28 janvier 2015

Institut Galilée – Université Paris 13

En partenariat avec

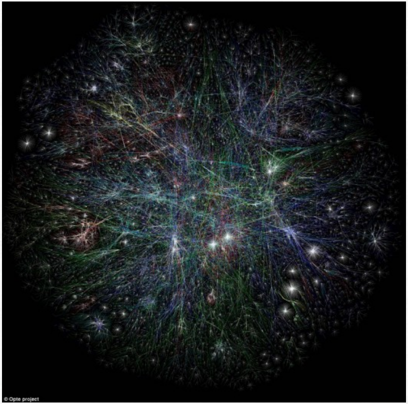
Un objet mathématique bien utile : la matrice

Laurence Halpern, Professeure
LAGA- Université Paris 13

Le monde du web

Toujours plus d'informations, toujours plus d'utilisateurs

- Plus de 2.2 $\times 10^9$ (milliards) d'internautes connectés.
- Plus de 10^9 requêtes de recherche quotidiennes.
- Le nombre de pages actives est plus difficile à évaluer : prés d'un milliard de sites actifs.



Le Web mondial (Opte project)

Le monde du web

Toujours plus d'informations, toujours plus d'utilisateurs

- Plus de 2.2×10^9 (milliards) d'internautes connectés.
- Plus de 10^9 requêtes de recherche quotidiennes.
- Le nombre de pages actives est plus difficile à évaluer : prés d'un milliard de sites actifs.

De gros enjeux économiques

- La technologie sous-jacente est en grande partie un secret bien gardé.
- A ces débuts, Google a dévoilé quelques uns de ses algorithmes :

$\Rightarrow$ L'algorithme PageRank

Google

- Inventé en septembre 1998 par Larry Page et Sergey Brin.

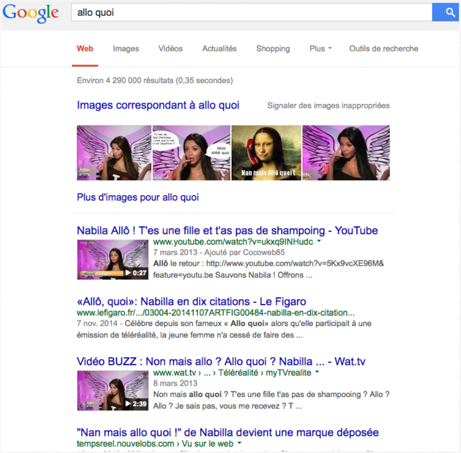
Larry Page

Sergey Brin

Algorithme Page Rank

- Requête sur Google = mots clefs $\to$ ENORME liste ordonnée de pages WEB

.



Algorithme Page Rank

- Requête sur Google = mots clefs $\rightarrow$ ENORME liste ordonnée de pages WEB

.

- Mais comment font-ils ?

Algorithme Page Rank

- Requête sur Google = mots clefs $\rightarrow$ ENORME liste ordonnée de pages WEB

.

- Mais comment font-ils ?

Algorithme PageRank

Algorithme Page Rank

- Requête sur Google = mots clefs → ENORME liste ordonnée de pages WEB

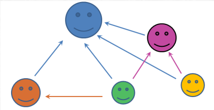
.

- Mais comment font-ils ?

Algorithme PageRank

- ▶ Page = Larry Page l'un des deux inventeurs de Google.
- ▶ Rank= Classement en anglais
- ▶ Principe : Attribuer un score à chaque page WEB en fonction des pages WEB qui pointent sur elle et proposer à l'utilisateur les pages WEB dans l'ordre décroissant de leurs scores.

Larry Page



L'algorithme PageRank

L'ensemble des scores des pages WEB sélectionnées est solution d'un gros système linéaire.
Mais qu'est ce qu'un système linéaire ?

Plan de l'exposé

1. Exemples de systèmes linéaires que vous avez déjà rencontrés.
2. Une façon simple de représenter ces problèmes.
3. Retour à la détermination des scores des pages WEB.
4. Le principe de l'algorithme PageRank sur un exemple.
5. D'autres problèmes nécessitant la résolution de systèmes linéaires.
6. Comment les résoudre sur les ordinateurs.

Quelques problèmes de la vie quotidienne

Problème 1

Deux amies sont à l'épicerie et achètent deux pots de 200g de Nutella. Elles règlent 4 euros. Quel est le prix d'un pot de Nutella ?

Quelques problèmes de la vie quotidienne

Problème 1
Deux amies sont à l'épicerie et achètent deux pots de 200g de Nutella. Elles règlent 4 euros. Quel est le prix d'un pot de Nutella ?

Solution :
On appelle x le prix d'un pot.
Le prix de deux pots est

1. d'une part $2 \times x$
2. d'autre part 4 euros.

On doit résoudre l'équation :

$$2 \times x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$

Le pot de Nutella a coûté 2 euros !

Quelques problèmes de la vie quotidienne

Problème 2

Un groupe de 50 élèves part en voyage scolaire, soit en car, soit en train. Sachant que

- le prix d'un voyage en train est de 25 euros,
- le montant de la facture SNCF est de 125 euros,

combien d'élèves ont pu prendre le car ?

Quelques problèmes de la vie quotidienne

Problème 2

Un groupe de 50 élèves part en voyage scolaire, soit en car, soit en train.
Sachant que

- le prix d'un voyage en train est de 25 euros,
- le montant de la facture SNCF est de 125 euros,

combien d'élèves ont pu prendre le car ?

Solution :

On note

- x le nombre d'élèves qui ont pris le car,
- y le nombre d'élèves qui ont pris le train.

Quelques problèmes de la vie quotidienne

Problème 2

Un groupe de 50 élèves part en voyage scolaire, soit en car, soit en train.
Sachant que

- le prix d'un voyage en train est de 25 euros,
- le montant de la facture SNCF est de 125 euros,

combien d'élèves ont pu prendre le car ?

Solution :

On note

- x le nombre d'élèves qui ont pris le car,
- y le nombre d'élèves qui ont pris le train.

Modélisation : L'énoncé nous dit que

$$\begin{aligned} x + y &= 50 \\ 25 \times y &= 125 \end{aligned}$$

Quelques problèmes de la vie quotidienne

Problème 2

Un groupe de 50 élèves part en voyage scolaire, soit en car, soit en train. Sachant que

- le prix d'un voyage en train est de 25 euros,
- le montant de la facture SNCF est de 125 euros,

combien d'élèves ont pu prendre le car ?

Solution :

On note

- x le nombre d'élèves qui ont pris le car,
- y le nombre d'élèves qui ont pris le train.

Modélisation : L'énoncé nous dit que

$$\begin{aligned} x + y &= 50 \\ 25 \times y &= 125 \end{aligned}$$

Résolution : On en déduit que $y = \frac{125}{25} = 5$ et par suite que $x = 50 - y = 50 - 5 = 45$. Il y avait donc 45 places dans le car !

Quelques problèmes de la vie quotidienne

Problème 3

Après le cours de gym les chaussures des 50 élèves de la classe sont mélangées par un mauvais plaisant. On trouve 25 paires de converse, à partager entre filles et garçons, sachant qu'1/3 des filles et 3/4 des garçons en portent. Combien y a t-il de filles et de garçons dans la classe ?

