poincaré assure que μ presque tout point d'un ensemble mesurable $A \subset M$ revient sous l'action de T infiniment souvent dans A, c'est à dire que $\mu(\{x \in A \mid \{T^n(x)\}_{n\in\mathbf{N}} \subset M \setminus A\}) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Le théorème ergodique de Birkhoff ponctuel renforce considérablement le théorème de Poincarré en donnant des ionformations quantitatives sur le nombre de retours à l'ensemble A :

Théorème. *Soit $\varphi \in L^1(M,\mu)$, alors il existe une fonction $\overline{\varphi} \in L^1(M,\mu)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(T^i x) = \overline{\varphi}(x)$$

pour μ presque tout $x \in M$. On a $\int_M \overline{\varphi}(x)d\mu(x) = \int_M \varphi(x)d\mu(x)$.

La fonction $\overline{\varphi}$ est en fait la projection de φ sur l'algèbre des fonctions invariante mod 0 par le système (T,M,μ).

2.2. Isomorphisme. Deux systèmes dynamiques (M,T,μ) et (N,S,m) sont dits *isomorphes* s'il exist un *isomorphisme* $h : M \to N$, c'est à dire une bijection bi-mesurable $h : M \to N$ telle que $T_*\mu = m$ et $h \circ T = S \circ h$.

Deux systèmes isomorphes ont clairement les même propriétés ergodiques générales (voir ci-dessous). Mais lorsque l'isomorphisme n'est pas une conjugaison les propriétés asymtptotiques topologiques des systèmes isomorphes peuvent évidemment être differentes, et des isomorphismes qui ne sont pas des conjugaisons fournissent parfois des exemples de contraste fort entre les propriétés topologiques et métriques d'un système comme on le verra dans le paragraphe III.5.

2.3. Ergodicité. Un système (T,M,μ) est dit ergodique si tout ensemble mesurable invariant par T est de mesure 1 ou 0[1]. Une propriété équivalente est que toute fonction mesurable $f : M \to \mathbf{R}$ telle que $f \circ T = f$ est constante (μ presque sûrement). Grâce au théorème ergodique de Birkhoff l'ergodicité induit une propriété quantitative de récurrence en apparence plus forte que la simple propriété qualitative utilisée dans la définition :

Proposition. (T,M,μ) *est ergodique si et seulement si pour toute fonction $f \in L^1(M,\mathbf{R})$ on a $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$ converge μ presque sûrement vers $\int f(x)d\mu(x)$.*

Un système topologique qui a une mesure invariante ergodique chargeant tous les ouverts est transitif.

2.4. L'opérateur spectral. A tout système dynamique (T,M,μ) on peut associer un operateur unitaire U_T agissant sur l'espace de Hilbert $L^2(M,\mu,\mathbf{C})$ par $U_T f = f \circ T^{-1}$. Les propriétés spectrales de l'opérateur spectral associé à (T,M,μ) sont invariantes par isomorphisme (voir paragraphe I.2.2) et caractérisent un grand nombre des propriétés ergodiques de T. Sur l'opérateur spectral et ses liens avec les propriétés dynamiques, l'ouvrage le plus complet et le plus récent [KT], voir aussi [CFS] et [P].

Puisque U_T a toujours une valeur propre égale à 1 representée par les fonctions constantes, on entend par propriétés spectrales de T les propriétés de l'opérateur U_T lorqu'on le restreint à l'espace $H_0 = L_0^2(M,\mu,\mathbf{C})$ d'intégrale nulle. Ceci s'applique en particulier à la notion de spectre de Lebesgue dénombrable ou à celle de spectre continu définie ci-dessous.

[1]On rappelle que sous l'action d'un flot, il est équivalent pour un ensemble d'être invariant mod 0 par tous les éléments simultanément ou d'être invariant mod 0 par chaque action individuelle [CFS]

On rappelle aussi qu'à toute fonction $f \in H$ est associée une mesure (spectrale) σ_f definie sur le cercle $\mathbb{S}$ par sa transformée de Fourier

$$(U_T^n f, f) = \int_{\mathbb{S}} e^{i2\pi\theta} d_{\sigma_f}(\theta).$$

Le type spectral maximal de T est alors le supremum de tous les types des mesures σ_f lorsque f parcourt H_0 (si on met de côté les fonctions constantes comme expliqué ci-dessus).

Deux systèmes (T, M, μ) et (S, N, m) sont dit *spectralement équivalents* s'il existe un isomorphisme $h : L^2(M, \mu) \to L^2(N, m)$ tel que $U_T \circ h = h \circ U_S$.

De par sa définition l'ergodicité est une propriété spectrale, celle de ne pas avoir 1 comme valeur propre. Nous allons voir maintenant quelques propriétés spectrales plus fortes que l'érgodicité.

2.5. Spectre continu ou mélange faible. On dit que (T, M, μ) est faiblement mélangeant si l'opérateur spectral associé n'a aucune valeur propre, ou d'une façon équivalente si la mesure spectrale maximale n'a pas d'atome (d'où l'appelation spectre continu). Le mélange faible correspond à des propriétés statistiques de la transformation :

Proposition. *Pour un système (T, M, μ) les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *(T, M, μ) est faiblement mélangeant ;*
(2) *Il existe une suite $n_i \in \mathbf{N}$ telle que pour toute paire (A, B) de sous-ensembles mesurables de M on a $\mu(T^{-n_i} A \cap B) \to \mu(A)\mu(B)$ lorsque $i \to \infty$*[2] *;*
(3) *Le produit cartésien $T \times T$ est ergodique ;*
(4) *$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} |(f \circ T^i, g) - (f, 1)(1, g)| \to 0$ pour tout $f, g \in L^2(M, \mathbf{C})$.*

2.6. Mélange. On dit que le système (T, M, μ) est mélangeant si pour toute paire (A, B) de sous-ensembles mesurables de M on a

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A \bigcap T^{-n} B) = \mu(A)\mu(B)$$

avec $n \in \mathbf{N}$ ou $n \in \mathbf{R}$ suivant qu'il s'agisse de transformations ou de flots.

Le mélange est équivalent au fait que pour toute fonction $f \in L_0^2(M, \mathbf{C})$ on ait $(f \circ T^n, f) \to 0$. En termes spectraux, le mélange est donc équivalent au fait que les coéfficients de Fourier c_n de la mesure spectrale maximale tendent vers 0 lorsque $n \to \pm\infty$.

Un système (T, M, μ) (ou flot (T^t, M, μ)) est dit mélangeant d'ordre $l \geq 2$ si, pour toute suite $(u_n^{(1)}, \cdots, u_n^{(l-1)})_{\{n \in \mathbf{N}\}}$ vérifiant pour $i = 1, \ldots, l-1$, $\lim_{n \to \infty} u_n^{(i)} = \infty$, et pour tout l-uplet $(A_1, \cdots, A_l)$ de sous-ensembles mesurables de M, on a

$$\lim_{n \to \infty} \mu\left(T^{-u_n^{(1)} - \ldots - u_n^{(l-1)}} A_l \cap \cdots \cap T^{-u_n^{(1)}} A_2 \cap A_1\right) = \mu(A_{l-1}) \cdots \mu(A_1).$$

[2]Pour une paire donnée (A, B) la limite est vraie le long d'une suite ayant une densité totale sur $\mathbf{N}$

La définition générale du mélange correspond alors au mélange d'ordre 2. On dit qu'un système est mélangeant de tout ordre s'il est mélangeant d'ordre l pour tout $l \geq 2$.

Clairement le mélange implique le mélange faible et donc l'ergodicité. Dans le cas d'une mesure chargeant les ouverts le mélange implique le mélange topologique mais il y a, sur le tore $\mathbf{T}^5$ par exemple [F4], des sytèmes analytiques préservant le volume, topologiquement mélangeants mais non ergodiques.

2.7. Spectre absolument continu. Plus forte que le mélange est la propriété d'avoir un type spectral maximal absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue sur le cercle, ce qu'on appelle un spectre absolument continu. Cette propriété entrîne en effet le mélange puisque le lemme de Riemann Lebesgue implique que les coéfficients de Fourier d'une mesure absolument continue sur le cercle tendent vers zéro lorsque $n \to \pm\infty$.

On dit qu'un système (T, M, μ) a un *spectre de Lebesgue* si son type spectral maximal est equivalent à la mesure de Lebesgue. Lorsqu'en plus la multiplicité spectrale est infinie, on dit que le spectre est *Lebesgue dénombrable.* Ceci est équivalent à l'existence d'une famille dénombrable de fonctions $f_1, f_2, \dots$ dans $L^2_0(M, \mu)$ telles que $\{U^j_T f_i\}_{i\in\mathbf{Z},\mathbf{j}\in\mathbf{Z}}$ forment une base orthonormale de $L^2_0(M, \mu)$.

Les composantes de Lebesgue apparaissent d'une façon naturelle dans le spectre lorsquil existe des fonctions ayant une décroissance des corrélations ($c_n = (U^n_T f/f)$) exponentielle, puisqu'alors la mesure spectrale associée est de densité réelle analytique et n'a en particulier qu'un nombre fini de zéros. Mais puisqu'il n'y a pas de condition de décroissance sur les coéfficients de Fourier d'une fonction L^1 sur le cercle, les décroissances de corrélations ne constituent pas un cirtère univoque pour garantir des spectres absolument continus.

Un système (T, M, μ) est dit de spectre simple s'il existe une fonction $f \in L^2_0(M, \mu)$ telle que la suite $\{U^j_T f\}_{j\in\mathbf{Z}}$ engendre $L^2_0(M, \mu)$. On ne sait pas s'il existe des système de spectre de Lebesgue simple.

2.8. Le Lemme de Rokhlin. Une tour pour (T, M, μ) de base B et de hauteur $h \in \mathbf{N}$ est une union disjointe : $B \sqcup TB \ldots \sqcup T^{h-1}B$. Les ensembles $T^i(B), i \leq h-1$ sont applés les étages de la tour. La mesure d'une tour est $\mu(B \sqcup TB \ldots \sqcup T^{h-1})B$. Le lemme de Rokhlin assure que si (T, M, μ) est aperiodique, c'est à dire si l'ensemble des points periodiques de T est de mesure nulle, alors pour tout $h \in N$ et tout $\epsilon > 0$, il y a des tours de hauteur h et de mesure plus grande que $1 - \epsilon$.

Ce lemme démontre que dans l'ensemble des transformations apériodiques, la classe d'équivalence par isomorphisme d'une transformation donnée est très large (dense au sens de la topologie uniforme donnée par $d(T, S)$ $= \mu(\{x \mid Tx \neq Sx\})$) et montre que par des modifications localisées sur des ensembles de mesure très petie (la base d'une tour très haute) on peut modifier totalement le comportement d'un système. C'est cette démarche qui a été appliquée par Halmos [H] pour démontrer que les transformations faiblements mélangeantes forment un résiduel en topologie faible.

Pour tirer des informations sur les propriétés ergodiques des transformations à partir de l'existence de tours il faut donc supposer plus de contraintes sur les étages. On verra ci-dessous que beaucoup des travaux visant à classifier les systèmes mesurables, établir leurs propriétés génériques ou construire des exemples, se basent plus ou moins sur cette idée de considérer ou de construire des tours de Rokhlin particulières. Il en va des constructions dite de découpage et d'empilement, du concept d'approximations périodiques de [KS], de la notion de rang un ou rang fini, ainsi que de celle d'approximations périodiques lentement coalescentes introduite dans l'article [1].

2.9. Propriété de rang fini. Soit $(M, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de Lebesgue. On appelle partition partielle de M toute collection finie η d'ensembles mesurables disjoints de M. Pour $\delta > 0$, on dit qu'une partition partielle ξ δ-raffine une partition partielle η si à toute union A d'atomes de η on peut associer une union A' d'atomes de ξ telle que $\mu(A \triangle A') < \delta$.

Pour une suite de partition partielle ξ_n, on dit que ξ_n converge vers la partition en points de $(M, \mathcal{A}, \mu)$ et on écrit $\xi_n \to \epsilon$, si pour toute partition finie η en ensembles mesurables de M et pour tout $\delta > 0$, il existe $N(\eta, \delta)$ tel que pour tout $n \geq N$, ξ_n δ-raffine η.

