

ÉTUDE DE MODÈLES À SURFACE LIBRE AVEC TRANSPORT DE SÉDIMENTS

Saida Sari*, Fayssal Benkhaldoun*

* LAGA, Université Paris 13, 99 Av J.B. Clement, 93430 Villetaneuse, France



Introduction

Le transport des sédiments est un phénomène qui joue une importance capitale en milieu fluvial, comme en milieu maritime. L'étude de ce phénomène permettra une meilleure compréhension de manifestations naturelles telles que l'ensablement des ports et lagunes, ou l'érosion des zones côtières, et des berges de fleuves.



Objectifs

Le but de ce travail est de réaliser une simulation numérique du phénomène de transport des sédiments, avec prise en compte des effets d'érosion et de déposition. Cette simulation est effectuée à l'aide d'un schéma de type prédicteur correcteur basé sur le signe de la jacobienne, adossé à un fractionnement d'opérateurs pour le traitement des termes sources. Une comparaison avec d'autres schémas est présentée.

Équations de transport de sédiments en 1-D

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = \frac{E_{erosion} - D_{deposition}}{1-p} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) = gh \left(-\frac{\partial z}{\partial x} - S_f \right) - \frac{(\rho_s - \rho_w)gh^2 \partial c}{2\rho} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{(\rho_0 - \rho)(E - D)u}{\rho(1-p)} \quad (1b)$$

$$\frac{\partial(hc)}{\partial t} + \frac{\partial(huc)}{\partial x} = E - D \quad (1c)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + A\xi \frac{\partial u^3}{\partial x} = -\frac{E - D}{1-p} \quad (1d)$$

Écriture matricielle

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial x} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \mathbf{S} \quad (2)$$

avec

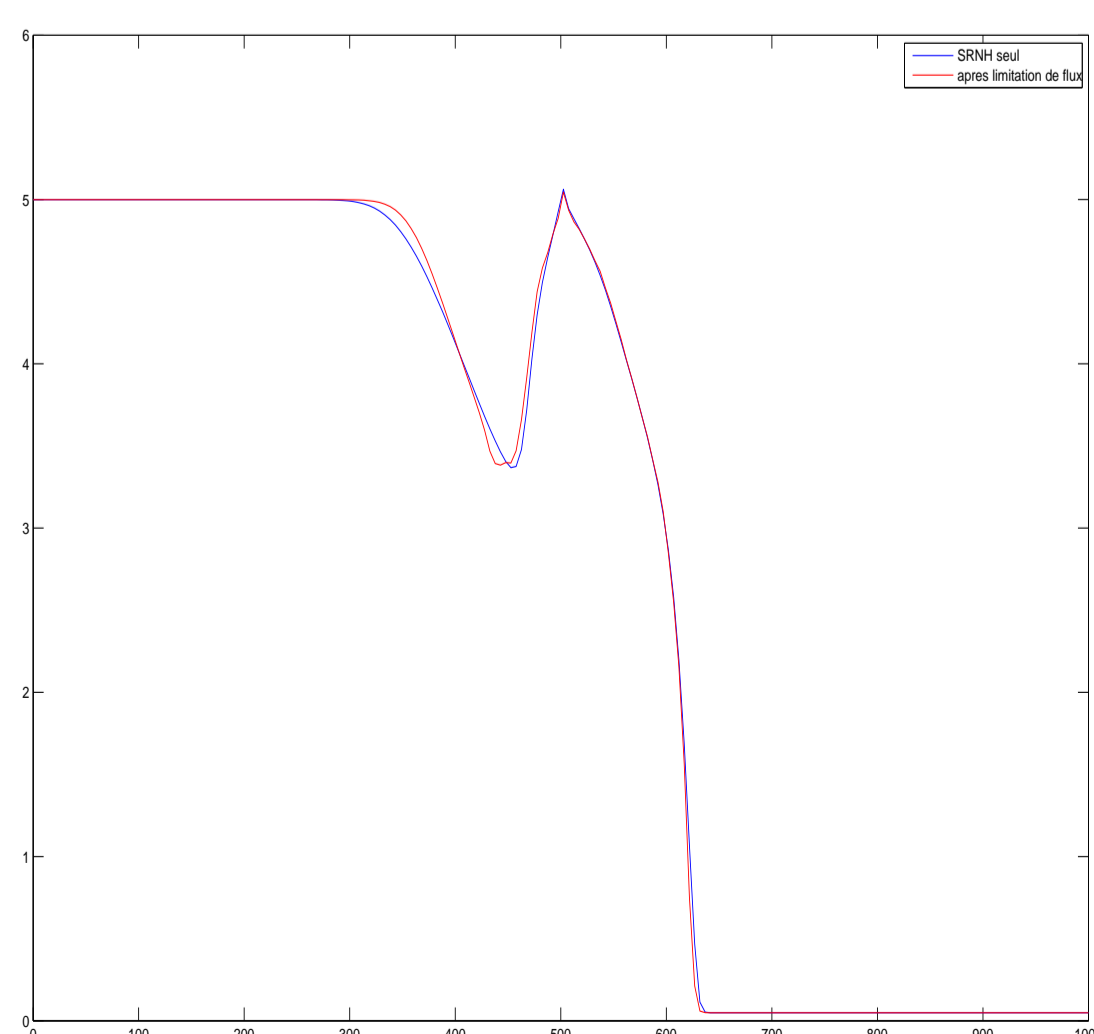
$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hc \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huc \\ A\xi u^3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{(\rho_s - \rho_w)gh^2 \partial c}{2\rho} \frac{\partial c}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \frac{E - D}{1-p} \\ -ghS_f - \frac{(\rho_0 - \rho)(E - D)u}{\rho(1-p)} \\ \frac{E - D}{1-p} \\ \frac{E - D}{1-p} \end{pmatrix}$$

