C. R. Acad. Sci. Paris, t. , Série I, p. 1–4, – PXMA????.TEX –
Analyse Numérique/*Numerical Analysis*

Méthodes de relaxation d'ondes (SWR) pour l'équation de la chaleur en dimension 1

Martin J. Gander [a], Laurence Halpern [b],

[a] Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montreal, Canada
Courriel :mgander@math.mcgill.ca
[b] LAGA, Institut Galilée, Université Paris XIII, 93430 Villetaneuse, France
Courriel :halpern@math.univ-paris13.fr

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

Résumé. Nous introduisons des algorithmes de relaxation d'ondes (SWR) pour l'équation de la chaleur, basés sur l'utilisation de conditions de transmission optimisées. Ils convergent ainsi beaucoup plus vite que l'algorithme classique. Nous analysons ensuite la dépendance de la convergence par rapport à la taille du recouvrement et au pas de discrétisation en temps. © Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Optimized Schwarz Waveform Relaxation (SWR) for the one-dimensional heat equation.

Abstract. *We introduce Schwarz Waveform Relaxation algorithms (SWR) for the heat equation which have a much faster convergence rate than the classical one due to optimized transmission conditions between subdomains. We analyze the asymptotic dependence of the convergence rate with respect to the size of the overlap and the time step.* © Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Waveform relaxation methods were introduced for solving very large systems of ordinary differential equations in the VLSI community [4]. These algorithms distribute the computation on parallel computers by partitioning the system into subsystems and then use a Picard iteration [7] to compute the global solution. The major flaw of these methods is their slow convergence rate. To make these methods efficient, one needs to use transmission conditions adapted to the underlying problem [1]. We analyze this approach for the heat equation in 1 dimension and derive the asymptotic convergence rate of the optimized methods with respect to the overlap and the discretization parameters. Our approach is related to the work on optimized Schwarz methods for steady problems arising from implicit time discretizations [3], but it does not impose a uniform time discretization and thus permits locally adapted time steps.

To solve the heat equation (1) on $\Omega = \mathbb{R}$ with a waveform relaxation algorithm, we decompose Ω into two subdomains $\Omega_1 = (-\infty, L)$ and $\Omega_2 = (0, \infty)$, $L \geqslant 0$, and study the general waveform relaxation algorithm (2). In its classical form, the transmission operators $\mathcal{B}_i$ are the identity, for which the algorithm

Note présentée par O. PIRONNEAU

S0764-4442(00)0????-?/FLA

in $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, has been analyzed in detail in [2], where linear convergence on unbounded time intervals and superlinear convergence on bounded time intervals was proved for positive L using the maximum principle. Here we propose to use instead $\mathcal{B}_i = \partial/\partial x + \mathcal{S}_i$, where $\mathcal{S}_i$ are linear, pseudo-differential operators in time with Fourier symbol σ_i. Fourier analysis leads to the convergence rate (3) of algorithm (2).

THEOREM 2.1. – *If the symbols of the transmission operators satisfy $\sigma_1(i\omega) = -\sigma_2(i\omega) = \sqrt{i\omega}$, then the algorithm (2) converges in two steps to the solution u of (1) independently of the overlap.*

Because of the non-local character of these optimal operators, we introduce local approximations satisfying $\Re(\sqrt{i\omega}\,\overline{\sigma_1(i\omega)}) \geqslant 0$ and $\Re(\sqrt{i\omega}\,\overline{\sigma_2(i\omega)}) \leqslant 0$, which guarantees better performance of the algorithm over the classical one. The best performance with local conditions is achieved, if polynomial solutions of the min-max problem (4) are used as transmission conditions.

THEOREM 2.2. – *Let $\mathcal{D}$ be a compact subset of the complex plane, f a continuous function on $\mathcal{D}$ such that $f(\mathcal{D})$ is contained in the half plane $\Re z > 0$. Then for all integer n and $L = 0$, the min-max problem (5) has a unique solution $\sigma^{n,*}$. The same holds for $L > 0$ if $\delta_n(0)e^{(sup_{\mathcal{D}}|f(z)|-\inf_{\mathcal{D}}|f(z)|)L} < 1$. The solution is characterized by the existence of at least $n+2$ points z_j such that $\left|\frac{f(z_j)-\sigma(z_j)}{f(z_j)+\sigma(z_j)}e^{-f(z_j)L}\right| = \delta_n(L)$. In addition if $\mathcal{D}$ and f are symmetric with respect to complex conjugation, then $\sigma^{n,*}$ has real coefficients.*

For concrete results useful in practice, we analyze now the zeroth and first order case in detail. Precise expressions for the constants $\underline{L}$, $\overline{L}$ and C can be found in the corresponding French part.

THEOREM 3.1. – *For $n = 0$ and $L \geqslant 0$, the min-max problem (4) has a unique solution $\sigma^{0,*} > 0$. If $L = 0$, then $\sigma^{0,*} = (\omega_{\min}\omega_{\max})^{1/4}$. If $0 < L \leqslant \underline{L}$, then $\sigma^{0,*}$ is given by the solution of $|\rho(i\omega_{\min})| = |\rho(i\omega_{\max})|$. If $\underline{L} < L \leqslant \overline{L}$, $\sigma^{0,*}$ is given by the solution of $|\rho(i\omega_{\min})| = |\rho(i\omega_e)|$, where $\omega_e = \sigma^{0,*}L^{-1}(1+\sqrt{1-(L\sigma^{0,*})^2-2L\sigma^{0,*}})$. If $L > \overline{L}$, then $\sigma^{0,*} = \sqrt{\omega_{min}}$.*

Introducing for any $p > 0$ the Robin transmission conditions (6), the following theorem establishes well-posedness of the algorithm and convergence.