Toute tour d'un système dynamique (T, M, μ) peut être vue comme une partition partielle dont les atomes sont les étages de la tour. On dit que (T, M, μ) est de rang un, s'il existe une suite $\{\mathcal{T}\}_{n \in \mathbf{N}}$ de tours telle que $\mathcal{T}_n \to \epsilon$. On dit que (T, M, μ) est de rang $r \in \mathbf{N}$ s'il existe $\xi_n \to \epsilon$ avec cette fois-ci ξ_n une partition partielle regroupant les étages de r tours $\mathcal{T}_{1,n}, \ldots, \mathcal{T}_{r,n}$. Les transformations de rang un sont intensivement étudiées en théorie ergodique. Les translation minimales sur le tore sont de rang un mais il est également possible de construire des transformations de rang un qui sont mélangeantes grâce à la technique de découpage et d'empilement qu'on décrira ci-dessous. L'importance de la propriété de rang un dans la théorie spectrale des systèmes dynamiques provient du fait qu'une transformation de rang un a toujours un spectre simple. Ainsi les transformations (ou flots) de rang un et mélangeants constituent des candidats potentiels à avoir un spectre de Lebesgue simple.

2.10. Couplages. Une notion importante en théorie ergodique est celle de couplage : Etant donnés deux systèmes (T, M, μ) et (S, X, ν), un *couplage* de ces deux systèmes est le système produit $T \times S$ sur $M \times X$ muni d'une mesure invariante η qui se projète proprement de $M \times X$ par π_M et π_X sur les marges M et X : $\pi_{M*}\eta = \mu$, $\pi_{X*}\eta = \nu$.

Lorsqu'on considère les couplages de (T, M, μ) avec lui-même, il y a toujours au moins deux possibilités pour la mesure de couplage η, la mesure produit et la mesure diagonale. S'il n'y a pas d'autres possibilités on dit que le système a des *autocouplages minimaux.* On voit que c'est une propriété forte qui implique par exemple que seuls les itérés de T commutent avec T.

Par un théorème de King [Ki], tout système de rang un et mélangeant a des autocouplages minimaux.

2.11. Unique ergodicité. Par le théorème de Krylov-Bogoliubov, toute système topologique (T, M), M compact métrisable, admet une mesure de probabilité invariante. On dit que (T, M) est uniquement ergodique si l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par T est réduit à une seule mesure μ.

Théorème. *Si (T, M) est uniquement ergodique alors pour toute fonction continue φ les moyennes $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \varphi \circ T^i$ convergent uniformément vers $\int \varphi(x) d\mu(x)$ où μ est l'unique mesure invariante par T.*

Il est facile de voir que T est minimal sur le support de μ. Il est possible toutefois d'obtenir des systèmes uniquement ergodiques qui sont transitifs et non minimaux, en considérant par exemple un flot irrationel sur le tore fortement ralenti en un point d'arrêt afin que la seule mesure de probabilité invariante soit la mesure de Dirac en ce point, or tout point non situé sur la demi-orbite aboutissant en le point d'arrêt a une orbite dense.

II. CONSTRUCTIONS PRINCIPALES ET OUTILS

1. Reparamétrage de flots irrationnels.

Lorsqu'on reparamètre un flot préservant une mesure μ, seules les propriétés assymptotiques les plus robustes sont invariantes, telles la transitivité topologique, l'ergodicité, la minimalité ou l'annulation ou non de l'entropie topologique ou métrique. D'autres propriétés importantes comme celles du mélange, mélange topologique, mélange faible, multiplicité et type spectral sont, elles, sensibles aux reparamétrages.

Soit sur le tore $\mathbf{T}^d = \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^{\mathbf{d}}$ la translation $T_\alpha(x) = x + \alpha$. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_d, 1$ sont rationnellement indépendants, T_α est minimale et uniquement ergodique.

On définit le flot linéaire sur $\mathbf{T}^{d+1}$ par

$$\frac{dx}{dt} = \alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = 1,$$

où $x \in \mathbf{T}^d$ et $y \in \mathbf{T}^1$. On dénote ce flot par $R^t_{(\alpha,1)}$.

Le vecteur α est dit diophantien de classe $CD(\gamma, \sigma)$ s'il vérifie

$$\forall k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}, \quad \min_{l \in \mathbf{Z}} |\langle k, \alpha \rangle - l| \geq \frac{\gamma^{-1}}{\|k\|^\sigma}.$$

Un flot minimal $R_{t(\alpha,1)}$ avec α non diophantien est dit de type Liouville.

Étant donnée une fonction positive continue $\phi : \mathbf{T}^{d+1} \to \mathbf{R}^*_+$, on définit la reparamétrisation du flot linéaire par ϕ de la façon suivante

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{\phi(x,y)}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\phi(x,y)}.$$

Le reparamétrage des flots linéaires sur le tore peut être vu comme la perturbation la plus simple d'un système hamiltonien complètement intégrable. Une astuce élémentaire due à Poincaré permet de réaliser tout reparamétrage d'un flot linéaire comme dynamique sur un tore invariant d'un système hamiltonien.

Depuis que Kolmogorov en a lancé l'étude dans son adresse au congrès de l'I.C.M. à Amsterdam en 1954 [Ko1,Ko2], le sujet a connu beaucoup de progrès notamment par les travaux de Kolmogorov lui-même mais aussi par ceux d'Anosov, Arnol'd, Herman, Katok, Khanin, Kočergin, Shklover, Sinai, et d'autres.

Lorsqu'un flot possède une section globale, c'est à dire une variété de codimension 1 transverse au flot, le flot peut être représenté comme un flot spécial au-dessus l'application de retour de Poincaré sur cette section. Le reparamétrage du flot consiste alors à changer la fonction temps de retour à la section qu'on appelle la fonction toit du flot spécial. L'utilité de cette représentation dans l'étude des reparamétrages de flots de translations sera explicitée dans le paragraphe suivant.

2. Flots spéciaux.

2.1. Etant donné un système dynamique (T, M, μ) et une fonction $f \in L^1(\mathbf{T}^n)$, $f > c > 0$, le *flot spécial construit au-dessus de* (T, M, μ) *et sous la fonction* f est le flot quotient de l'action

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathbf{R} & \longrightarrow & M \times \mathbf{R} \\ (x, s) & \longrightarrow & (x, s+t) \end{array}$$

par la relation d'équivalence $(x, s + f(x)) \sim (Tx, s)$. Ce flot agit sur la variété $M_{T,f} = M \times \mathbf{R}/\sim$, et préserve la mesure produit de la mesure de Haar sur la base M avec la mesure unidimensionnelle de Lebesgue sur les fibres divisée par $\int_M f(x) d\mu(x)$.

La fonction f est appelée la fonction *toit* du flot spécial qu'on dénote $T^t_{T,f}$.

Par exemple, le flot de translation sur le tore $\mathbf{T}^{d+1}$ de vecteur de translation $(\alpha, 1)$, $\alpha \in \mathbf{T}^d$, peut être vu comme un flot spécial au-dessus de la translation R_α avec une fonction toit constante égale à un, c'est à dire comme $T^t_{R_\alpha,1}$.

Plus généralement toute reparamétrisation de $T^t_{R_\alpha,1}$ par une fonction de classe C^1 strictement positive $\frac{1}{\phi}$ peut être représenté comme un flot spécial au-dessus de R_α avec la fonction toit :

$$f(x) = \int_0^1 \phi(x + s\alpha, s) ds.$$

Réciproquement, étant donné un flot spécial $T^t_{R_\alpha,f}$ tel qu'il existe $\phi > 0$ de classe C^1 satisfaisant l'équation ci-dessus peut être obtenu par reparamétrage de $T^t_{R_\alpha,1}$ par la fonction $1/\phi$.

2.2. Isomorphisme et équation cohomologique linéaire. Si l'équation linéaire

$$\varphi(\theta) - \int_{\mathbf{T}^d} \varphi(z) dz = \chi(\theta) - \chi(\theta + \alpha), \tag{1}$$

a une solution χ mesurable, le flot spécial $T^t_{R_\alpha,\varphi}$ est isomorphe à un flot de suspension au-dessus de R_α, c'est à un flot de translation sur $\mathbf{T}^{d+1}$ de vecteur $(\gamma\alpha, \gamma)$, $\gamma = 1/\int \varphi$ (voir [Ko2] ou [KH]). Si la solution χ est un homéomorphisme ou un difféomorphisme de classe C^r, C^∞ ou analytique, l'isomorphisme est une conjugaison de même classe de régularité.

L'étude de l'équation (1) en utilisant les séries de Fourier montre alors que si α est un vecteur diophantien et la fonction toit est de classe C^∞, (1) a une solution de classe C^∞ et le flot spécial est donc C^∞-conjugué au flot linéaire $T^t_{R_\alpha,1}$ si on suppose pour normaliser que $\int \varphi = 1$. C'est ce qu'on appelle la rigidité sous reparamétrages des flots linéaires diophantien, une notion qu'on retrouve grâce à la théorie KAM dans d'autres situations non linéaires cette fois-ci.

Dans [He1] une étude systématique de (1) est menée afin d'établir les conditions optimales sur α suivant la classe de régularité de φ assurant l'existence de solutions dans différentes classes de régularité.

2.3. Valeurs propres et équation cohomologique multiplicative. On rappelle que $\lambda \in \mathbf{R}$ est une valeur propre pour un flot (T^t, M, μ) s'il existe f mesurable telle que $f(T^t x) = e^{2\pi i\lambda t} f(x)$ pour μ-presque tout x. Comme pour tout flot ergodique, les valeurs propres d'un flot linéaire minimal reparamétré forment un sous-groupe fermé de $\mathbf{R}$. Avec la représentation en flot spécial il est possible de caractériser les valeurs propres grâce à une équation cohomologique, similaire à l'équation (1) mais multiplicative cette fois, impliquant la fonction toit φ :

LEMME. *Un flot spécial au-dessus d'un système dynamique (T, M, μ) et sous une fonction φ a une valeur propre $\lambda \in \mathbf{R}^*$ si et seulement si la fonction $e^{2\pi i\lambda\varphi(x)}$ est cohomologue multiplicativement à 1, c'est-à-dire si et seulement si l'équation*

$$h(Tx) = e^{2\pi i\lambda\varphi(x)} h(x) \tag{2}$$

a une solution μ-mesurable non triviale.

Clairement lorsque l'équation linéaire $g(Tx) - g(x) = \varphi(x) - 1$ admet une solution mesurable l'équation multiplicative en a, précisemment pour $\lambda \in \mathbf{Z} + \mathbf{G}$, où G est le groupe de valeurs propres de (T, M, μ) (ce qui est consistant avec le fait que le flot spécial est dans ce cas isomorphe à un flot de suspension au-dessus de T). L'inverse n'est pas vrai et l'équation multiplicative peut avoir des solutions sans que l'équation linéaire n'en possède.

Par exemple, dans le cas d'une translation Liouville sur la base, il n'est pas exclu *a priori* que le reparamétrage soit isomorphe au flot original sans que l'équation (1) ait une solution. Pour cela il suffit que

$$h(x + \alpha) = e^{2\pi i\lambda\varphi(x)} h(x) \tag{3}$$

admette des solutions si et seulement si $\lambda \in \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\alpha$ et que les fonctions propres engendrent L^2_0 (qu'il n'y ait pas de partie continue dans le spectre).

L'étude de l'équation cohomologique multiplicative (3) a fait l'objet d'études intensives, comme par exemple dans [An], [8], [9] et [GP].

2.4. Inégalité de Denjoy et rigidité. Dans [K1], Katok a démontré que tout flot spécial de classe C^5 au-dessus d'une rotation irrationnelle du cercle a un spectre simple purement singulier. L'absence de mélange fut étendue par Kočergin aux flots spéciaux construits avec des fonctions à variation bornée (reparamétrage Lipschitz) [Koc1] avec une preuve élégante basée sur l'inégalité de Denjoy-Koksma : $|S_{q_n}\varphi(x) - q_n| \le C$, lorsque q_n est la suite des dénominateurs des réduites de α.

Lorsque la fonction toit est de classe C^1 l'inégalité de Denjoy peut être améliorée et on a $S_{q_n}\varphi(x) - q_n \to 0$ uniformément, ce qui implique la propriété de *rigidité* forte suivante : $T^{t_n}_{\alpha,\varphi} \to \mathrm{Id}$ dans la topologie unfiorme.

2.5. Étirement uniforme et propriétés de mélange. L'inégalité de Denjoy n'est pas valable lorsque la fonction toit a des singularités Kocergin a démontré qu'en introduisant des points d'arrêt dans un flot de translation minimal sur $\mathbf{T}^2$ le mélange devient possible grâce à un mécanisme de freinage au voisinage du point fixe. En terme de flot spécial, la fonction toit tend vers l'infini au voisinage du point de la section débouchant sur le point d'arrêt, et ses sommes de Birkhoff au-dessus de la rotation sur le cercle deviennent de plus en plus étirées ce qui entraîne le mélange puisque lorsque le temps tend vers l'infini l'image d'un ségment se découpe en un grand nombre de pièces presque verticales qui suivent sur la base la trajéctoire de la rotation irrationnelle et donc s'équirépartissent dans l'espace.