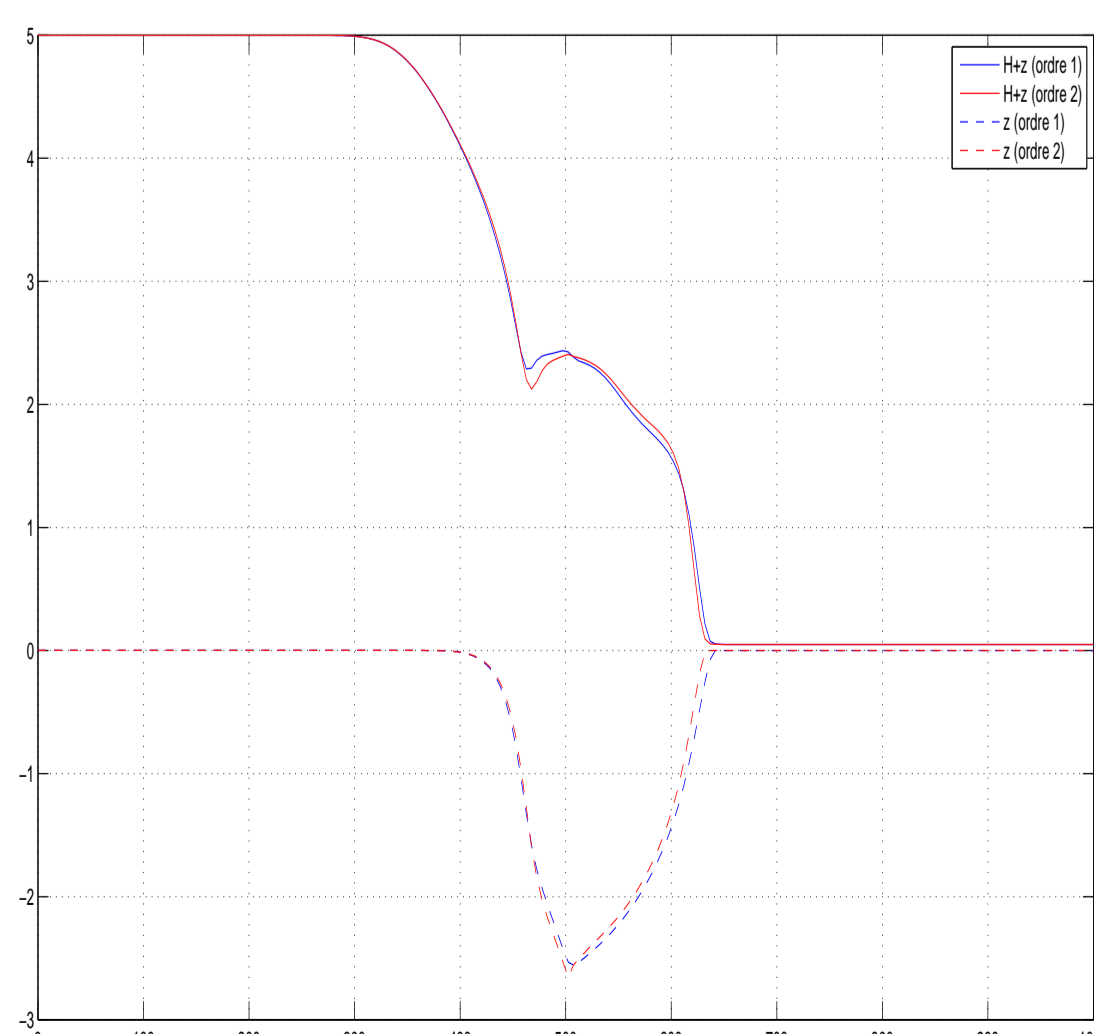
Passage au second ordre :