Quelques problèmes de la vie quotidienne

Problème 3
Après le cours de gym les chaussures des 50 élèves de la classe sont mélangées par un mauvais plaisant. On trouve 25 paires de converse, à partager entre filles et garçons, sachant qu'1/3 des filles et 3/4 des garçons en portent. Combien y a t-il de filles et de garçons dans la classe ?
Solution : On note x le nombre de filles et y le nombre de garçons.
Modélisation : L'énoncé nous dit que

$$\begin{aligned} x + y &= 50 \\ \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}y &= 25 \end{aligned}$$

Quelques problèmes de la vie quotidienne

Problème 3
Après le cours de gym les chaussures des 50 élèves de la classe sont mélangées par un mauvais plaisant. On trouve 25 paires de converse, à partager entre filles et garçons, sachant qu'1/3 des filles et 3/4 des garçons en portent. Combien y a t-il de filles et de garçons dans la classe ?

Solution : On note x le nombre de filles et y le nombre de garçons.

Modélisation :

Résolution :

$$\begin{aligned} x + y &= 50 \\ 3\times\frac{1}{3}x + 3\times\frac{3}{4}y &= 3\times 25 \end{aligned}$$

Quelques problèmes de la vie quotidienne

Problème 3

Après le cours de gym les chaussures des 50 élèves de la classe sont mélangées par un mauvais plaisant. On trouve 25 paires de converse, à partager entre filles et garçons, sachant qu'1/3 des filles et 3/4 des garçons en portent. Combien y a t-il de filles et de garçons dans la classe ?

Solution : On note x le nombre de filles et y le nombre de garçons.

Modélisation :

Résolution :

$$\begin{aligned} x + y &= 50 \\ x + \frac{9}{4}y &= 75 \end{aligned}$$

Quelques problèmes de la vie quotidienne

Problème 3
Après le cours de gym les chaussures des 50 élèves de la classe sont mélangées par un mauvais plaisant. On trouve 25 paires de converse, à partager entre filles et garçons, sachant qu'1/3 des filles et 3/4 des garçons en portent. Combien y a t-il de filles et de garçons dans la classe ?
Solution : On note x le nombre de filles et y le nombre de garçons.
Modélisation :
Résolution :

$$\begin{aligned} x + y &= 50 \\ x + \frac{9}{4}y &= 75 \end{aligned}$$

$\frac{5}{4}y = 25$, donc $y = 20$, puis $x = 50 - y = 50 - 20 = 30$.

Il y a donc 30 filles (dont 10 portent des converses) et 20 garçons (dont 15 portent des converses) dans la classe.

Représentation des systèmes linéaires : matrices

Exemple 2

Représentation des systèmes linéaires : matrices

Exemple 2

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 50 \\ & & 25\,y & = & 125 \end{array} \quad \textbf{s'écrit} \quad \begin{array}{rcrcr} 1\times x & + & 1\times y & = & 50 \\ 0\times x & + & 25\times y & = & 125 \end{array}$$

Représentation des systèmes linéaires : matrices

Exemple 2

$$\begin{array}{rcrcr} 1\times x & + & 1\times y & = & 50 \\ 0\times x & + & 25\times y & = & 125 \end{array} \quad \textbf{s'écrit} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 125 \end{pmatrix}$$

Représentation des systèmes linéaires : matrices

Exemple 2

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 50 \\ & & 25\,y & = & 125 \end{array} \quad \textbf{s'écrit} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 125 \end{pmatrix}$$

Représentation des systèmes linéaires : matrices

Exemple 2

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 50 \\ & & 25\,y & = & 125 \end{array} \quad \textbf{s'écrit} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 125 \end{pmatrix}$$

Exemple 3

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 50 \\ \frac{1}{3}x & + & \frac{3}{4}y & = & 75 \end{array} \quad \textbf{s'écrit} \quad \begin{array}{rcrcr} 1\times x & + & 1\times y & = & 50 \\ \frac{1}{3}\times x & + & \frac{3}{4}\times y & = & 75 \end{array}$$

Représentation des systèmes linéaires : matrices

Exemple 2

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 50 \\ & & 25\,y & = & 125 \end{array} \quad \textbf{s'écrit} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 125 \end{pmatrix}$$

Exemple 3

$$\begin{array}{ccccc} 1\times x & + & 1\times y & = & 50 \\ \frac{1}{3}\times x & + & \frac{3}{4}\times y & = & 75 \end{array} \quad \textbf{s'écrit} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Représentation des systèmes linéaires : matrices

Exemple 2

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 50 \\ & & 25\,y & = & 125 \end{array} \quad \textbf{s'écrit} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 125 \end{pmatrix}$$

Exemple 3

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 50 \\ \frac{1}{3}x & + & \frac{3}{4}y & = & 75 \end{array} \quad \textbf{s'écrit} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Représentation des systèmes linéaires : matrices

Exemple 2

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 50 \\ & & 25\,y & = & 125 \end{array} \quad \textbf{s'écrit} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 125 \end{pmatrix}$$

Exemple 3

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 50 \\ \frac{1}{3}x & + & \frac{3}{4}y & = & 75 \end{array} \quad \textbf{s'écrit} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Exemple 1

$$2 \times x = 4 \quad \textbf{s'écrit} \; (2)\,(x) = (4)$$

Représentation des systèmes linéaires : matrices

Exemple 2

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 50 \\ & & 25\,y & = & 125 \end{array} \quad \textbf{s'écrit} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 125 \end{pmatrix}$$

Exemple 3

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 50 \\ \frac{1}{3}x & + & \frac{3}{4}y & = & 75 \end{array} \quad \textbf{s'écrit} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Exemple 1

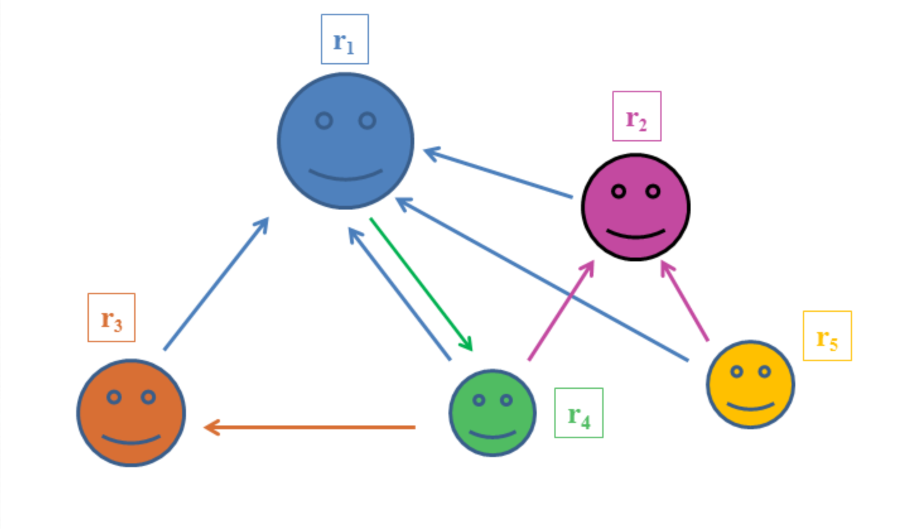
$$2 \times x = 4 \quad \textbf{s'écrit} \quad (2)\,(x) = (4)$$

La technique que l'on a utilisée pour résoudre ces problèmes est dûe à Gauss à la fin du 18ème siècle. Elle permet encore de résoudre de gros systèmes *creux* (1 million inconnues sur mon ordinateur !)