L'inégalité de Denjoy n'est pas valable non plus pour les sommes de fonctions, même analytiques, calculées au-dessus d'une translation irrationelle du tore $\mathbf{T}^d, d \geq 2$. En utilisant une construction faite par Yoccoz pour démontrer ce dernier fait, j'ai démontré dans [F1] qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R^3}$ et une fonction réelle analytique strictement positive ϕ définie sur $\mathbf{T}^3$ telle que le flot $R_{t\alpha}$ reparamétré avec ϕ est mélangeant (pour son unique mesure invariante $\frac{1}{\phi(x)}dx$).

Le mécanisme d'étirement uniforme est également utilisé dans [1], [2], et [7].

3. Produits croisés : extensions à des groupes compacts.

Etant donné un système dynamique (T, M, μ), un groupe compact G, et une application mesurable $h : M \to G$, on peut considérer la transformation

$$S_{T,h}(x, g) = (Tx, gh(x))$$

définie sur $M \times G$ et préservant la mesure de probabilité $\mu \times \lambda_G$ où λ_G est la mesure de Haar normalisée sur G. Si deux fonctions h_1 et h_2 satisfont à l'équation cohomologique

$$h_2(x) = \psi^{-1}(x)h_1(x)\psi(Tx)$$

avec une solution $\psi : M \to G$ mesurable, alors S_{T,h_1} et S_{T,h_2} sont isomorphes. Dans le cas où G est abélien cette équation s'écrit en notations additives : $h_2(x) = h_1(x) + \psi(Tx) - \psi(x)$. L'isomorphisme est donné par $(x, y) \mapsto (x, y + \psi(x))$.

Dans le cas abelien aussi, le problème de l'ergodicité et plus généralement celui des valeurs propres de $S_{T,h}$ se réduit à l'étude de l'équation cohomologique (2) de la façon suivante : on a

$$L^2(M \times G, \mu \times \lambda_G) = \oplus_{\chi \in G^*} H_\chi$$

avec G^* le groupe des charactères de G et $H_\chi = \{f(x)\chi(g) : f \in L^2(M, \mu)\}$. Cette décomposition est orthogonale et invariante sous l'action de l'opérateur spectral associé à $S_{T,h}$. Le problème des fonctions propres peut alors être étudier en restriction aux espaces H_χ. On abouti ainsi à l'équation

$$\chi(h(x))f(Tx) = f(x)$$

pour une fonction invariante $f(x)\chi(g) \in H_\chi$, et à l'équation

$$\chi(h(x))f(Tx) = \lambda f(x)$$

pour une fonction propre $f(x)\chi(g)$ correspondant à la valeur propre λ.

Dans le cas d'une translation irrationnelle T_α sur le tore $\mathbf{T}^d$, $d \geq 1$, et $G = \mathbf{T}^1$, l'ergodicité est donc équivalente à l'absence, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, de solution mesurable à l'équation cohomologique multiplicative

$$e^{i2n\pi h(x)} f(x+\alpha) = f(x).$$

Pour un vecteur de translation α diophantien on retrouve grâce à l'équation additive $h_2(x) = h_1(x) + \psi(x+\alpha) - \psi(x)$ le même résultat de rigidité que celui des flots spéciaux, à savoir que toute extension avec h de classe C^∞ est C^∞ conjuguée à un produit croisé avec une fonction contante.

Clairement, le même critère d'étirement uniforme impliquant le mélange faible pour les flots spéciaux (absence de solutions à (3)) prouve l'ergodicité de $S_{T_\alpha,h}$ pour h *générique* lorsque α est Liouville.

4. Produits croisés : Cascades cylindriques.

4.1. On peut considérer également des extensions de (T, M, μ) à des groupes non compacts, par exemple $\mathbf{R}$ ou plus généralement $\mathbf{R^p}$, $p \geq 1$. Les applications $S_{T,h}$, $h : M \to \mathbf{R^p}$, présèrvent dans ce cas la mesure infinie $\mu \times \lambda_{\mathbf{R^p}}$ où $\lambda_{\mathbf{R^p}}$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R^p}$.

Lorsque (T, M, μ) est ergodique, le fait que $\int_M h(x) d\mu(x) = 0$ est nécessaire et suffisant pour que $\mu \times \lambda_{\mathbf{R^p}}$-presque tout point de $M \times \mathbf{R^p}$ $S_{T,h}$ soit récurrent par $S_{T,h}$.

On dit qu'une transformation préservant une mesure infinie est ergodique si tout ensemble mesurable invariant a une mesure nulle ou si son complémentaire a une mesure nulle. Le théorème de Birkhoff n'est pas valable tel quel en mesure infinie mais l'ergodicité en mesure infinie a des implications non triviales, la plus simple probablement étant que presque tout point d'une transformation ergodique a une orbite dense.

Pour $T = R_\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, et $h : \mathbf{T} \to \mathbf{R}$, la transformation $S_{\alpha,h}$: $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + h(x))$ est appelée *cascade cylindrique.* Dans l'étude de l'ergodicité on retrouve alors la famille à un paramètre d'équations cohomologiques multiplicative (3) et le même phénomène d'étirement que pour les flots spéciaux conduit à la généricité de l'ergodicité lorsque α est Liouville. Les résultats de rigidité dans le cas diophantien eux aussi restent valables puisque l'équation impliquant l'isomorphisme est la même.

Un critère général utilisé pour établir l'ergodicité est celui de la valeur essentielle qui s'énonce ainsi :

PROPOSITION [Sch] *On dit que $a \in \mathbf{R^d}$ est une valeur essentielle pour $S_{T,h}$ si pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout ensemble mesurable $A \subset M$, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que*

$$\mu\left(T^{-n}A \cap A \cap \{x \in M \ / \ a - \epsilon \leq h(x) + \cdots + h(T^{n-1}x) \leq a + \epsilon\}\right) > 0.$$

Alors, l'ensemble $E(T, h)$ des valeurs essentielles est un sous-groupe fermé de $\mathbf{R^d}$ et $S_{T,h}$ est ergodique pour $\mu \times \lambda_{\mathbf{R^d}}$ si et seulement si $E(T, h) = \mathbf{R^d}$.

5. Constructions par conjugaisons successives.

5.1. Schéma général. Soit M une variété Riemannienne admettant une action non triviale du cercle $S_{t+1} = S_t$ et soit μ une forme volume de classe C^∞ préservée par l'action. Par moyennisation une telle forme existe toujours. Le schéma général d'une construction par conjugaisons successives à partir de l'action $\{S_t\}$ se présente ainsi :

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n, \quad \text{avec} \quad f_n = H_n \circ S_{\alpha_{n+1}} \circ H_n^{-1}, \tag{4}$$

où $\alpha_n = p_n/q_n$ est une suite convergente de rationnels et H_n est une suite de difféomorphismes de M. Chaque H_n est obtenu comme une composée

$$H_n = h_1 \circ \cdots \circ h_n, \tag{5}$$

de difféomorphismes h_n satisfaisant à

$$h_n \circ S_{\alpha_n} = S_{\alpha_n} \circ h_n. \tag{6}$$

A l'étape n, h_n est choisi de sorte que la conjugaison par h_n détord considérablement les orbites de l'action S_t, tout en s'assurant par la suite que $|\alpha_{n+1} - \alpha_n|$ est assez petit pour permettre à l'algorithme de converger (dans la topologie adoptée, C^r, $r \in \mathbf{N}$ ou $r = +\infty$). Dans le cadre conservatif, tous les h_n préservant μ, le schéma ci-dessus a d'abord été utilisé dans [AK] pour démontrer, entre autre, l'existence de difféomorphismes du disque $\mathbf{D^2}$ préservant l'aire ergodiques. Nous avons suivi ici l'exposition de [5].

Remarque : Que ce soit dans les produits croisés au-dessus des translations ou dans les reparamétrages de flots de translations, si les fonctions utilisées sont des polynômes trigonométriques, les systèmes se trouvent être analytiquement conjugués à des des translations, et la téchnique des conjugaisons successives peut donc être vue comme une généralisation *non linéaire* de ces constructions. Les succès de la téchnique dans le cadre réel analytique restent toutefois limités (voir [5]).

6. Constructions par découpage et empilement : cutt and stack.

La méthode la plus utilisée dans la construction d'exemples en théorie ergodique abstraite est celle dite de découpage et empilement ou *cutt and stack* en anglais. Par cette méthode, on construit inductivement des transformations de l'intervalle $[0, 1]$ qui préservent la mesure de Lebesgue de la façon suivante : à la fin de l'étape n, on trouve $[0, 1]$ divisé en deux ensembles, un ensemble $\mathcal{E}_n$ dont la mesure tend vers 0, et un ensemble $\mathcal{I}_n$ qui est le support d'un nombre fini de tours disjointes de T_n, chacune ayant des intervalles pour étages que T_n envoie isométriquement l'un sur celui audessus de lui. A l'étape n, T_n n'est pas défini sur les toits des tours de $\mathcal{I}_n$ ni sur $\mathcal{E}_n$. Pour passer à l'étape $n + 1$ on divise la base de chaque tour en plusieurs intervalles ce qui nous donne une plus grande collection de tours. Puis on rajoute "au-dessus" de chaque toit de ces tours un certain nombre d'*espaceurs* (en anglais *spacers*) pris dans $\mathcal{E}_n$, le nombre d'espaceurs utilisé dépend de la tour et peut être nul. Ceci nous laisse avec encore une nouvelle collection de tours qu'on manipule une dernière fois pour obtenir $\mathcal{I}_{n+1}$ en empilant certaines des tours les une sur les autres (opération possible entre des tours avec des bases de même longueur). Enfin, T_{n+1} envoie isométriquement les étages des tours de $\mathcal{I}_{n+1}$ sur ceux au-dessus d'eux et reste indéfini sur les toits.

7. Approximations périodiques.

Dans une série de papiers écrits vers la fin des années 60, Katok et Stepin ont introduit la notion de vitesse des approximations periodiques admises par un système différentiable et l'ont exploitée dans l'étude de différentes propriétés ergodiques et spectrales : différentes vitesses d'approximation impliquant différentes propriétés. Cet outil s'est avéré utile à la fois dans le cas de systèmes classiques où il était plus simple de calculer la vitesse d'approximation que d'étudier les propriétés ergodiques correspondantes dirèctement, mais aussi dans l'étude des propriétés génériques des systèmes dynamiques abstraits munis de la topologie faible.

Un cas particulier important est le suivant : on dit qu'un système (T, M, μ) admet de *bonnes approximations cycliques* s'il existe une suite ξ_{q_n} de partitions de (M, μ) en ensembles de mesure égale C_n^i, $i = 1, \ldots, q_n$, et des permutations cycliques S_{q_n} de ces ensembles telles que

$$\sum_{i=1}^{q_n} \mu(TC_{q_n}^i \triangle S_{q_n} C_{q_n}^i) = o(1/q_n).$$

On a que si T admet de bonnes appproximations cycliques, alors T est ergodique et rigide [KS].

Pour une exposition complète du concept d'approximations periodiques avec vitesses données et ses applications on réfère à [K3].

III. RÉALISATIONS DIFFÉRENTIABLES

1. Mélange lent et spectre singulier [1].

RÉSUMÉ. *Dans cet article, on étudie le problème de réalisation différentiable d'un système dynamique mélangeant dont le spectre est singulier par rapport à la mesure de Lebesgue. On introduit d'abord un critère abstrait, formulé en terme d'existence d'approximations periodiques localisées, qui implique la singularité du spectre. Ce critère est ensuite utilisé dans la construction de reparamétrages de classe C^∞ de flots linéaires sur le tore $\mathbf{T}^3$ qui sont mélangeants et ont un spectre purement singulier.*

1.1. Le mélange est une des propriétés les plus caractéristiques du comportement stochastique des systèmes dynamiques. Dans le cas des systèmes dynamiques différentiables les plus étudiés, le mélange se trouve en général impliqué par des propriétés plus fortes, telles que la propriété K ou la décroissance rapide des corrélations, qui s'accompagnent d'un spectre de Lebesgue pour l'opérateur unitaire associé.

Les seuls exemples de la littérature où le mélange s'accompagne d'un spectre singulier par rapport à la mesure de Lebesgue sont soit d'origine probabiliste, tels les processus gaussiens qui par nature n'appartiennent pas au domaine de la dynamique différentiable, soit sont obtenus par des constructions purement mesurables, telles les constructions de "cutt and stack" et plus précisément celles qui sont de rang un et mélangeantes, dont on ne connaît pas encore de réalisation de classe C^∞.