- Diminution de la diffusion numérique, ordre 2 avec limitation de flux,
- flux d'ordre 2 (Lax-Wendroff),
- flux d'ordre 1 (SRNH),

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi_{i+\frac{1}{2}}^{O2} - (1 - \ell_i)(\phi_{i+\frac{1}{2}}^{O2} - \phi_{i+\frac{1}{2}}^{O1})$$



Altitude de l'eau avant (en bleu) et après (en rouge) limitation de flux.



Surface libre et érosion du fond avant (en bleu) et après (en rouge) limitation de flux.

Schéma SRNH

- étape prédicteur

$$W_i^* = W_i^n + \Delta t S_{2i}(W_i^n) \quad (\text{splitting}) \quad (3)$$

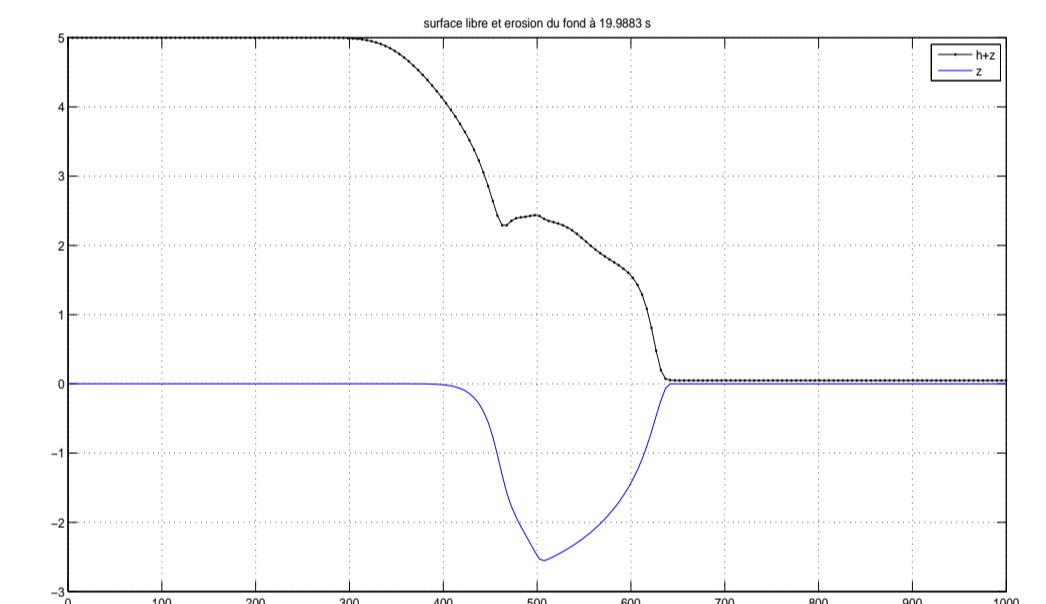
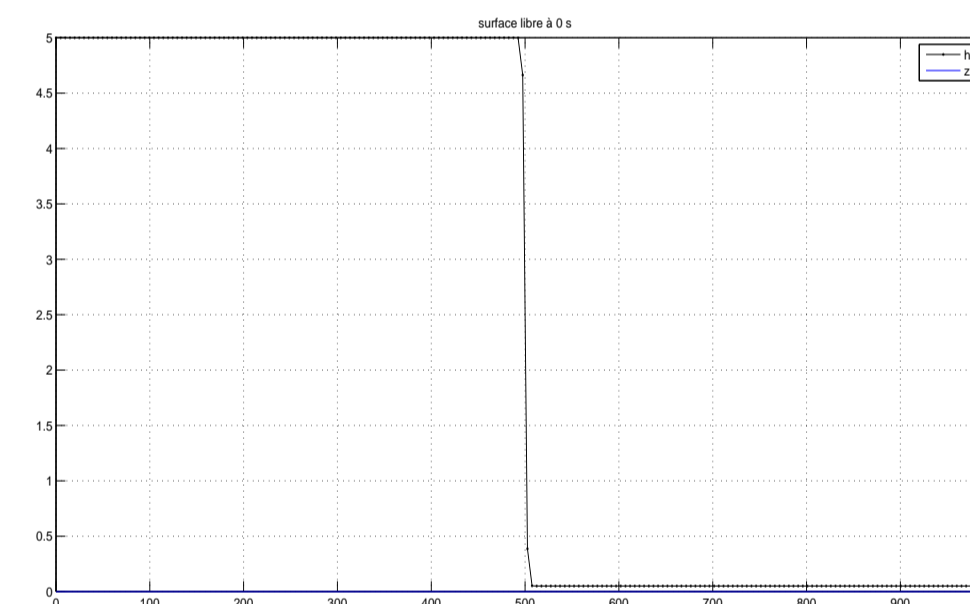
$$W_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{W_i^* + W_{i+1}^*}{2} - \frac{1}{2} \text{sign} \left(\mathcal{B} \left(v(W_i^*, W_{i+1}^*) \right) \right) (W_{i+1}^* - W_i^*), \quad (4)$$