On peut/sait jouer avec ces tableaux, c'est ce que l'on appelle le calcul matriciel.

Principe des pages WEB

Un exemple avec 5 pages



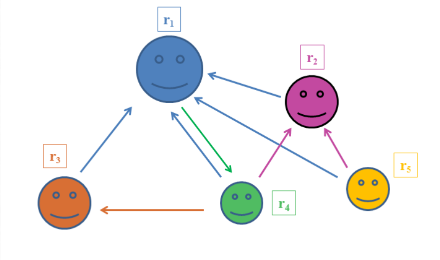
Score des pages WEB

Le score d'une page WEB est égal à la moyenne pondérée des scores des pages WEB qui pointent vers elle :

$$r_i = \sum_{\substack{\text{pages qui pointent} \\ \text{vers} \\ \text{la page } n^\circ i}} \frac{r_j}{\text{nombre de pages vers lesquelles pointe la page } n^\circ j}$$

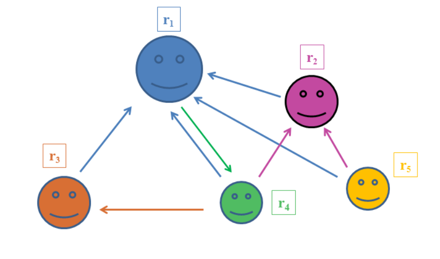
Un exemple avec 5 pages WEB : r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 les scores.

- Score de la page $n^\circ 1$
  $r_1 = r_2 + r_3 + \frac{1}{3}r_4 + \frac{1}{2}r_5$
- Score de la page $n^\circ 2$
  $r_2 = \frac{1}{3}r_4 + \frac{1}{2}r_5$
- Score de la page $n^\circ 3$
  $r_3 = \frac{1}{3}r_4$
- Scores des pages $n^\circ 4$
  $r_4 = r_1$
- Score de la page $n^\circ 5$
  $r_5 = 0$



Résolution du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} r_1 & = & r_2 + r_3 + \frac{1}{3}r_4 + \frac{1}{2}r_5 \\ r_2 & = & \frac{1}{3}r_4 + \frac{1}{2}r_5 \\ r_3 & = & \frac{1}{3}r_4 \\ r_4 & = & r_1 \\ r_5 & = & 0 \end{array}\right.$$



Résolution du système

$$
\begin{aligned}
r_1 &= r_2 + r_3 + \tfrac{1}{3} r_4 + \tfrac{1}{2} r_5 \\
r_2 &= \tfrac{1}{3} r_4 + \tfrac{1}{2} r_5 \\
r_3 &= \tfrac{1}{3} r_4 \\
r_4 &= r_1 \\
r_5 &= 0
\end{aligned}
$$

Résolution du système

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 + r_3 + \tfrac{1}{3} r_4 + \tfrac{1}{2} r_5 \\ r_2 &= \tfrac{1}{3} r_4 + \tfrac{1}{2} r_5 \\ r_3 &= \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_4 &= r_1 \\ r_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 + r_3 + \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_2 &= \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_3 &= \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_4 &= r_1 \\ r_5 &= 0 \end{aligned}$$

Résolution du système

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 + r_3 + \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_2 &= \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_3 &= \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_4 &= r_1 \\ r_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 + r_3 + \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_2 &= \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_3 &= \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_4 &= r_1 \\ r_5 &= 0 \end{aligned}$$

Résolution du système

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 + r_3 + \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_2 &= \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_3 &= \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_4 &= r_1 \\ r_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \tfrac{1}{3} r_4 + \tfrac{1}{3} r_4 + \tfrac{1}{3} r_4 = r_4 \\ r_2 &= \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_3 &= \tfrac{1}{3} r_4 \\ r_1 &= r_4 \\ r_5 &= 0 \end{aligned}$$

Résolution du système

$$
\begin{aligned}
r_1 &= r_4\\
r_2 &= \tfrac{1}{3}r_4\\
r_3 &= \tfrac{1}{3}r_4\\
r_1 &= r_4\\
r_5 &= 0
\end{aligned}
$$

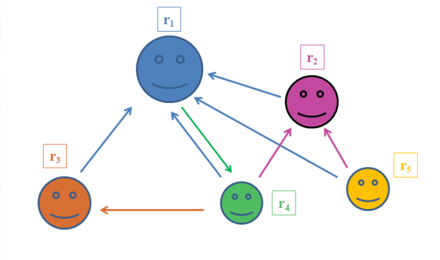
Résolution du système

$$
\begin{aligned}
\cancel{r_1 = r_4} &\rightarrow \; r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 1 \\
r_2 &= \tfrac{1}{3} r_4 \\
r_3 &= \tfrac{1}{3} r_4 \\
r_1 &= r_4 \\
r_5 &= 0
\end{aligned}
$$

Résolution du système

Donc

$$r_1 = r_4 = \frac{3}{8},\, r_2 = r_3 = \frac{1}{8},\, r_5 = 0.$$



Une autre façon d'écrire les choses

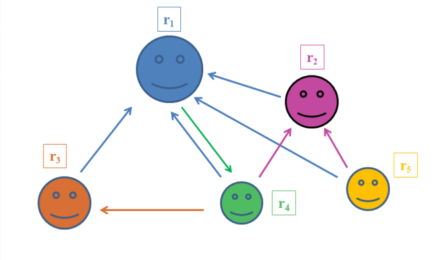
$$\left\{\begin{array}{rcl} r_1 & = & r_2 + r_3 + \frac{1}{3} r_4 + \frac{1}{2} r_5 \\ r_2 & = & \frac{1}{3} r_4 + \frac{1}{2} r_5 \\ r_3 & = & \frac{1}{3} r_4 \\ r_4 & = & r_1 \\ r_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

Une autre façon d'écrire les choses

$$\begin{cases} r_1 & = & r_2 + r_3 + \frac{1}{3} r_4 + \frac{1}{2} r_5 \\ r_2 & = & \frac{1}{3} r_4 + \frac{1}{2} r_5 \\ r_3 & = & \frac{1}{3} r_4 \\ r_4 & = & r_1 \\ r_5 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix}$$

Une autre façon d'écrire les choses

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix}$$

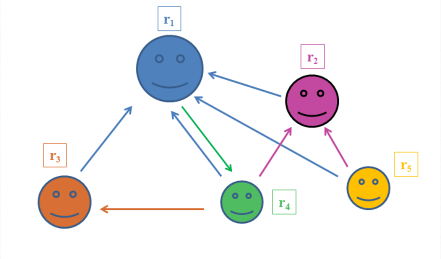


Comment comprendre la matrice

Le score d'une page WEB est égal à la moyenne pondérée des scores des pages WEB qui pointent vers elle :

$$r_3 = \sum_{\substack{\text{pages qui pointent} \\ \text{vers la page 3}}} \frac{r_j}{\text{nombre de pages vers lesquelles pointe la page } n^\circ j}$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix}$$



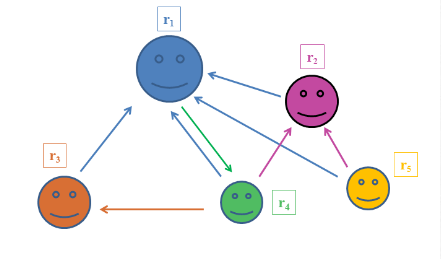
Ligne 3 : coefficient non zero si page $n^\circ i$ pointe vers page 3 : le seul coefficient non nul est le $n^\circ 4$, il est l'inverse du nombre de pages vers lesquelles la page 4 pointe qui est égal à 3.