On dit que T a un spectre purement singulier si son type spectral maximal est singulier par rapport à la mesure de Lebesgue sur le cercle. Puisque tout type spectral qui est absolument continu par rapport au type spectral maximal apparaît comme le type d'une mesure spectrale σ_f d'une fonction $f \in L^2(M,\mu)$, T a un spectre purement singulier si et seulement si il n'y a aucune fonction $f \in L^2(M,\mu)$ dont la mesure spectrale est absolument continue.

Une propriété élémentaire qui implique la singularité du spectre d'un système (T,M,μ) est la *rigidité*, c'est à dire l'existence d'une suite $u_n \in \mathbf{N}$, telle que pour tout ensemble mesurable $A \subset M$ on a $\mu(T^{t_n}A \triangle A) \to 0$ où $A \triangle B$ dénote la différence symétrique des ensembles mesurables A et B. Pour les systèmes différentiables les plus étudiés où cette propriété apparaît, elle découle souvent d'une propriété plus forte, à savoir l'existence de *bonnes approximations cycliques* dans le sens de Katok et Stepin (voir paragraphe II.7).

La rigidié de (T, M, μ) est clairement incompatible avec la propriété de mélange. Afin d'obtenir un critère qui garantit la singularité du spectre sans exclure le mélange, on relaxe la condition de bonnes approximations cycliques et on la remplace par l'existence d'une suite de tours presque periodiques pour T (voir condition (ii) ci-dessous où la condition de presque periodicité est précisé et quantifiée) telles que tout ensemble mesurable peut être approché par une union d'étages pris dans une ou plusieurs tours à la fois. La mesure totale de chaque tour individuelle peut donc tendre vers 0 et ce concept d'approximations periodique *localisées* ne contredit donc pas *a priori* la propriété de mélange.

1.2. Critère pour un spectre purement singulier. Nous énonçons maintenant la définition des *approximations periodiques lentement coalescentes* introduite dans [1] et sa conséquence spectrale, puis nous expliquons brièvement comment on peut l'utiliser pour construire des flots différentiables mélangeants dont le spectre est purement singulier.

DÉFINITION. *[Approximations periodiques lentement coalescentes] Soit T une transformation ergodique d'une variété Riemannian M préservant un volume μ. On dit que le système dynamique (T, M, μ) a des approximations periodiques lentement coalescentes s'il existe une suite d'entiers non nuls k_n, et une suite ϵ_n de nombres strictement positifs satisfaisant $\sum \epsilon_n < +\infty$, telles que pour tout entier n il existe une suite*

$$\mathcal{C}_n = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_{n,i}$$

où les $B_{n,i}$, $i = 0, \ldots,$ sont des boules de M verifiant

(i) $\sup_{i \in \mathbf{N}} r(B_{n,i}) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0,$

(ii) $\mu\left(T^{k_n} B_{n,i} \triangle B_{n,i}\right) \leq \epsilon_n \mu(B_{n,i}),$

(iii) $\mu\left(\bigcap_{m \in \mathbf{N}} \bigcup_{n \geq m} \mathcal{C}_n\right) = 1.$

Cette définition fournit un critère pour la singularité du spectre de (T, M, μ) :

THÉORÈME. *Un système dynamique (T, M, μ) ayant des approxiamtions periodiques lentement coalescentes a un spectre purement singulier.*

Remarque 1 : En général, dans la définition ci-dessus $\mu(\mathcal{C}_n)$ ne converge pas nécessairement vers zéro. Une rotation du cercle, par exemple satisfait la définition avec des ensembles $\mathcal{C}_n$ dont la mesure converge au contraire vers 1. Mais lorsque le système en question est en plus mélangeant, (ii) implique $\mu(\mathcal{C}_n) \to 0$[3] et c'est à cela qu'on se réfère en parlant de *coalescence.* La

[3]Ce n'est pas vrai en général que que si (T, M, μ) est mélangeant et C_n est une suite d'ensemble mesurables telle que $T^{k_n} C_n \triangle C_n \to 0$ pour une suite $k_n \to \infty$ alors $\mu(C_n) \to 0$ or $\mu(C_n) \to 1$. Mais dans notre cas $\mathcal{C}_n$ est une union de boules avec des rayons convergeant uniformément vers 0, donc si $\limsup \mu(\mathcal{C}_n) \geq \epsilon > 0$ et si on fixe $p = [\frac{2}{\epsilon}]$ et une union disjointe d'ouvert de M, $M_1, \ldots, M_p$, d'égale mesure $1/p$, il y en aura au moins un (disons M_1) qui doit intersecter $\mathcal{C}_n$ pour une infinité d'entiers n en un ensemble de mesure plus

terminologie *lentement coalescents* se réfèrent alors à la propriété (iii) qui est la clef pour garantir la singularité du spectre.

Remarque 2 : La condition $\sum \epsilon_n < +\infty$ peut être vue comme une condition sur la *vitesse* des approximations periodiques localisées. Elle est cruciale dans la preuve du théorème.

Remarque 3 : Si les ensembles $\mathcal{C}_n$ satisfont à des conditions d'indépendance adéquates, (iii) suit par le lemme de Borel-Cantelli du fait que $\sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(\mathcal{C}_n) = +\infty$.

L'idée dans la preuve du théorème ci-dessus est d'utiliser (i)–(iii) pour démontrer que pour toute fonction non nulle $f \in H_0$, on peut trouver une suite strictement croissante $l_n \to \infty$ et un ensemble E de mesure positive sur lequel $\limsup 1/l_n|\sum_{i=0}^{l_n-1} f(T^{l_i}x)| > 0$, ce qui contredit l'existence d'une fonction $g \in H_0$ dont le spectre est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. La suite l_n est obtenue à partir des multiples de la suite k_n de (ii) et l'ensemble E de mesure positive est obtenu à partir des boules $B_{n,i}$ grâce à (iii).

1.3. Construction d'un exemple. Les flots mélangeants obtenus par reparamétrage de flots de translations appartiennent à une classe de systèmes lentement mélangeant (au sens de la décroissance des corrélations), qui inclu également les flots mélangeants avec des singularités construits sur les surfaces par Kočergin dans les années 70 pour lequels le type et la multiplicité spectraux restent inconnus.

En modifiant les reparamétrages de [F1, Theorem 1, Theorem 3], on peut maintenir le mélange tandis que le difféomorphisme temps-un du flot est forcé à vérifier le critère des approximations periodiques lentement coalescentes. On obtient ainsi

Théorème. *Soit $d \geq 3$, alors il existe $\alpha \in \mathbf{R^d}$ et une fonction strictement positive ϕ définie sur $\mathbf{T}^d$ de classe C^∞ tels que le flot reparamétré $T^t_{\alpha,\phi}$ est mélangeant et a un spectre purement singulier.*

1.4. Mélange d'ordre supérieur. Par le théorème de Host [Ho], un système mélangeant dont le spectre est purement singulier est automatiquement mélangeant de tout ordre. On obtient donc le corollaire suivant concernant les reparamétrages de flots irrationnels :

Corollaire. *Soit $d \geq 3$, alors il existe $\alpha \in \mathbf{R^d}$ et une fonction strictement positive ϕ définie sur $\mathbf{T}^d$ de classe C^∞ tels que le le reparamétrage du flot linéaire $R_{t\alpha}$ par ϕ est mélangeant de tout ordre.*

2. Mélange et rang un [2].

Résumé. *Dans cet article, nous construisons un flot spécial au-dessus d'une translation de $\mathbf{T}^2$ et sous une fonction de classe C^1 qui soit mélangeant et de*

grande que ϵ/p qui est presque une union de boules $B_{n,i}$ ce qui force $\limsup \mu(T^{k_n} M_1 \cap M_1) \geq \epsilon/p > \mu(M_1)^2$, en contradiction avec la propriété du mélange.

rang un. La construction repose sur un mélange entre une approche différentiable de la technique de "cutt and stack" et sur la technique d'étirement uniforme (voir section II). Il est possible d'obtenir par la même méthode des constructions de classe C^k pour tout $k \in \mathbf{N}$ quitte à choisir la translation sur un tore de dimension $k+1$.

Soit $\underline{T} = \{T^t\}_{t\in\mathbf{R}}$ un flot mesurable agissant sur un espace de Lebesgue $(M, \mathcal{A}, \mu)$. Soit $h > 0$. Une tour de Rokhlin de hauteur h pour le flot $\underline{T}$ est donnée par une application mesurable $f : U \to [0, h]$ où $U \in \mathcal{A}$ et $T^t(f^{-1}C) = f^{-1}(C + t)$ pour tout borelien $C \subset [0, h]$ tel que $C + t \subset [0, h]$.

On dit que le flot $\underline{T}$ est de *rang un* s'il existe une suite de tours de Rokhlin qui engendre la sigma algèbre $\mathcal{A}$, ou plus précisément, s'il existe une suite $\{h_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres positifs et une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de tours de Rokhlin de hauteur h_n telles que pour tout $A \in \mathcal{A}$ on peut trouver une suite de Boreliens $\{C_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $C_n \subset [0, h_n]$ telle que $\lim_{n\to\infty} \mu(A \triangle f_n^{-1}C_n) = 0$.

Les transformations ou flots qui sont de rang un et mélangeants possèdent de fortes propriétés ergodiques comme celles d'avoir des autocouplages minimaux ou d'être mélangeants de tous ordres. Ces systèmes ont un spectre simple et sont donc des candidats potentiels pour fournir des exemples de systèmes dynamiques dont le spectre est simple et de type Lebesgue. Aussi, leur étude est-elle très développée et très active en théorie ergodique.

Mais le peu d'exemples qui existent de telles transformations ou flots ont tous été produits dans le cadre abstrait de la théorie de la mesure en utilisant les méthodes de découpage et d'empilement (voir paragraphe II.6), à commencer par la construction probabiliste d'Ornstein où les espaceurs sont "tirés au hasard" [Or]. Depusi plusieurs versions deterministes (où les esapceurs sont choisis suivant une règle donnée) ont été obtenues.

En combinant les techniques d'étirement uniforme (voir paragraphe II.2.5) avec une approche différentiable de la technique de découpage et d'empilement pour les flots, j'obtiens le résultat suivant :

Théorème. *Il existe sur $\mathbf{T}^3$ des flots de classe C^1 qui sont de rang un et mélangeants.*

Les flots sont obtenus comme flots spéciaux au-dessus de tranlsations $R_{\alpha,\alpha'}$ de $\mathbf{T}^2$ choisies suivant [Y1] avec une hypothèse supplémentaire de primalité entre les réduites de α et α'. La propriété de rang un de la construction provient de l'existence d'une suite exhaustive de tours pour $R_{\alpha,\alpha'}$ sur $\mathbf{T}^2$ qu'on relève en une suite exhausitve de tours pour le flot en chosissant une fonction toit dont les sommes le long de chaque tour oscillent faiblement avant d'arriver vers la fin de la tour où elles *explosent* (pour éviter la rigidité et contribuer au mélange).

Le mécanisme de mélange alterne l'étirement uniforme des sommes de Birkhoff dans une des directions de la base avec des zones de temps où cet étirement est remplacé par un étirement sous forme d'escalier dans l'autre direction comme c'est le cas dans le *cut and stack*, ainsi que des zones de transitions où les deux mécanismes contribuent au mélange simultannément. Comme mentionné ci-dessus, le recours à l'étirement non uniforme est utilisé pour garantir la propriété de rang un. Le mélange dans le cas de l'étirement en escalier fait intervenir des moyennes de Birkhoff le long de suites de temps lacunaires dont on montre la convergence grâce aux temps de mélange obtenus à partir de l'étirement uniforme.

La fonction toit est construite comme sommes de fonctions chacune garantissant le mélange ou le mélange partiel sur une ou deux échelles de temps déterminées par les réduites successives de α et α'. L'étude de la combinatoire de $R_{\alpha,\alpha'}$ et le choix adéquat des tours à relever permet d'obtenir une construction lisse. Une approche semblable à celle adoptée dans [7] permet d'augmenter la régularité de la construction en dimension plus grande.