- étape correcteur

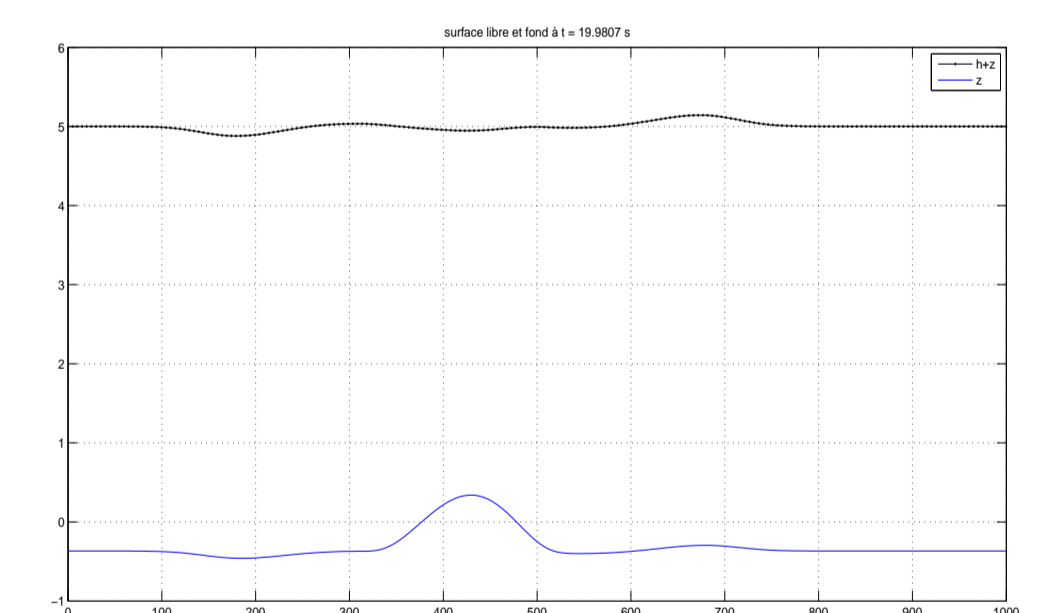
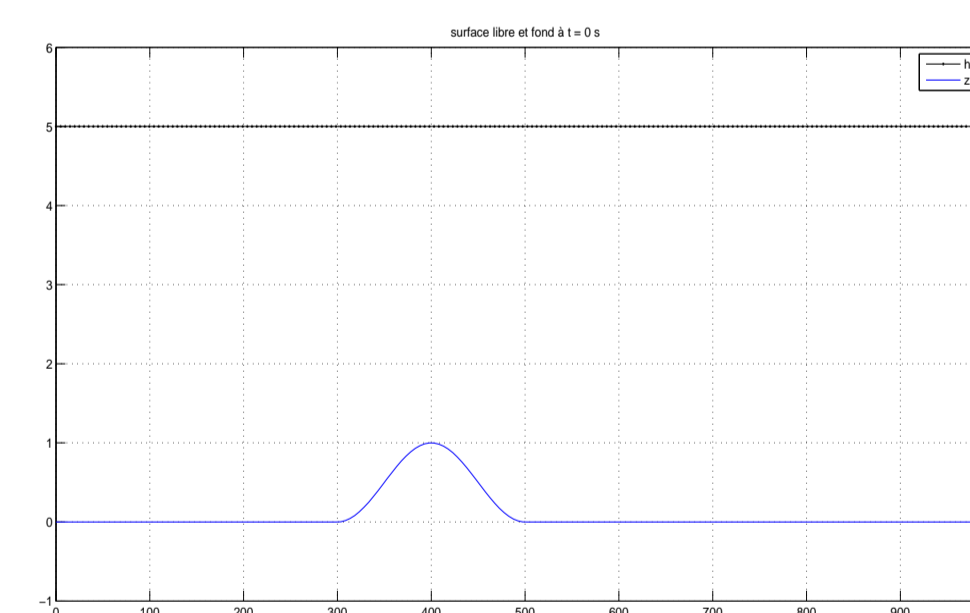
$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F(W_{i+\frac{1}{2}}^n) - F(W_{i-\frac{1}{2}}^n) \right) + \Delta t S_i^n \quad (5)$$