Comment comprendre la matrice

Le score d'une page WEB est égal à la moyenne pondérée des scores des pages WEB qui pointent vers elle :

$$r_3 = \sum_{\substack{\text{pages qui pointent}\\ \text{vers la page 3}}} \frac{r_j}{\text{nombre de pages vers lesquelles pointe la page } n^\circ j}$$

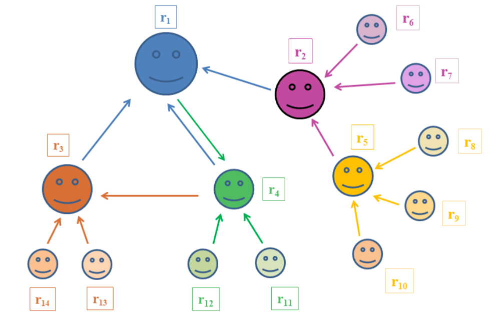
$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix}$$



Colonne 4 : coefficient i non nul si la page 4 pointe vers la page i. Les coefficients non nuls sont tous égaux.
Comment remplir la colonne 1 : je regarde toutes les pages vers lesquels 1 pointe : il n'y en a qu'une, la page 4

Score des pages WEB

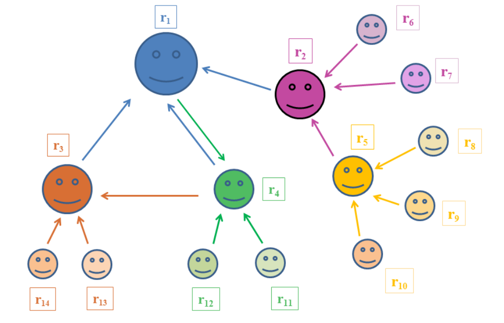
Un exemple plus compliqué



$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \\ r_9 \\ r_{10} \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \\ r_9 \\ r_{10} \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{14} \end{pmatrix}$$

Score des pages WEB

Un exemple plus compliqué

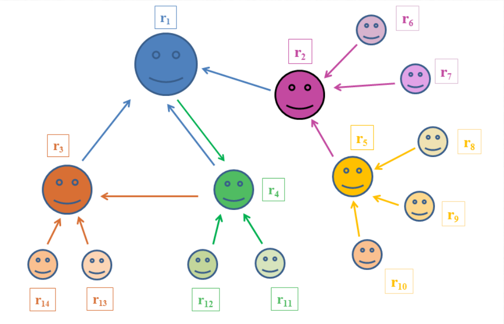


On regarde les pages vers lesquelles la page 1 pointe.

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \\ r_9 \\ r_{10} \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
1 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & *
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \\ r_9 \\ r_{10} \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{14} \end{pmatrix}$$

Score des pages WEB

Un exemple plus compliqué

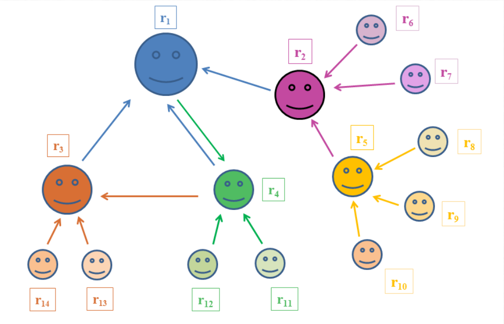


On regarde les pages vers lesquelles la page 4 pointe.

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \\ r_9 \\ r_{10} \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \\ r_9 \\ r_{10} \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{14} \end{pmatrix}$$

Score des pages WEB

Un exemple plus compliqué



Et on continue page par page

$$
\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \\ r_9 \\ r_{10} \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{14} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_8 \\ r_9 \\ r_{10} \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ r_{14} \end{pmatrix}
$$

Score des pages WEB

Remarques sur le problème à résoudre

- Le tableau des coefficients est essentiellement rempli de 0 !
- On peut utiliser la méthode dûe à **Gauss** lorsque le nombre de pages WEB n'est pas trop important, mais on perd le bénéfice du fait que la plupart des coefficients sont nuls.
- Le problème admet soit aucune solution non nulle, soit une infinité !

La résolution

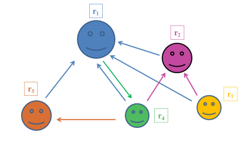
- Au lieu de trouver une formule explicite pour les scores, on va chercher à approcher ces scores en utilisant l'algorithme **PageRank**.

L'algorithme PageRank

Comment faire pour trouver une solution lorsque le nombre de page WEB est important ?

Reprenons le premier exemple :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix}}_{R} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix}}_{R}$$



L'idée de l'algorithme : approximations successives

On se donne un jeu de score quelconque R et on calcule une suite de scores

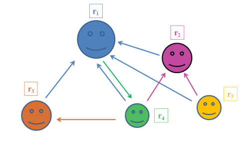
$$R_1 = A * R, R_2 = A * R_1 \cdots$$

L'algorithme PageRank

Comment faire pour trouver une solution lorsque le nombre de page WEB est important ?

Reprenons le premier exemple :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix}}_{R} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix}}_{R}$$



L'idée de l'algorithme : approximations successives

On se donne un jeu de score quelconque R et on calcule une suite de scores

$$R_1 = A * R, R_2 = A * R_1 \cdots$$

C'est très facile et rapide de calculer $A * R$ car la matrice A est très creuse.

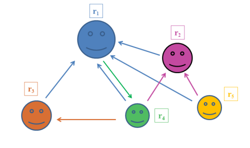
$$A * R = \begin{pmatrix} r_2 + r_3 + \frac{1}{3} r_4 + \frac{1}{2} r_5 \\ \frac{1}{3} r_4 + \frac{1}{2} r_5 \\ \frac{1}{3} r_4 \\ r_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

Comment faire pour trouver une solution lorsque le nombre de page WEB est important ?