3. Reparamétrage de flots irrationels et équation cohomologique multiplicative au-dessus des rotations [8,9].

3.1. Spectre mixte [8].

Résumé. *Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ Liouville, on construit une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbf{T}, \mathbf{R})$ de moyenne nulle et telle que l'équation multiplicative (3) n'a de solution mesurable que pour $\lambda \in \mathbf{Z}\alpha$. On en déduit que le flot $T^t_{\alpha,\varphi+k}$, où $k \in \mathbf{N}$ est tel que $\varphi + k > 0$, a un groupe de valeurs propres engendré par un seul élément α ce qui implique que son spectre est mixte (il ne peut pas être ponctuel avec un seul générateur, sinon le flot serait isomorphe à un flot de translation sur le cercle et aurait une seule orbite). Sous une condition d'approximations periodiques plus forte on obteint également des constructions analytiques avec la même propriété.*

Pour un vecteur $\alpha \in \mathbf{R^d}$ Liouville, les reparamétrages du flot linéaire $R_{t\alpha}$ ont en général un spectre continu, c'est à dire que l'opérateur spectral qui leur est associé n'a pas d'autres fonctions propres que les constantes. Ceci correspond à la propriété de mélange faible. On peut préciser cette affirmation de deux façons différentes : 1) M. D. Šklover [S] a démontré que pour toute fonction réelle analytique $\varphi > 0$ définie sur le cercle et qui n'est pas un polynôme trigonométrique, l'ensemble des nombres $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que le flot spécial $T^t_{\alpha,\varphi}$ soit faiblement mélangeant est un G_δ dense dans $\mathbf{R}$. 2) Il a été démontré dans [F2] que pour tout vecteur liouvillien $\alpha \in \mathbf{R^d}$, $d \geq 1$, l'ensemble des fonctions φ telles que $T^t_{\alpha,\varphi}$ soit faiblement mélangeant forment un résiduel dans $C^\infty(\mathbf{T}^d, \mathbf{R}^*_+)$. Un résultat également optimal est vrai dans la classe des fonctions réelles analytiques dans une bande de largeur $\delta/(2\pi)$ lorsque α satisfait à $\liminf \|q_n\alpha\| e^{\delta q_n} \leq 1$.

Depuis que Kolmogorov a soulevé le problème du type spectral des reparamétrages de flots de translation sur le tore, on pensait que des restrictions devaient exister notamment dans le cas de reparamétrages analytiques (voir [Ko1,Ko2]), par exemple la conjecture faite par Kolmogorov (voir [Ko2] et l'appendice par Fomin à la version russe du livre de Halmos sur la théorie ergodique), que le type spectral du flot reparamétré par une fonction analytique devait être pure point ou bien continu. Nous démontrons dans [8] que ceci n'est pas le cas en construisant des exemples de reparamétrage avec spectre mixte.

THÉORÈME. *Pour tout $\alpha \in \mathbf{T}^1$ de type Liouville, il existe un ensemble dense de $\phi \in C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}^+)$ tel que le reparamétrage de $R_{t(\alpha,1)}$ par ϕ a un spectre mixte avec un groupe de valeurs propres engendré par un seul élément.*

Nous obtenons également des reparamétrages analytiques de $R_{t(\alpha,1)}$ avec un spectre mixte, lorsque α satisfait à $\liminf e^{q^5}\|q\alpha\| < +\infty$. Contrairement au cas C^∞ ou la condition α Liouville est optimale, la condition qu'on utilise dans le cas analytique n'est pas la condition optimale $\limsup -q^{-1}\ln\|q\alpha\| > 0$ qui lorsqu'elle n'est pas vérifiée, tout reparamétrage de $R_{t(\alpha,1)}$ par une fonction réelle analytique est analytiquement conjugué à un flot de translation. Dans leur étude systématique de l'équation cohomologique multiplicative, Guénais et Parreau se sont approchés de la condition arithmétique optimale en construisant des reparamétrages analytiques à spectres mixtes pour α tel que $\liminf -q_n/\ln(\|q_n\alpha\|) = 0$.

3.2. Un résultat de rigidité pour l'équation cohomologique multiplicative [9].

RÉSUMÉ. *Sous certaines conditions de régularité dans la décroissance des coéfficients de Fourier d'une fonction φ d'intégrale nulle définie sur le cercle, on démontre la dichotomie suivante : en fonction de $\alpha \in \mathbf{R}$, soit l'equation additive (1) admet une solution L_2, soit l'équation cohomologique multiplicative correspondante (3) n'a pas de solution mesurable. Il s'en suit qu'il existe une classe de fonctions réelles positives sur $\mathbf{T}$ (dont par exemple $\sum_{\mathbf{Z}} \cos(2k\pi x)/2^{|k|}$) telle que les flots spéciaux au-dessus de rotations construits avec une fonction de cette classe satisfont à une dichotomie spectrale suivant l'angle de la rotation sur la base : soit le spectre est continu, soit le flot est L^2-isomorphe à un flot linéaire de $\mathbf{T}^2$.*

Par rapport au problème de réalisation différentiable il est intéressant de savoir si avec plus de conditions de régularité sur les fonctions utilisées dans les reparamétrage on ne peut pas exclure le cas du spectre mixte.

La possibilité qu'une uniformité dans la décroissance des coéfficients de Fourier de la fonction toit puisse exclure le spectre mixte a été conjecturée par Katok (voir [K3]). Dans [K3] il est observé que sous la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} 2^{-|n|}\cos(2\pi n x)$$

le flot spécial $T^t_{\alpha,\varphi}$ est conjugué à un flot linéaire si α est tel que $\liminf 2^q\|q\alpha\| = 0$ est strictement supérieure à zéro, et qu'au contraire $T^t_{\alpha,\varphi}$ est faiblement mélangeant si α satisfait à $\liminf q2^q\|q\alpha\| = 0$.

La preuve du mélange faible est basée sur l'absence de solutions à l'équation (3) due à la bonne distribution sur $\mathbf{R}$ des sommes de Birkhoff $S_{m_n}\varphi$ au dessus de R_α pour une suite m_n vérifiant $\|m_n\alpha\| \to 0$, m_n étant un multiple d'un q_n pris le long de la suite vérifiant $\liminf q2^q\|q\alpha\| = 0$.

Pour combler le trou entre les deux conditions arithmétiques ci-dessus et prouver une dichotomie entre le spectre discret et pure point de $T^t_{\alpha,\varphi}$ en fonction de α, on considèrer la distribution de $S_{m_n}\varphi$ pour une suite m_n

vérifiant comme encore $\|m_n\alpha\| \to 0$ mais égale cette fois-ci à la somme de multiples de plusieurs q_n successifs réalisant $\liminf 2^q\|q\alpha\| = 0$.

Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, on utilise la régularité dans la décroissance des coéfficients de Fourier pour extraire de φ une fonction lacunaire $\tilde{\varphi}$ cohomologue à φ : $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) + h(x+\alpha) - h(x)$, pour une certaine fonction mesurable h. Dans cette fonction $\tilde{\varphi}$ il y a notamment les multiples des dénominateurs des approximations rationnelles de α. Si φ n'est pas L^2-cohomologue à une constante, on utilise le théorème central limite pour les séries lacunaires afin d'étudier la distribution des sommes de Birkhoff de $S_{m_n}\tilde{\varphi}$ et obtenir le mélange faible.

Notre résultat de rigidité peut être vu comme une version étendue à l'équation multiplicative du théorème de Herman [He4] concernant l'équation

$$\psi(x+\alpha) - \psi(x) = g(x)$$

avec g lacunaire, où il démontre que soit la solution ψ est L_2 soit il n'y a pas de solution mesurable du tout. Nous démontrons en effet que pour la fonction φ soit l'equation additive admet une solution L_2, soit l'équation cohomologique multiplicative (3) n'a de solution pour aucune valeur $\lambda \in \mathbf{R}^*$.

4. Constructions par conjugaisons successives [3,4,16].

Résumé. *Nous exposons dans cette section, deux nouveautés dans la technique de construction par conjugaisons successives. La première consiste en une version quantitative de la construction qui permet de contrôler le nombre de rotation obtenu à son aval, et la deuxième consiste en l'utilisation de "plusieurs fréquences" lorsque la variété admet en fait une action d'un tore multidimensionnel. Cette dernière permet de construire des difféomorphismes mélangeants, une propriété impossible à obtenir par la méthode classique. Comme application de la version quantitative nous obtenons pour tout nombre Liouville α des difféomorphismes conservatifs ergodiques du disque qui ont α comme nombre de rotation sur le bord. Une autre application est d'obtenir, pour tout nombre Liouville α, une réalisation différentiable non-standard de la rotation circulaire R_α.*

4.1. Versions quantitatives de la méthode d'approximation par conjugaisons successives [3], [16] et théorie KAM [15].

La fléxibilité de la méthode présenté au paragraphe II.5.1 tient surtout au fait que l'angle limite $\alpha = \lim \alpha_n$ est obtenu inductivement en même temps que les conjugaisons successives sont introduites : à l'étape n, α_n est donné et la conjugaison h_n est construite de sorte qu'elle commute avec S_{α_n}, puis α_{n+1} est choisi aussi proche de α_n que nécessaire pour assurer que $f_n = H_n \circ S_{\alpha_{n+1}} \circ H_n^{-1}$ est proche de f_{n-1} et donc la convergence de la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Il n'y a dans cette approche aucune restriction sur la croissance des normes C^r des H_n. En contrepartie, l'angle limite α admettera des approximations rationelles à une vitesse qu'on ne peut pas minorer.

Or ce nombre a une importance dynamique, et lorsqu'il s'agit de difféomorphismes construits par cette méthode sur le disque, $\alpha = \lim \alpha_n$ est entre autre le nombre de rotation du difféomorphisme limite restreint au bord du disque.

Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ on défini l'ensemble $\mathcal{A}_\alpha(M)$ comme l'adhérence dans la topologie C^∞ des difféomorphismes de M de la forme $h \circ S_\alpha \circ h^{-1}$. Mettant au point une version quantitative de la méthode de construction par conjugaisons successives nous démontrons dans [3] le résultat suivant qui étend celui de [AK] :

Théorème. Soit M une variété riemannienne de dimension $m \geq 2$ admettant une action non triviale du cercle $S_{t+1} = S_t$ et soit μ une forme volume de classe C^∞ préservée par l'action. Pour tout nombre $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ de type Liouville, l'ensemble des difféomorphismes faiblement mélangeants est un G^δ-dense (pour la topologie C^∞) dans $\mathcal{A}_\alpha(M)$.

En particulier, si on note $\mathcal{B}_\alpha(\mathbf{D^2})$ l'ensemble des difféomorphismes du disque préservant l'aire et dont le nombre de rotation sur le bord est α, on obtient :

Corollaire. *Pour tout α Liouville, il existe des difféomorphismes faiblement mélangeants dans $\mathcal{B}_\alpha(\mathbf{D^2})$.*

Ceci permet de clarifier les relatations entre les propriétés ergodiques des difféomorphismes préservant l'aire du disque et leur nombre de rotation sur le bord. Le corollaire complète le résultat suivant dû à Herman et dont une preuve est présentée dans [15].

Théorème (Herman) *Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ diophantien. Tout difféomorphisme $f \in \mathcal{B}_\alpha(\mathbf{D^2})$ possède un ensemble de mesure positive de courbes lisses invariantes qui accumulent le bord. En particulier f n'est pas ergodique, ni même topologiquement transitif.*

Le phénomène de non-ergodicité ci-dessus est un résultat classique de la théorie K.A.M. lorsque le difféomorphisme présente de la torsion au voisinage du bord. Le tour de force accomplit par Herman est d'obtenir le résultat sans hypothèse de torsion, seulement avec la propriété de préservation de l'aire.

En utilisant les conjugaisons successives et le théorème de Herman ensemble, nous obtenons dans [15] une famille à un paramètre $\{f_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ de difféomorphismes du disque telle que pour presque tout paramètre $\lambda \in [0, 1]$ f_λ a un nombre de rotation diophantien sur le bord et donc n'est pas ergodique tandis que l'ensemble des paramètres tels que f_λ est faiblement mélangeant est résiduel dans $[0, 1]$.

Le problème de réalisation différentiable a une version qu'on appelle problème de *réalisation non-standard* qui s'énonce ainsi :

Problème. *Étant donné un système dynamique naturel sur une variété M, par exemple une rotation R_α sur le cercle, peut-on trouver sur d'autres variétés des systèmes dynamiques différentiables qui lui sont isomorphes ?*

Dans un travail en cours [16], nous avons adapté avec Maria Saprykina et Alistair Windsor la construction faiblement mélangeante ci-dessus afin d'obtenir des réalisations différentiables, sur toute variétés admettant une action non triviale du cercle (tore, sphère, disque...), de toute rotation circulaire R_α de type Liouville.

Enfin, à la lumière de ce qui a été dit ci-dessus, un problème de réalisation différentiable suivant se pose naturellement :

Problème. *Existe-t-il des réalisations différentiables d'une rotation diophantienne du cercle autres que la rotation elle-même ?*

4.2. Approximation par conjugaisons successives à plusieurs fréquences [5].

Toutes les constructions par conjugaisons successives existantes, préservant l'aire ou non, sont rigides dans le sens où le difféomorphisme limite T satisfait $T^{q_n} \to \mathrm{Id}$ uniformément pour une certaine suite q_n.