h dans le terme source correcteur est choisi de sorte à vérifier la C-propriété :

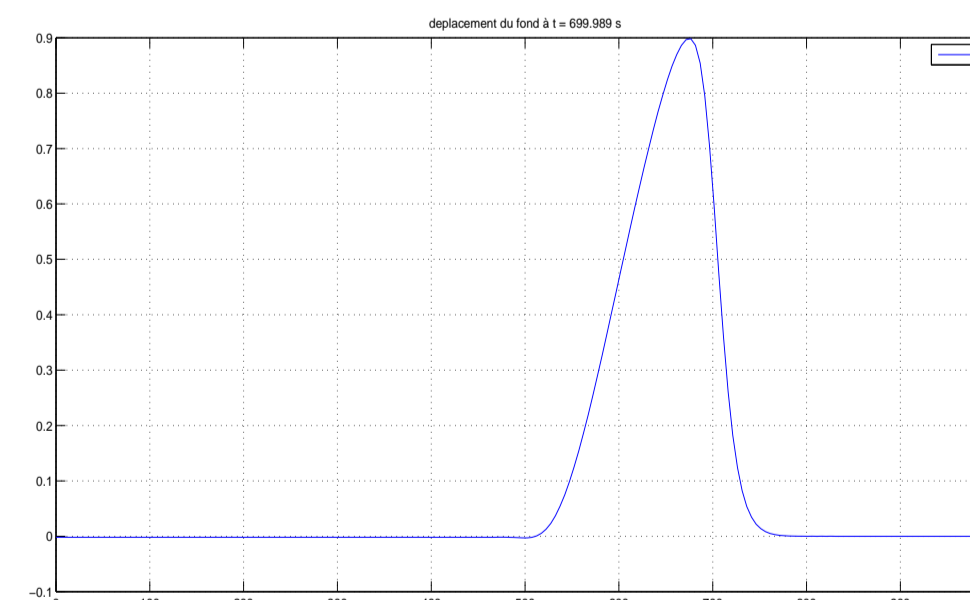
$$h = \tilde{h}_i = \frac{h_{i-1} + 2h_i + h_{i+1}}{4}$$



Rupture de barrage et érosion du fond (à gauche état initial, à droite après 20s)



Transport de sédiments (à gauche état initial, à droite après 20s)



Comparaison des schémas SRNH (à gauche) et Lax-Wendroff (à droite: effet de dispersion)

Perspectives

- Améliorer le traitement des fonds secs et simuler des phénomènes d'érosions de zones côtières,
- Afin d'avoir une meilleure estimation de la vitesse de transport des sédiments, une approche multicouche sera adoptée,
- Un nouveau schéma de type Eulerien-Lagrangien n'ayant pas recours à la jacobienne du système sera utilisé pour traiter les systèmes multicouches,
- extension de l'étude au cas bidimensionnel avec adaptation du maillage.