Reprenons le premier exemple :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix}}_{R} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix}}_{R}$$



L'idée de l'algorithme : approximations successives

On se donne un jeu de score quelconque R et on calcule une suite de scores

$$R_1 = A * R, R_2 = A * R_1 \cdots$$

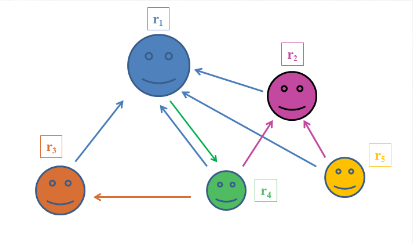
Si cette suite se stabilise, on obtient une solution $R = A * R$. On appelle cette méthode **la méthode de la puissance**.

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

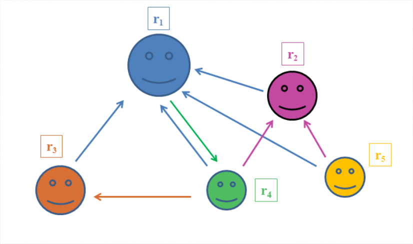
$$R_0 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

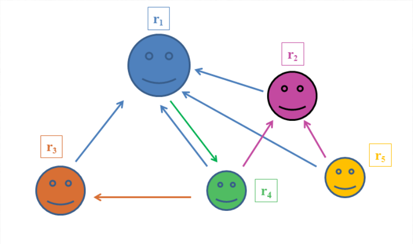
$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.5667 \\ 0.1667 \\ 0.0667 \\ 0.2000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0.3000 \\ 0.0667 \\ 0.0667 \\ 0.5667 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

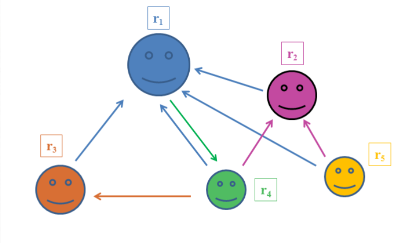
L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'approximation :

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0.3222 \\ 0.1889 \\ 0.1889 \\ 0.3000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

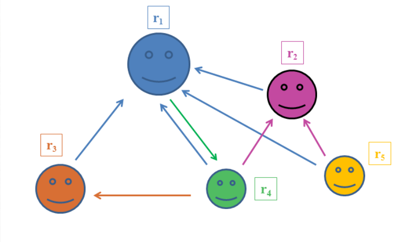


L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

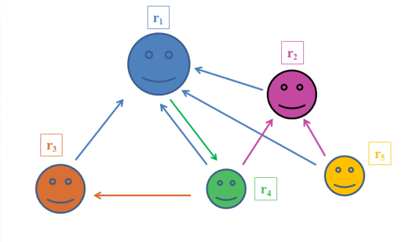
$$R_4 = \begin{pmatrix} 0.4778 \\ 0.1000 \\ 0.1000 \\ 0.3222 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

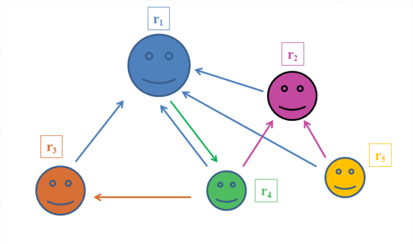
$$R_5 = \begin{pmatrix} 0.3074 \\ 0.1074 \\ 0.1074 \\ 0.4778 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

$$R_6 = \begin{pmatrix} 0.3741 \\ 0.1593 \\ 0.1593 \\ 0.3074 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

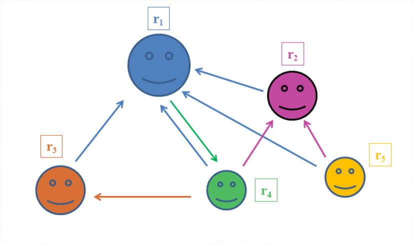
L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'approximation :

$$R_7 = \begin{pmatrix} 0.4210 \\ 0.1025 \\ 0.1025 \\ 0.3741 \\ 0 \end{pmatrix}$$

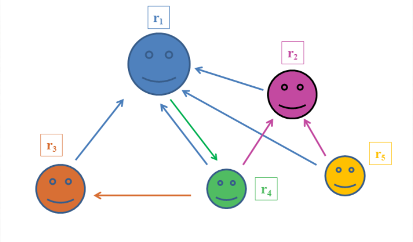


L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

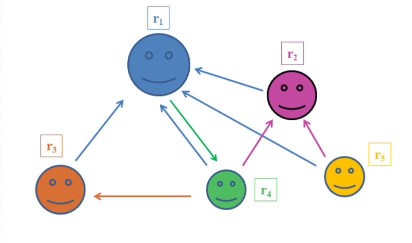
$$R_8 = \begin{pmatrix} 0.3296 \\ 0.1247 \\ 0.1247 \\ 0.4210 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

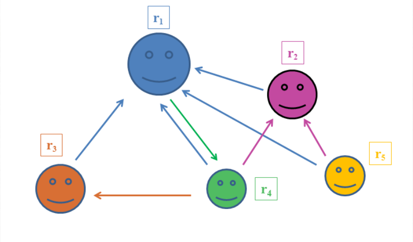
$$R_9 = \begin{pmatrix} 0.3897 \\ 0.1403 \\ 0.1403 \\ 0.3296 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

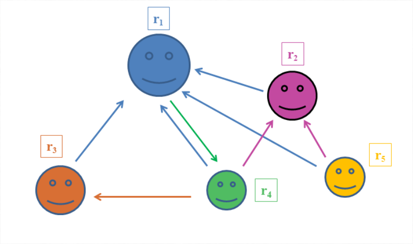
$$R_{10} = \begin{pmatrix} 0.3905 \\ 0.1099 \\ 0.1099 \\ 0.3897 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

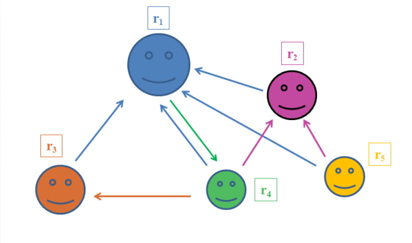
$$R_{11} = \begin{pmatrix} 0.3497 \\ 0.1299 \\ 0.1299 \\ 0.3905 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

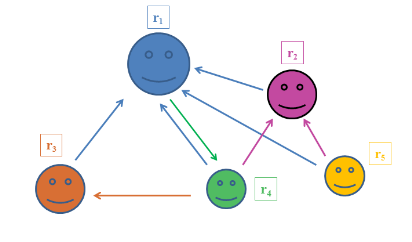
$$R_{12} = \begin{pmatrix} 0.3900 \\ 0.1302 \\ 0.1302 \\ 0.3497 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

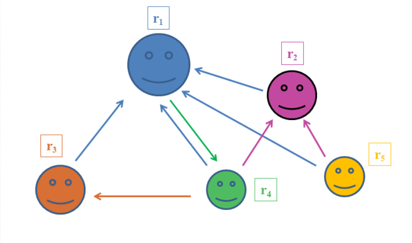
$$R_{13} = \begin{pmatrix} 0.3769 \\ 0.1166 \\ 0.1166 \\ 0.3900 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