En adaptant la méthode de construction par conjugaisons successives de [AK] à des variétés admettant des actions multidimensionnelles, il est possible de surmonter la contrainte de rigidité :

Théorème. *Soit M une variété possédant une action non triviale de $\mathbf{T}^3$, $S_{t+k} = S_t$, $k \in \mathbf{Z}^3$, préservant une mesure μ. Il existe $\alpha \in \mathbf{R}^3$ et une suite de difféomorphismses H_n préservant la mesure μ tels que $H_n^{-1} \circ S_{t\alpha} \circ H_n$ converge en topologie C^∞ vers un flot préservant μ mélangeant.*

Il devrait être possible d'appliquer les techniques de conjugaisons successives à plusieurs fréquences au cas des variétés admettant une action libre de $\mathbf{T}^2$ pour résoudre en particulier le problème ouvert suivant :

Problème. *Existe-t-il des difféomorphimses minimaux de $\mathbf{T}^2$ qui soient topologiquement mélangeants ? Présèrvant la mesure de Haar, uniquement ergodiques et mélangeants ?*

5. Liens entre propriétés ergodiques et topologiques [5,7].

Résumé. *Dans cette section on expose quelques constructions de systèmes différentiables où on insiste sur les divergences qui peuvent exister entre les propriétés topologiques et ergodiques requises simultanément.*

5.1. Un exemple classique est donné par les produits croisés de Furstenberg sur $\mathbf{T}^2$: $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \varphi(x))$ où α peut être choisi tel qu'il existe des fonctions φ réelles analytiques telles que le produit croisé soit minimal mais que la mesure de Lebesgue se décompose en un continuum de mesures ergodiques. Furstenberg a démontré que ceci a lieu si φ est un cobord métrique mais non continu au-dessus de R_α, et en utilisant les séries lacunaires il a construit de telle fonctions φ dès que α satisfait à $\liminf e^q \|q\alpha\| = 0$.

5.2. Attracteurs intermélés [7]. Dans [W], la méthode des conjugaisons successives est utilisée pour obtenir sur $\mathbf{T}^2$ des exemples de difféomorphismes de classe C^∞ préservant l'aire qui sont minimaux et ont exactement k composantes ergodiques, toutes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

Nous montrons en quelques lignes comment cette construction peut être utilisée pour répondre simplement à un problème posé par Milnor concernant l'existence de difféomorphismes ayant des attracteurs avec bassins intermêlés.

DÉFINITION [Mi]. *Etant donné une variété riemannienne (M, μ) et un difféomorphisme T sur M, on appelle un ensemble $A \subset M$ attracteur si l'ensemble $B(A) = \{x \in M / \omega(x) = A\}$ a une mesure positive (l'ensemble ω-limite de x étant l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite positive du point x). Deux ensemble de M, B et B', sont dits intermêlés si leur union est de mesure totale et si tout ouvert contient des points de densité de B et de B'. Enfin, on dit que T a deux attracteurs intermêlés A et A' si leur bassins respectifs $B(A)$ et $B(A')$ sont intermêlés.*

Soit T un difféomorphisme preservant l'aire de $\mathbf{T}^2$ minimal et avec exactement deux mesures invariantes ergodiques μ_1 et μ_2, absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit une fonction $\lambda \in C^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})$ de moyenne nulle par rapport à la mesure de Haar et ayant des moyennes distinctes suivants μ_1 et μ_2. Clairement $\int_{\mathbf{T}^2} \lambda(x) d\mu_1(x) \int_{\mathbf{T}^2} \lambda(x) d\mu_2(x) < 0$. Soit $\Lambda : \mathbf{T}^2 \to \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ la fonction matricielle diagonale avec $e^{\lambda(x)}$ et $e^{-\lambda(x)}$ sur la diagonale. Enfin, on définit sur $\mathbf{T}^2 \times P_1(\mathbf{R}^2)$, qu'on identifie à $\mathbf{T}^3$, le difféomorphisme fibré $F : (x, \theta) \mapsto (Tx, \Lambda(x)\theta)$. On aura alors

THÉORÈME. *F a deux attracteurs intermêlés : $\mathbf{T}^2 \times \{0\}$ et $\mathbf{T}^2 \times \{1/2\}$.*

La raison est que pour μ_1-p.t.p. $x \in \mathbf{T}^2$ on a $\omega(x, \theta) = \mathbf{T}^2 \times \{0\}$ pour tout $\theta \in \mathbf{T}$, tandis que pour μ_2-p.t.p. $x \in \mathbf{T}^2$ on a $\omega(x, \theta) = \mathbf{T}^2 \times \{1/2\}$ pour tout $\theta \in \mathbf{T}$. Le fait que les bassin soient intermêlés vient du fait que μ_1 et μ_2 sont equivalentes à la mesure de Lebesgue.

5.3. Mesures invariantes. Dans [FaHe], Fathi et Herman ont utilisé les constructions par conjugaisons successives pour démontrer l'existence, sur toute variété admettant une action libre du cercle, de difféomorphismes minimaux et uniquement ergodiques. Nous généralisons dans [5] ce résultat à des variétés admettant des actions du cercle qui ne sont pas libres. Dans le cas du disque par exemple, nous obtenons :

THÉORÈME. *Il existe un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbf{D^2}$ qui présèrve exactement trois mesures invariantes : l'aire, la mesure de Dirac au centre et la mesure de Haar sur le bord.*

Si on appelle $\mathcal{A}(M)$ l'adhérence dans la topologie C^∞ des difféomorphismes préservant l'aire de M de la forme $h \circ S_t \circ h^{-1}$, $t \in \mathbf{R}$, alors notre résultat, comme celui de [FaHe] est générique dans $\mathcal{A}(\mathbf{D^2})$.

5.4. Mesure des points d'orbite dense. Soit f une transformation d'un espace métrique complet séparable M. Soit $\phi_f \subset M$ l'ensemble des points de M qui ont une orbite dense par f, i.e.

$$\phi_f = \{x \in M \ / \ \overline{\{f^n(x)\}_{n \in \mathbf{Z}}} = M\}.$$

On rappelle que f est dite topologiquement transitive si $\phi_f \neq \emptyset$ et que dans ce cas ϕ_f forme automatiquement un G_δ-dense dans M. Lorsque M est une variété riemannienne munie d'un voume μ il est naturel de demander à quel point la mesure de ϕ_f peut être petite lorsque f est topologiquement transitive, surtout dans le cas de transformations f préservant le volume μ. Si f est ergodique, alors $\mu(\phi_f^c) = 0$; l'inverse n'étant pas toujours vrai, comme par exemple dans le cas des produits croisés de Furstenberg [Fu].

En utilisant une version appropriée des constructions par conjugaisons successives nous obtenons :

THÉORÈME [5]. *Soit M une variété riemannienne admettant une action non triviale du cercle $\mathbb{S} = \{S_t\}_{t\in\mathbf{R}}$, $S_{t+1} = S_t$ préservant un volume μ. Il existe $f \in \mathcal{A}(M)$ tel que f est topologiquement transitif et $\mu(\phi_f) = 0$. Qui plus est, f peut être choisi arbitrairement proche de l'identité dans la topologie C^∞.*

5.5. Ensembles minimaux. Une question naturelle en dynamique différentiable est de comprendre quelles propriétés topologiques (et métriques) peuvent avoir les ensembles minimaux d'un difféomorphisme (préservant la mesure). Sans prétendre à beaucoup d'originalité (voir [Han]) nous montrons dans [5] comment la méthode de conjugaisons successives peut s'adapter pour donner une réponse à deux questions posées par Fathi et Herman dans [FH] :

THÉORÈME. *Pour tout nombre $s \in [0, 1)$ et toute variété riemanienne M, il existe un difféomorphisme de classe C^∞ préservant une mesure μ provenant d'une forme volume sur M qui possède un ensemble minimal X dont la mesure est s et qui n'est pas localement homéomorphe au produit d'un Cantor et de $\mathbf{R}^\mathbf{p}$, $p \in \mathbf{N}$.*

Dans [5] également, nous discutons quelles sont les possibles propriétés topologiques des ensemble minimaux obtenus selon les différents choix des paramètre de la construction. Par exemple, en dimension 2, on peut obtenir des ensembles minimaux différents des pseudo-cercles obtenus par Handel puisqu'on peut garantir qu'ils contiennent des arcs topologiques. En dimension deux toujours, nous posons le problème inverse au problème posé dans [FaHe] :

PROBLÈME. *Est-ce qu'il y a un difféomorphisme du disque qui a un ensemble minimal localement homéomorphe au produit d'un ensemble de Cantor et de $\mathbf{R}$?*

En ce qui concerne les propriétés ergodiques de f sur l'ensemble minimal "exotique" X, la construction par conjugaison successive la plus basique donnerait des dynamiques uniquement ergodiques et isomorphes à la translation irrationnelle sur le cercle d'angle $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ comme dans [AK] mais d'autres variantes comme le mélange faible ou un nombre fini de mesure ergodiques sont possibles suivant les mêmes démarches de [AK] ou [W]. Le problème reste celui du mélange :

PROBLÈME. *Est-il possible pour un ensemble minimal d'un difféomorphisme d'une variété de dimension deux d'avoir une mesure invariante mélangeante ?*

Dans le cas d'un difféomorphisme minimal de $\mathbf{T}^2$ on retrouve le problème déjà soulevé dans la section III.4.2.

5.6. Spectre pure point et mélange topologique [7]. Dans l'esprit des problèmes de réalisation différentiable qu'on a discuté dans cette section, on peut mentionner la question soulevée dans [KaHa] :

PROBLÈME. *Existe-t-il des difféomorphismes de classes C^∞ d'une variété riemannienne préservant un volume (de classe C^∞) qui soient isomorphes à une rotation du cercle et topologiquement mélangeants ?*

On pense naturellement à des variétés M admettant une action du cercle et à des constructions par conjugaisons successives qui aboutissent à des rotations du point de vue métrique comme dans [AK] et [16] mais la difficulté provient encore une fois du fait que ces constructions sont par nature rigides.

On peut relaxer les conditions du problèmes de deux façons, en demandant d'un côté moins de régularité aux difféomorphismes et en acceptant de l'autre un isomorphisme à des translations du tore. On peut alors recourir aux reparamétrages de flots irrationels et obtenir

THÉORÈME. *Pour tout $r \in \mathbf{N}$, il existe $d \in \mathbf{N}$ et des flots de classe C^r sur $\mathbf{T}^d$ préservant la mesure de Haar qui sont topologiquement mélangeant et isomorphe à un flot de translation sur $\mathbf{T}^d$.*

L'idée dans la construction est de considérer un flot spécial au-dessus d'une translation $R_{\alpha_1,\ldots,\alpha_d}$, bien choisie afin d'assurer une alternance entre les dénominateurs des réduites des α_i, et au-dessous d'une fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{1\leq i\leq d} \varphi_i(x_i)$. Chaque fonction φ_i est choisie comme cobord mesurable au-dessus de R_{α_i}, mais vérifiant quand même une propriété d'étirement uniforme de ses sommes de Birkhoff $S_m\varphi_i$ lorsque $m \in \bigcup I_n^{(i)}$, où $I_n^{(i)}$ sont des intervalles de $\mathbf{N}$ entre les dénominateurs $q_n^{(i)}$ et $q_n^{(i+1)}$ des réduites successives de α_i. L'étirement a lieu au-dessus d'intervalles de mesure de plus en plus petite mais de mieux en mieux répartis sur le cercle. La taille des intervalles $I_n^{(i)}$ est soumise à la double contrainte de régularité C^r de φ_i et du fait que φ_i dopit être un cobord mesurable. Par ailleurs, le flot est topologiquement mélangeant lorsque $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{i\in[1,d]} I_n^{(i)} = \mathbf{N}$ et cette condition peut être assurée pourvu que $d \geq r \ln r$.

IV. APPROXIMATIONS PÉRIODIQUES ET EXPOSANTS DE LYAPUNOV

s, qu'ils présentent une croissance exponentielle des orbites périodiques,

1. Ergodicité locale [6].

Un résultat central dû à Pesin dans la théorie des systèmes non uniformément hyperboliques s'énonce ainsi : Si f préserve une mesure de densité régulière ν, et si tous les exposants de Lyapounov de f sont non nuls alors (f, ν) a un nombre dénombrable de composantes ergodiques sur chacune desquelles f est isomorphe (à permutation finie près) à un système de Bernoulli. La finitude de ces composantes pouvant être établie dans de nombreux cas notamment lorsqu'un contrôle est disponible sur la taille des variétés stables et instables locales. Des questions très naturelles se posent alors : Quand y a-t-il une seule composante ergodique ? S'il y en a plusieurs, comment sont-elles ? Doivent-elles être ouvertes (ergodicité locale) ou peuvent-elles toutes avoir une trace dans tout ouvert de l'espace ? Peut-on avoir f transitif mais non ergodique ?

Une façon d'obtenir des systèmes non uniformément hyperboliques est celle introduite dans [ShWi], qui consiste à perturber des systèmes partiellement hyperboliques afin de "créer" des exposants non nuls dans la direction centrale qui est à l'origine proche d'une isométrie. Pour obtenir des sytèmes non unifomément hyperboliques avec des propriétés nouvelles, il serait intéressant de considerer des sytèmes partiellement hyperboliques où dans la direction centrale la dynamique, même si elle est proche d'une isométrie, serait plus riche et plus complexe.

Ainsi en combinant les constructions liouvilliennes avec les méthodes de perturbation de [ShWi] citées ci-dessus, j'obtiens le résultat suivant qui répond à une question de [BDP] :

Théorème. *Il existe un difféomorphisme de classe C^∞ préservant la mesure de Haar sur le tore $\mathbf{T}^6$ qui a tous ses exposants de Lyapounov non nuls sur une composante ergodique ouverte et dense U dont la mesure peut être choisie arbitrairement petite.*

2. Généricité de l'exposant nul pour des cocycles à valeurs dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ qui ne sont pas uniformément hyperboliques [14].

Étant donné une application A d'une variété M à valeurs dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ et un système dynamique (T, M, μ) on considère le cocycle $F_{T,A} \colon X \times \mathbf{R^2} \to \mathbf{X} \times \mathbf{R^2}$ défini par $F_{T,A}(x, v) = (T(x), A(x)v)$. On dénote

$$A_T^n(x) = A(T^{n-1}(x)) \cdots A(T(x))A(x).$$

L'exposant de Lyapunov du cocycle (A, T) au point $x \in M$, donné par

$$\lambda(T, A, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_T^n(x)\|,$$

existe pour μ-presque tout $x \in M$. On note

$$\mathrm{LE}(A, T) = \int_M \lambda(T, A, x)\, d\mu(x).$$

Lorsque A est un "cocycle de Schrödinger avec un potentiel polynomial" défini sur le tore, i.e.

$$A_{\lambda,V}(\theta) = \begin{pmatrix} \lambda V(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbf{T}^d, \lambda \in \mathbf{R}$$

avec $V(\theta)$ polynôme trigonométrique, on sait d'après un célèbre résultat de Herman [He5] que si T est un difféomorphisme réel analytique dans une bande de largeur donnée, et si $|\lambda|$ est plus large qu'un certain $\lambda_0 > 0$ alors l'exposant de Lyapunov intégré par rapport à la mesure de Haar du cocycle $F_{T,A_{\lambda,V}}$ est minoré par une constante strictement positive. Les constructions liouvilliennes pourraient être utiles pour montrer l'absence d'un tel phénomène en classe C^∞.

Avec Jairo Bochi nous avons démontré que pour tout A de classe C^1 non uniformément hyperbolique (tel qu'il n'y ait pas de cône invariant par toutes les valeurs matricielles prises par A), la dynamique générique sur la base (en topologie faible avec un espace de Lebesgue (X, μ) pour base) a un exposant intégré nul. En topologie uniforme, nous avons le résultat suivant : étant donné $A : X \to \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ (avec $\dim(X) \geq 2$) et T un homéomorphisme de X préservant une mesure diffuse μ et tel qu'il existe un point periodique de T au-dessus duquel le produit des matrices du cocycle A est ellitpique, alors T peut être perturbé dans $\mathrm{Homeo}(X, \mu)$ afin de rendre l'exposant arbitrairement petit.

V. APPROXIMATIONS PÉRIODIQUES ET PROPRIÉTÉS ERGODIQUES

En plus de ce qu'on a vu dans la section précédente nous mentionnons ici quelques résultats qui montrent le rôle que joue l'arithmétique dans les propriétés ergodiques de certains systèmes dynamiques différentiables.

1. Ergodicité des sommes de Weyl [10].

Les sommes de Weyl $a_\theta(x,n) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i(k^2\theta+kx)}$, $\theta, x \in \mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ appraissent dans l'étude de la fonction elliptique $\sum z^{n^2}$. Ces sommes peuvent être générées par le produit croisé au-dessus de $T_\theta : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$, $T_\theta(x,y) = (x+\theta, y+2x+\theta)$, donné par $f_\theta : \mathbf{T}^2\times\mathbf{C} \to \mathbf{T}^2\times\mathbf{C}$, $f_\theta(x,y,z) = (T_\theta(x,y), z+e^{2\pi iy})$, puisque le n-ième itéré de f_θ s'écrit $f_\theta^n(x,y,z) = (T_\theta^n(x,y), z+e^{2\pi iy}a_\theta(2x,n))$.

Ces cocycles fournissent un exemple où la théorie ergodique permet d'obtenir des résultats plus simplement que par les méthodes d'*analyse dure*. Ainsi, le seul fait que T_θ est uniquement ergodique lorsque $\theta \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ implique que $a_\theta(x,n) = o(n)$ uniformément en $x \in \mathbf{T}$, une inégalité que Hardy et Littlewood obtiennent avec substantiellement plus de travail.

D'une façon plus significative, l'érgodicité de la mesure (infinie) de Lebesgue de $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{C}$ préservée par f_θ implique la densité dans $\mathbf{C}$ des sommes de Weyl $\{a_\theta(x,n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ pour un résiduel de mesure totale de $x \in \mathbf{T}$.

Dans [Fo2], la dynamique de f_θ est utilisée pour démontrer la densité des sommes de Weyl pour presque tout $x \in \mathbf{T}$ lorsque θ satisfait à

$$\liminf_{q\geq 1} q^{3+\epsilon}\|q\theta\| = 0$$

pour un certain $\epsilon > 0$ et que $\sum_{n\in\mathbf{N}} 1/a_n < +\infty$ où les a_n sont donnés par l'écriture en fraction continue de θ. On appelera cet ensemble de θ $\mathcal{F}$. Auparavant, Forrest avait démontré dans [Fo1] que f_θ est transitif pour θ tel que $\liminf q^{3/2}\|q\theta\| = 0$ (ce qui implique que l'ensemble des $x \in \mathbf{T}$ tels que les sommes $\{a_\theta(x,n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ soient denses est résiduel). Dans les deux papiers l'existence d'un seul θ pour lequel f_θ est ergodique a été posée et laissée ouverte.

En partant des techniques introduites dans [Fo2], nous obtenons :

Théorème. *Pour tout $\theta \in \mathcal{F}$, f_θ est ergodique.*

Soit $\tilde{\mathcal{F}}$ l'ensemble des $\theta \in \mathbf{T}$ tels que f_θ soit ergodique. Il suit d'un argument catégoriel classique en théorie ergodique que $\tilde{\mathcal{F}}$ est un ensemble G_δ. Puisque $\mathcal{F}$ est dense dans $\mathbf{T}$ et a une mesure de hausdorff positive on obtient :

Corollaire. *L'ensemble $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathbf{T}$ de θ tels que f_θ soit ergodique est un G_δ dense de mesure de Hausdorff positive.*

Ce corollaire est un renforcement du résultat de [Fo] puisqu'il implique

Corollaire. *Soit $\theta \in \tilde{\mathcal{F}}$. Alors l'ensemble*

$$B(\theta) = \{x \in \mathbf{T} : \sum_{k=0}^{n-1} e(k^2\theta + kx),\ n = 1, 2, \cdots, \textit{is dense in } \mathbf{C}\}$$

est un ensemble G_δ dense de mesure totale sur le cercle.

Enfin, il n'est pas exclu *a priori* que pour des θ mal approchés (de type constant par exemple), les sommes $a_\theta(x, n)$ puissent tendre uniformément en x vers l'infini.

2. Ergodicité des cascades logarithmiques.

Soit (M, x_t, ν) un système dynamique différentiable à temps continu qui possède une section globale (Σ, T, μ). Pour $\psi \in C^1(M, \mathbf{R})$ on considère le flot sur $M \times \mathbf{R}$ donné par le couplage de x_t avec l'equation différentielle sur $\mathbf{R}$:

$$\frac{dz}{dt} = \psi(x_t), \quad z \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Ce flot a la forme suivante :

$$(x_0, z_0) \mapsto (x_t, \int_0^t \psi(x_s)\, ds + z_0), \tag{8}$$

et a donc une section $\Sigma \times \mathbf{R}$, sur laquelle la dynamique s'écrit

$$(\theta, z) \to (T\theta, z + \varphi(\theta)), \tag{9}$$

avec $\varphi(\theta) = \int_0^t \psi(x_s)\, ds$, $t = t(\theta)$ le temps de premier retour de $x_0 = \theta$ à Σ.

Le flot (7) préserve la mesure $\nu \times \lambda$, où λ dénote la mesure de Lebesgue sur la droite. Lorsque (x_t, ν), ou d'une façon équivalente (T, μ), est ergodique, il est naturel de soulever le problème de l'ergodicité du flot donné par (7) pour la mesure $\nu \times \lambda$ qui est équivalent à l'ergodicité de $\mu \times \lambda$ par le produit croisé (9). En mesure infinie, l'ergodicité signifie qu'un ensemble mesurable invariant a une mesure nulle ou a son complémentaire de mesure nulle. On voit immédiatement qu'une condition nécessaire à l'ergodicité de (9) est que $\int_\Sigma \varphi(\theta) d\nu(\theta) = 0$.

On observe que x_t peut avoir des singularités isolées de type selle et avoir une section où l'application de premier retour est définie pour tous les points sauf pour les derniers points d'intersections de la section avec la variété stable d'une singularité. En plus, si ψ ne s'annule pas en une singularité donné alors la fonction φ dans (9) aura une asymptote infinie de type logarithmique au point correspondant où l'application de retour n'est pas définie.

Définition. *On dit qu'une fonction réelle φ définie sur $\mathbf{T}$ a une singularité logarithmique en un point x_0 si φ est de classe C^2 sur $\mathbf{T} \setminus \{x_0\}$ et s'il existe*

$A, B \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ *tels que*

$$\lim_{x \to x_0^-} \varphi''(x)(x - x_0)^2 = A,$$
$$\lim_{x \to x_0^+} \varphi''(x)(x - x_0)^2 = B.$$

On dit que cette singularité est asymétrique si $A + B \neq 0$.

Une singularité logarithmique asymétrique peut apparaître par exemple lorsque x_t est un flot de surface et a un point selle avec une connection de selle homocline (comme dans le cas de flots sur le tore donnés par un hamiltonien multi-valué $H(x, y) = ax + by + h(x, y)$, voir [Ar]).

Dans [9], on considère des produits croisés $S_{\alpha,\varphi}$ de la forme (9) avec T une rotation irrationnelle du cercle R_α, et on démontre que pour un ensemble de $\alpha \in [0, 1]$ de mesure totale, $S_{\alpha,\varphi}$ est ergodique pour toute fonction φ avec une singularité logarithmique, pourvu que $\int_{\mathbf{T}} \varphi(\theta) d\theta = 0$.

Etroitement relié à $S_{\alpha,\varphi}$, il y a les flots spéciaux construits au-dessus de R_α et sous $\varphi + c$ où $c \in \mathbf{R}$ est un nombre arbitraire tel que $\varphi + c > 0$.

Lorsque φ n'a que des singularités logarithmiques symétriques, le flot special n'est pas mélangeant et il est facile de vérifier le critère de la valeur essentielle pour φ au-dessus de R_α qui est équivalent à l'ergodicité de $S_{\alpha,\varphi}$.

Mais lorsque φ a une singularité logarithmique asymétrique, le flot spécial associé est mélangeant [KhSi,Koc3] et la technique usuelle pour établir le critère de la valeur essentielle n'est plus valable car les sommes de Birkhoff de φ au-dessus de R_α sont concentrées à l'infini. Nos cascades sont les premiers exemples en effet de cascades ergodiques dont les flots associés sont mélangeants.