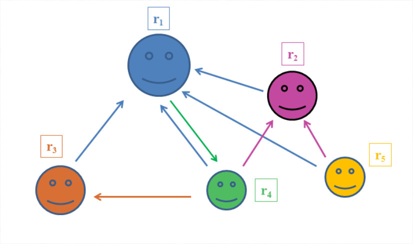
$$R_{14} = \begin{pmatrix} 0.3631 \\ 0.1300 \\ 0.1300 \\ 0.3769 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

$$R_{15} = \begin{pmatrix} 0.3856 \\ 0.1256 \\ 0.1256 \\ 0.3631 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

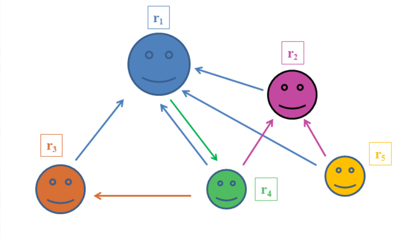
L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'approximation :

$$R_{16} = \begin{pmatrix} 0.3723 \\ 0.1210 \\ 0.1210 \\ 0.3856 \\ 0 \end{pmatrix}$$

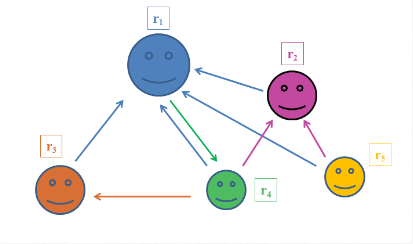


L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

$$R_{17} = \begin{pmatrix} 0.3706 \\ 0.1285 \\ 0.1285 \\ 0.3723 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

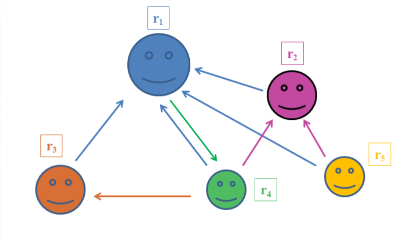
L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'approximation :

$$R_{20} = \begin{pmatrix} 0.3812 \\ 0.1241 \\ 0.1241 \\ 0.3706 \\ 0 \end{pmatrix}$$

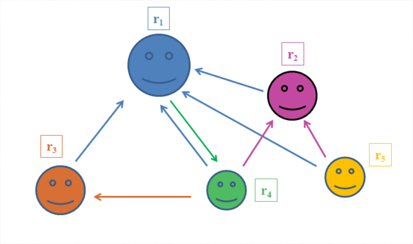


L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

$$R_{21} = \begin{pmatrix} 0.3717 \\ 0.1235 \\ 0.1235 \\ 0.3812 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

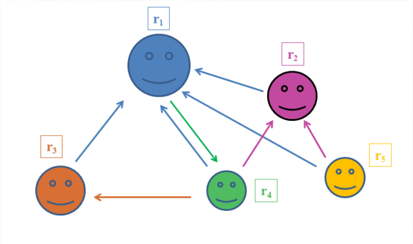
L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'approximation :

$$R_{22} = \begin{pmatrix} 0.3741 \\ 0.1271 \\ 0.1271 \\ 0.3717 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'algorithme PageRank

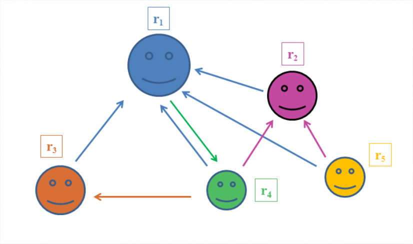
L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'approximation :

$$R_{21} = \begin{pmatrix} 0.3780 \\ 0.1239 \\ 0.1239 \\ 0.3741 \\ 0 \end{pmatrix}$$

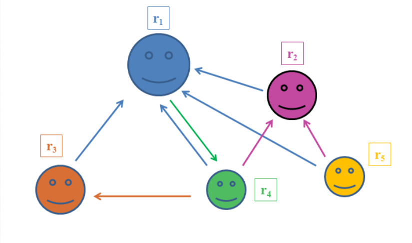


L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

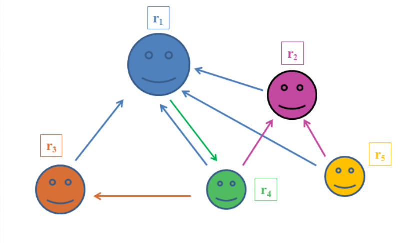
$$R_{22} = \begin{pmatrix} 0.3725 \\ 0.1247 \\ 0.1247 \\ 0.3780 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

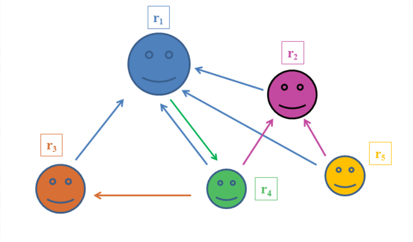
$$R_{23} = \begin{pmatrix} 0.3754 \\ 0.1260 \\ 0.1260 \\ 0.3725 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

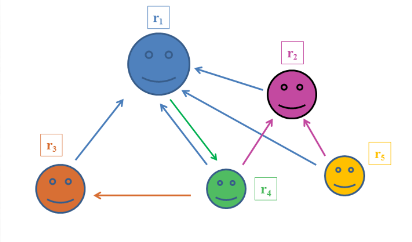
$$R_{24} = \begin{pmatrix} 0.3762 \\ 0.1242 \\ 0.1242 \\ 0.3754 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

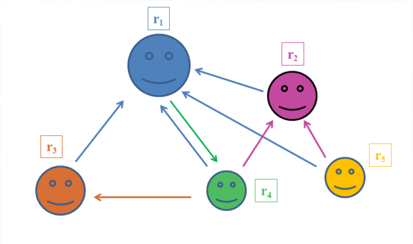
$$R_{25} = \begin{pmatrix} 0.3735 \\ 0.1251 \\ 0.1251 \\ 0.3762 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

$$R_{26} = \begin{pmatrix} 0.3757 \\ 0.1254 \\ 0.1254 \\ 0.3735 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

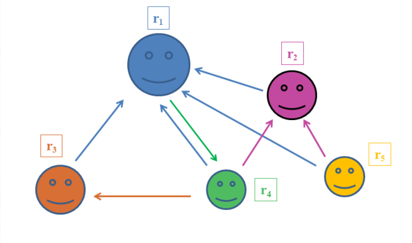
L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'approximation :

$$R_{27} = \begin{pmatrix} 0.3753 \\ 0.1245 \\ 0.1245 \\ 0.3757 \\ 0 \end{pmatrix}$$

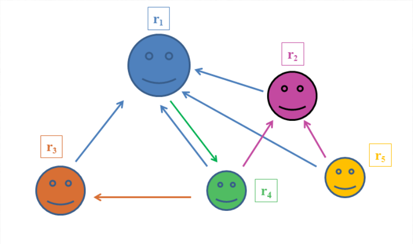


L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

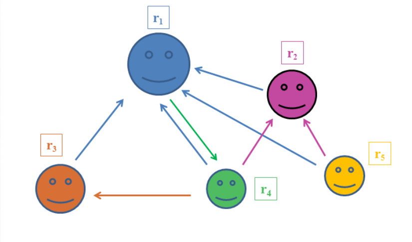
$$R_{28} = \begin{pmatrix} 0.3742 \\ 0.1252 \\ 0.1252 \\ 0.3753 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