Plus précisément, étant donné un réel a et $\epsilon > 0$, le problème est que si on considère une suite q_n telle que $\|q_n\alpha\| \to 0$, les ensembles $A_n(a, \epsilon) = \{x \in \mathbf{T} \ / \ S_{q_n}\varphi(x) \in [a-\epsilon, a+\epsilon]\}$ sont d'autant plus petits que α est Liouville (les effets de moyennisation sont plus faible et l'asymétrie de la singularité pèse plus sur les sommes de Birkhoff). Or pour que a soit une valeur essentielle il faut au moins qu'il y ait une suite q_n telle que presque tout point du cercle appartienne à une infinité des A_n. Ceci nous pousse à adopter une condition de type diophantien sur α qui nous force en contrepartie à renoncer à avoir $R_\alpha^{q_n} I_n \cap I_n \neq \emptyset$ où I_n est une composante connexe de A_n, ce qui aurait permis d'obtenir le critère de valeur essentielle par la méthode usuelle. En échange, nous devons travailler pour trouver à l'interieur de n'importe quel ensemble mesurable $C \subset \mathbf{T}$ des points d'une composante connexe de A_n et d'une composante de $R_\alpha^{q_n}(A_n)$. La nouveauté est que la deuxième n'est pas l'image de la première et qu'il faut considérer une infinité de n pour les obtenir. Ceci passe par une étude fine des ensemble A_n et $R_\alpha^{q_n}(A_n)$ et par l'application d'une version généralisée du lemme de Borel-Cantelli.

3. Propriété de la cible monotonement rétrécissante : *Monotone shrinking target property* [4].

Pour finir nous énonçons un résultat reliant une propriété ergodique à une propriété arithmétique du vecteur d'une translation sur le tore.

DÉFINITION. On dit qu'un système (T, M, μ) d'une variété riemannienne M a la *propriété de la cible monotonement rétrécissante (monotone shrinking target property)* si pour toute suite décroissante de boules $\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de même centre, telle que $\sum \mu(B_n) = +\infty$, on a que μ-presque tout point $x \in M$ vérifie $T^n(x) \in B_n$ pour une infinité d'entiers n.

L'origine de cette définition se trouve dans la théorie des approximations diophantiennes. Kleinbock et Margulis on étudié dans [KM] la proprité de la cible rétrécissante pour les flots géodésique sur les espaces homogènes lorsque la cible est placée à l'infini, ce qui leur a permis d'obtenir des lois logarithmiques pour le flot géodésique et des applications aux approximations diophantiennes.

D'un point de vue dynamique, on voit par différentes versions du Lemme de Borel-Cantelli, que si les ensembles $T^{-n}B_n$ satisfont à certaines conditions d'indépendance alors la condition de la définition sera satisfaite. Ainsi, la propriété de la cible rétrécissante peut être utilisée pour mesurer la stochasticité du système (T, M, μ). En général cette propriété est dérivée de la décroissance exponentielle des corrélations (comme dans [KM]) mais on montre qu'il existe des modèles différentiables qui possède cette propriété sans être mélangeants et d'autres qui ne la possèdent pas et qui sont mélangeants.

On prouve dans [4] le résultat suivant :

THÉORÈME. *Si M est le tore $\mathbf{T}^d$, $d \geq 1$, muni de sa mesure de Haar μ, la translation de vecteur $\alpha \in \mathbf{R^d}$ a la propriété de la cible monotonement rétrécissante si et seulement si α est un vecteur de type constant.*

On rappelle que $\alpha \in \mathbf{R^d}$ est dit de type constant s'il existe une constante C telle que $|k|^d \|(k, \alpha)\| \geq C$ pour tout $k \in \mathbf{Z^d}$, avec $|k| = sup_{i\leq d}|k_i|$ et $(k, \alpha) = \sum_{i=1}^d k_i\alpha_i$.

A titre de comparaison, on démontre en utilisant des flots spéciaux audessus de translations liouvilliennes qu'il existe des flots analytiques mélangeants du tore qui n'ont pas la propriété de la cible monotonement décroissante.

RÉFÉRENCES

[An] D. V. Anosov, The additive functional homology equation that is connected with an ergodic rotation of the circles, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya, **37**, (1973), p. 1259–1274.

[AnAr] D. V. Anosov, S. Kh. Aranson, V. I. Arnold, I. U. Bronshtein, V. Z. Grines, and Y. S. Ilyashenko, Ordinary differential equations and smooth dynamical systems, *Dynamical systems. I*, Encyclopaedia Math. Sci., 1, Springer, Berlin, 1988.

[AK] D.V. Anosov and A.B. Katok, New examples in smooth ergodic theory. Ergodic diffeomorphisms, Trans. Moscow Math. Soc. 23 (1970), 1-35.

[Ar] V. I. Arnol'd, Topological and ergodic properties of closed 1-forms with incommensurable periods, Funktsional. Anal. i Prilozhen, **25**, (1991), p. 1–12.

[B] J. Bochi, Genericity of zero Lyapunov exponents. Ergod. Th. Dynam. Sys., 22 (2002), p. 1667–1696.

[BV] J. Bochi, M. Viana, The Lyapunov exponents of generic volume preserving and symplectic maps, Annals of Math., à paraître.

[Bo] J. Bourgain, On the spectral type of Ornstein's class one transformations. Israel J. Math., **84**, (1993), p. 53–63.

[CFS] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, Ya.G. Sinai, Ergodic Theory. Springer-Verlag, New York, 1982.

[F1] B. Fayad, Analytic mixing reparametrizations of irrational flows, Ergodic Theory Dynam. Systems, volume **22**, (2002), p. 437–468.

[F2] B. Fayad, Weak mixing for reparametrized linear flows on the torus, Ergodic Theory and Dynam. Systems, volume **22**, (2002), p. 187–201.

[F3] B. Fayad, Polynomial decay of correlations for a class of smooth flows on the two torus, Bull. Soc. Math. France tome 129 (2001), no. 4, 487–503.

[F4] B. Fayad, Topologically mixing and minimal but not ergodic, analytic transformation on $\mathbf{T}^5$, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), volume 31 (2000), no. 3, 277–285.

[F5] B. Fayad, Partially mixing and locally rank 1 smooth transformations and flows on the torus $\mathbf{T}^d, d \geq 3$, J. London Math. Soc., volume **64**, (2001), p. 637–654.

[F6] B. Fayad, Skew products over translations on $\mathbf{T}^d, d \geq 2$, Proc. Amer. Math. Soc., volume 130 (2002), no. 1, 103–109.

[FaHe] A. Fathi and M.R. Herman Existence de difféomorphismes minimaux. Dynamical systems, Vol. I—Warsaw, pp. 37–59. Astérisque, No. 49, Soc. Math. France, Paris, 1977.

[Fo] A. Forrest, Symmetric cocycles and classical exponential sums, Colloquium Mathematicum **84/85** (2000), 125–145.

[Fu] H. Furstenberg, Strict ergodicity and transformation of the torus. Amer. J. Math. **83**, (1961), 573–601.

[GP] M. Guenais and F. Parreau, *Valeurs propres de transformations liées aux rotations irrationnelles et aux fonctions en escalier*, Preprint.

[H] P. R. Halmos. Lectures on Ergodic Theory. The Mathematical Society of Japan, 1956.

[Han] M. Handel, A pathological area preserving C^∞ diffeomorphism of the plane. Proc. Amer. Math. Soc. 86 (1982), no. 1, p. 163–168.

[HK] B. Hasselblatt and A. Katok, Principal structures, Handbook in Dynamical Systems, vol 1A Elsevier, 2002, p. 1–203.

[He1] M. R. Herman, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **49**, (1979).

[He2] M. Herman, Construction of some curious diffeomorphisms of the Riemann sphere. J. London Math. Soc. (2) 34 (1986), no. 2, p. 375–384.

[He3] M. Herman, On the dynamics of Lagrangian tori invariant by symplectic diffeomorphisms. Progress in variational methods in Hamiltonian systems and elliptic equations (L'Aquila, 1990), 92–112, Pitman Res. Notes Math. Ser., 243, Longman Sci. Tech., Harlow, 1992.

[He4] M. Herman, L^2 regularity of measurable solutions of a finite-difference equation of the circle, Erg. theory Dynam. Systems, **24** (2004), p. 1277–1281.

[He5] M. Herman, Une méthode pour minorer les exposants de Lyapunov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnol'd et de Moser sur le tore de dimension 2, Comment. Math. Helvetici, **58** (1983), p. 453–502.

[Ho] B. Host, *Mixing of all orders and pairwise independent joinings of systems with singular spectrum*, Israel J. Math. **76** (1991), p. 289–298.

[K1] A. B. Katok, Spectral properties of dynamicals systems with an interval invariant on the torus. Dokl. Akad. Nauk SSSR, **223**, (1975), p. 789–792.

[K2] A. B. Katok, Time change, monotone equivalence, and standard dynamical systems, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **223**, (1975), p. 789–792.

[K3] A. B. Katok, Combinatorial constructions in ergodic theory and dynamics, Univ. Lect. Series, Vol. 30, AMS, Providence R.I., 2003.

[KH] A. B. Katok and B. Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[KS] A. B. Katok and A.M. Stepin, Approximations in ergodic theory, Russian Math. Surveys, 22, No.5 (1967), p. 77-102.

[KT] A. B. Katok and J.-P. Thouvenot, Spectral properties and combinatorial constructions in ergodic theory, Handbook in Dynamical Systems, vol 1B Elsevier, 2006, p. 649–743.

[KhSi] K. Khanin and Y. Sinai, Mixing for some class of special flows over rotations of the circle, Funkts. Anl. Prilozhen., **26**, (1992), p. 155–169.

[Ki] J. King, Joining rank and the structure of finite rank mixing transformations, J. Analyse Math., **56** (1991), p. 211–230.

[KM] D. Kleinbock and G. Margulis, Logarithm laws for flows on homogeneous spaces, Inv. Math. **138** (1999), p. 451–494.

[Koc1] A. Kočergin, The absence of mixing in special flows over a rotation of the circle and in flows on a two-dimensional torus, Dokl. Akad. Nauk SSSR, volume **205**, (1972), p. 515–518.

[Koc2] A. Kočergin, Mixing in special flows over a rearrangement of segments and in smooth flows on surfaces, Mat. USSR Sbornik, volume **25**, (1975), p. 471–502.

[Koc3] A.V. Kočergin, Nonsingular saddle points and mixing in flows on two dimensional points, Mat. Sb. **194** (2003), 83-112.

[Ko1] A. N. Kolmogorov, Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam 1954, volume **1**, (1957), p. 315–333.

[Ko2] A. N. Kolmogorov, On dynamical systems with an integral invariant on the torus, Doklady Akad. Nauk SSSR, volume **93**, (1953), p. 763–766.

[Mi] J. Milnor, On the concept of attractor, Comm. Math. Phys., **102** (1985), p. 517–519.

[MS] M. Mentzen et A. Siemaszko, Cylinder cocylce extension of minimal rotations on monothetic groups, Collq. Math., **101** (2004), p. 75–88.

[Or] D. S. Ornstein, On the root problem in ergodic theory, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (1970/1971), Vol. II : Probability theory, Univ. Cal. Press, (1972), p. 347–356.

[OU] J. C. Oxtoby, S. M. Ulam, Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity. Annals of Math., **42** (1941), p. 874–920.

[Pa] W. Parry, Topics in ergodic theory, Cambridge Tracts in Math., Vol. 75, Cambridge University Press, Cambridge 1981.

[PM1] R. Perez-Marco, Sur les dynamiques holomorphes non linéarisable et une conjecture de V. I. Arnol'd. (French) Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 26 (1993), no. 5, 565–644.

[PM2] R. Perez-Marco, Nonlinearizable holomorphic dynamics having an uncountable number of symmetries. Invent. Math. 119 (1995), no. 1, 67–127.

[R] V. A. Rokhlin, On the fundamental ideas of measure theory, Transl. Amer. Math. Soc., (1) **10** (1962), 1–52.

[ShWi] M. Shub and A. Wilkinson, Pathological foliations and removable zero exponents, Invent. Math. 139 (2000), 495-508.

[S] M. D. Shklover, On dynamical systems on the torus with continuous spectrum , Izv. Vuzov, **10**, (1967), p. 113–124.

[Sch] K. Schmidt, Cocycles of Ergodic Transformation Groups, Lect. Notes in Math. **1**, Mac Millan Co. of India, 1977.

[Si] Y. G. Sinaĭ, Spectral properties of ergodic dynamical systems, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **150**, (1963), p. 1235–1237.

[W] A. Windsor, Minimal but not uniquely ergodic diffeomorphisms. Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999), 809–824, Proc. Sympos. Pure Math., 69, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[Y1] J.-C.Yoccoz, Petits diviseurs en dimension 1. Astérisque, 231 (1995).

[Y2] J.-C. Yoccoz, Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. (French) Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 17 (1984), no. 3, 333–359.

[Y3] J.-C. Yoccoz, Analytic linearization of circle diffeomorphisms. Dynamical systems and small divisors (Cetraro, 1998), Lecture Notes in Math., 1784, Springer, Berlin, 2002, 125–173.

[Y4] J.-C. Yoccoz, Travaux de Herman sur les tores invariants, Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92, Astérisque, **206**, (1992), p. 311–344.