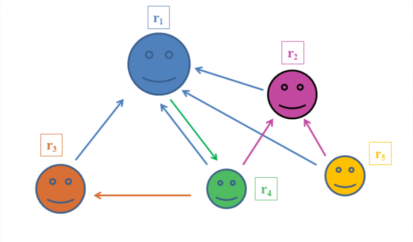
$$R_{29} = \begin{pmatrix} 0.3756 \\ 0.1251 \\ 0.1251 \\ 0.3742 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

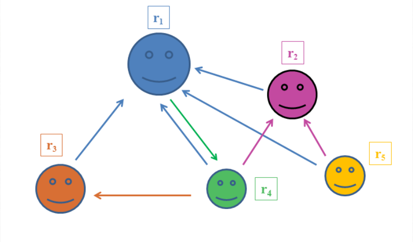
$$R_{30} = \begin{pmatrix} 0.3749 \\ 0.1247 \\ 0.1247 \\ 0.3756 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

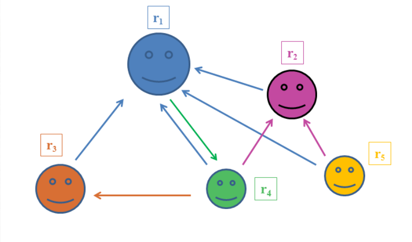
$$R_{31} = \begin{pmatrix} 0.3747 \\ 0.1252 \\ 0.1252 \\ 0.3749 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

$$R_{32} = \begin{pmatrix} 0.3754 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3747 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

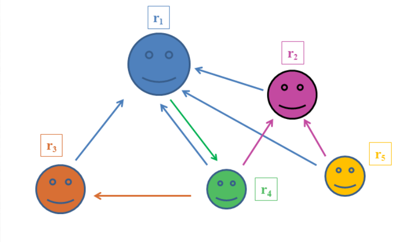
L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'approximation :

$$R_{33} = \begin{pmatrix} 0.3749 \\ 0.1249 \\ 0.1249 \\ 0.3754 \\ 0 \end{pmatrix}$$

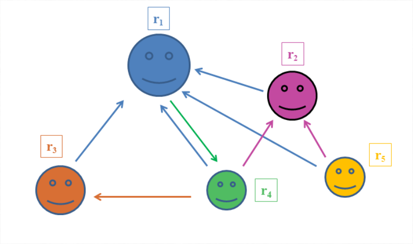


L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

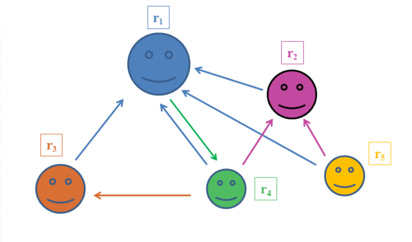
$$R_{34} = \begin{pmatrix} 0.3749 \\ 0.1251 \\ 0.1251 \\ 0.3749 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

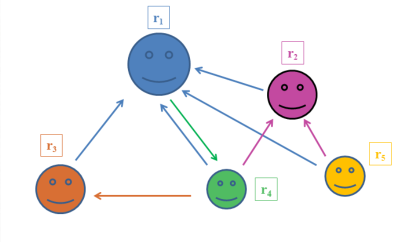
$$R_{35} = \begin{pmatrix} 0.3752 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3749 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

$$R_{36} = \begin{pmatrix} 0.3749 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3752 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

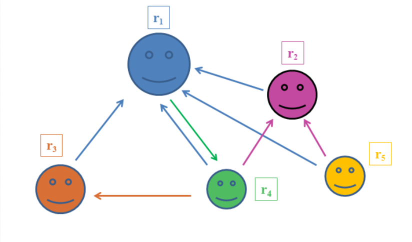
L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'approximation :

$$R_{37} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1251 \\ 0.1251 \\ 0.3749 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'algorithme PageRank

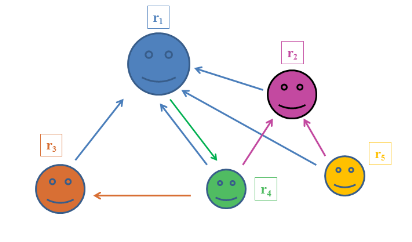
L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'approximation :

$$R_{38} = \begin{pmatrix} 0.3751 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$

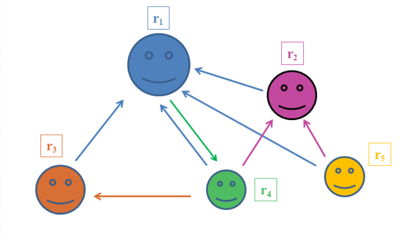


L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

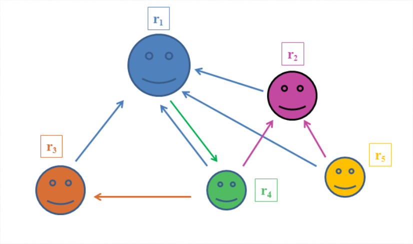
$$R_{39} = \begin{pmatrix} 0.3749 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3751 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'approximation :

$$R_{40} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3749 \\ 0 \end{pmatrix}$$

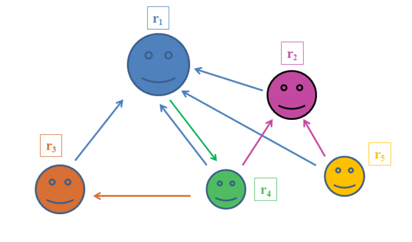
L'algorithme PageRank

L'exemple I

On a vu à la main que la solution est

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'approximation :

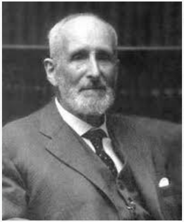


$$R_{41} = \begin{pmatrix} 0.3750 \\ 0.1250 \\ 0.1250 \\ 0.3750 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme PageRank

Quelques remarques

- Le tableau A est CREUX ! Beaucoup de zéros ! Le calcul des scores R_n ne coûte pas cher !
- Au final, si tout ça marche c'est grâce à un théorème bien plus ancien dû à Perron (1907) et Frobenius (1912) qui nous assure l'existence d'une solution à notre problème et qui nous dit même à quelle vitesse l'algorithme PageRank va converger !



Oskar Perron

Ferdinan Frobenius

Les matrices sont partout

Les matrices ne sont pas seulement dans google Page Rank, elles sont partout !

Exemple : la cage de Faraday

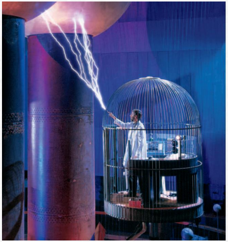
En cas d'orage, il vaut mieux se mettre dans une voiture : elle bloque les ondes électromagnétiques.

Les matrices sont partout

Les matrices ne sont pas seulement dans google Page Rank, elles sont partout !

Exemple : la cage de Faraday

En cas d'orage, il vaut mieux se mettre dans une voiture : elle bloque les ondes électromagnétiques.



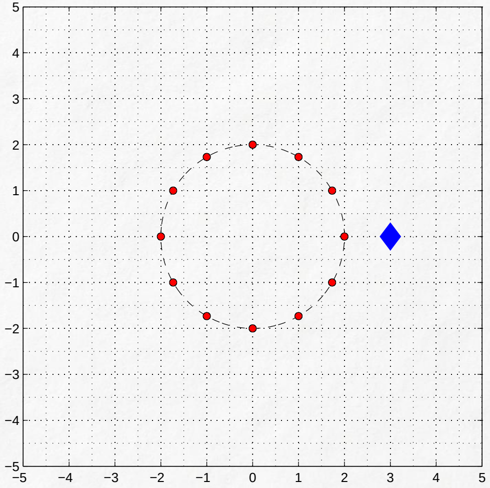
Qu'en est-il pour un grillage ?
La physique dit que c'est pareil.
De nouvelles expériences numériques prouvent que c'est plus compliqué que cela.
Référence MATHEMATICS OF THE FARADAY CAGE, Chapman, Hewett, Trefethen, 2014.

Les matrices sont partout

De gros enjeux sociétaux :

Cage de Faraday

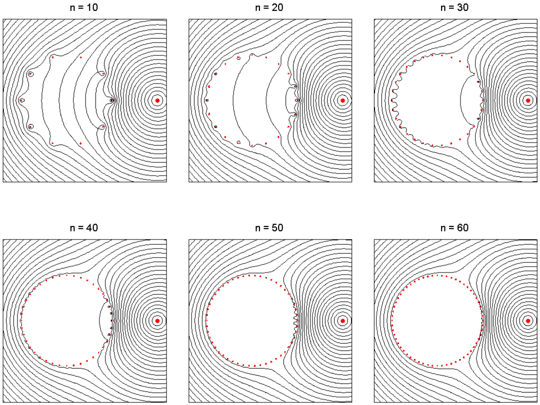
Prenons une coupe horizontale. Le potentiel en chaque point est solution d'un système linéaire du même type que précédemment, dont la donnée est un potentiel extérieur créé par l'éclair.



Mathématiques de la cage de Faraday

Equipotentielles

$r = 0.01$



Ceci explique probablement pourquoi votre mobile fonctionne dans les ascenseurs et le métro : les signaux passent bien à travers les trous.

MATHEMATICS OF THE FARADAY CAGE, Chapman, Hewett, Trefethen, 2014

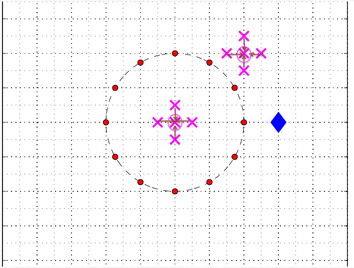
13/33

Le champ électrique au centre est environ $\frac{2}{n}$.

Retour à Marylin

Retour sur le système linéaire à résoudre

Le potentiel en un point est influencé surtout par ses quatre voisins :



$$\begin{pmatrix} 64 & -16 & 0 & 0 & -16 & 0 \\ -16 & 64 & -16 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & -16 & 64 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 64 & -16 & 0 \\ -16 & 0 & 0 & -16 & 64 & -16 \\ 0 & -16 & 0 & 0 & -16 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}$$

Electrostatique

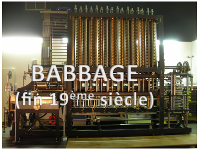
Système discret de l'électrostatique

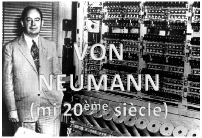
Outils du calcul

Beaucoup d'inconnues (millions)

Comment être sûr de ce qu'on calcule ?

Comment le calculer vite ?

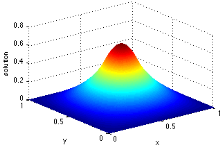




Analyse mathématique : conditionnement

Ada Lovelace

Matlab : 1 million d'inconnues en 1 seconde



Résolution (logiciel de calcul scientifique matlab)

```
N=500;
h=1/(N+1);
x=0:1/(N+1):1; y=x;     % finite difference mesh, including boundary
e=ones(N,1);
Dxx=spdiags([-e/h^2 (2/h^2)*e -e/h^2],[-1 0 1],N,N);
Dyy=spdiags([-e/h^2 (2/h^2)*e -e/h^2],[-1 0 1],N,N);
A=kron(speye(size(Dxx)),Dyy)+kron(Dxx,speye(size(Dyy)));
xi=x(2:end-1);yi=y(2:end-1);
f=zeros(N,N);
f([yi>0.4 & yi<0.6],[xi>0.4 & xi<0.6])=50;
gg=zeros(N,1);
gd=zeros(N,1);
f(1:N,1)=f(1:N,1)+gg/h^2;          % add boundary conditions into rhs
f(1:N,end)=f(1:N,end)+gd/h^2;

u=A\ f(:);
u=reshape(u,N,N);
u=[gg u gd];
u=[zeros(1,N+2);u;zeros(1,N+2)];

mesh(x(1:end),y,u); xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('solution');
```

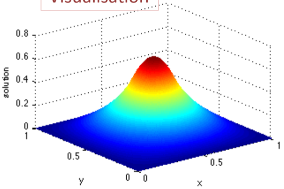
Géométrie

La matrice du problème

Données physiques

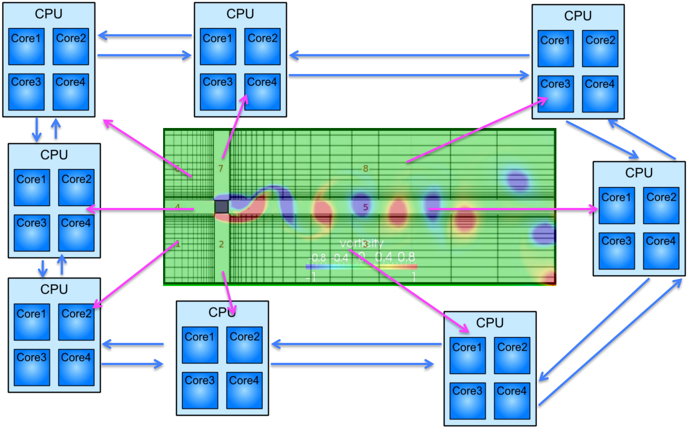
Résolution

Visualisation



Très gros systèmes : parallélisation

Calcul d'acoustique dans un fluide,
Thèse de Oana Ciobanu, LAGA Université Paris 13 et ONERA



Faire dialoguer les processeurs : méthode de décomposition de domaines

Mathématiques, calcul scientifique et décomposition de domaines

- Un domaine scientifique en plein essor, surtout en relation avec les autres sciences : climat, vivant,etc.)
- Une science à la fois neuve et chargée d'histoire.
- A besoin de têtes bien faites pour rejoindre notre équipe

Filipa (Orsay)
Jeremie (P6)
Veronique (Amiens)
Caroline (P13)
Florence (Marseille)
Stella (Nice)
Kevin (Bordeaux)
Juliette (ONERA)
Binh (Bilbao)
Martin (Genève)
Loic (Orsay)
Dana (P13)