THEOREM 3.2. – *For $L \geqslant 0$ and $p > 0$, the algorithm (2) with Robin transmission conditions (6) is well defined in $\prod_{j=1,2} H^{2,1}(\Omega_j \times (0,T))$ and converges in $\prod_{j=1,2} L^2((0,T)\times\Omega_j)$ to the solution u of (1).*

We now study the asymptotic convergence rate for the discretized algorithm when the time step Δt goes to 0. Without overlap, the optimized convergence rate depends on Δt because of $\omega_{max} = \pi/\Delta t$; with overlap, the numerical overlap is often only a few mesh cells in space, and in addition the discretization steps in space and time are often linked. We thus analyze the case of a general overlap of the form Δt^{β}, $\beta > 0$.

THEOREM 3.3. – *If ρ^* denotes the solution of (4) for $n = 0$, then, as Δt goes to zero, we have for the algorithm without overlap $\rho^* = 1 - C\Delta t^{1/4}$. For the algorithm with overlap $L = O(\Delta t^{\beta})$, we have $\rho^* = 1 - C\Delta t^{\beta/3}$ if $\beta \leqslant 3/4$, and $\rho^* = 1 - C\Delta t^{1/4}$ if $\beta > 3/4$.*

The corresponding first order approximation results are as follows.

THEOREM 4.1. – *The unique solution $\sigma^{1,*} = p^* + i\omega q^*$ of (5), if it exists, satisfies $p^*, q^* > 0$. If $L = 0$, the optimal parameters are given in (9). If $L > 0$, then for $\omega_{\max}$ large the optimal parameters p^*, q^* are given for $0 < L \leqslant \underline{L}$ by the solution of $|\rho(i\omega_{\min})| = |\rho(i\omega_1)| = |\rho(i\omega_{\max})|$ and for $\underline{L} < L \leqslant \overline{L}$ by the solution of $|\rho(i\omega_{\min})| = |\rho(i\omega_1)| = |\rho(i\omega_2)|$, where $\omega_1 < \omega_2$ are the roots of the polynomial $Lq^4\omega^4 - 2q^3\omega^3 + (L - 4Lpq + 2q - 6q^2p + 2Lp^2q^2)\omega^2 + (6qp^2 - 2p)\omega + 2p^3 + Lp^4$ giving the maxima of $|\rho|$.*

Using now for $p, q > 0$ the first order transmission conditions (10), the following theorem establishes well posedness and convergence of the optimized algorithm.

THEOREM 4.2. – *If $f \in H^{1,\frac{1}{2}}(\Omega\times(0,T))$ and $u_0 \in H^2(\Omega)$, then the algorithm (2) with first order transmission conditions (10) is well defined in $\prod_{j=1,2} H^{3,\frac{3}{2}}(\Omega_j \times (0,T))$ and converges in $\prod_{j=1,2} L^2((0,T)\times\Omega_j)$ to the solution u of (1).*

THEOREM 4.3. – *Without overlap, as Δt goes to 0, we have $\rho^* = 1 - C\Delta t^{1/8}$. If $L = O(\Delta t^{\beta})$ then $\rho^* = 1 - C\Delta t^{\beta/5}$ if $\beta \leqslant 5/8$ and $\rho^* = 1 - C\Delta t^{1/8}$ if $\beta > 5/8$.*

1. Introduction

Les algorithmes de relaxation d'ondes ont été introduits pour la résolution de systèmes différentiels ordinaires de très grande taille dans la communauté VLSI [4]. Ces algorithmes distribuent le calcul sur des ordinateurs parallèles en partageant le système en sous-systèmes et utilisent une itération de Picard [7] pour trouver la solution globale. Le défaut majeur de ces algorithmes est qu'ils convergent lentement. Cependant ils peuvent être rendus très efficaces si l'on utilise des conditions de transmission adaptées [1]. Nous détaillons ici la démarche pour l'équation de la chaleur en dimension 1 dans le cadre des méthodes de décomposition de domaines : l'algorithme optimal donne la convergence en deux itérations et est défini par l'utilisation de la notion de condition aux limite transparente. Des conditions de transmission approchées sont différentielles en temps, et définies par optimisation du taux de convergence sur un domaine de fréquences discrètes. Nous introduisons un problème de meilleure approximation non standard, pour lequel nous donnons un résultat d'existence et d'unicité. Nous montrons que les algorithmes correspondants sont bien définis dans des espaces adaptés, et convergents. Nous analysons la dépendance du taux de convergence par rapport à la taille du recouvrement et au pas de discrétisation en temps. Nous illustrons sur un exemple concret les performances de nos méthodes. Notre démarche s'inspire de celle présentée dans le cas stationnaire, et utilisée pour l'équation de convection diffusion avec un schéma implicite en temps [3]. Cependant l'avantage de l'approche globale en temps est qu'elle permet d'utiliser des pas de temps différents dans différents sous-domaines, et ne nécessite pas l'échange d'informations à chaque étape de temps.

2. L'algorithme de relaxation d'ondes

Nous considérons l'équation de la chaleur en dimension 1 dans $\Omega = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(u) := u_t - u_{xx} = f \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

avec une condition initiale $u(\cdot,0) = u_0$ dans Ω. Pour une condition initiale dans $L^2(\Omega)$ et un second membre f dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, le problème de Cauchy admet une unique solution faible dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Si de plus u_0 appartient à $H^1(\Omega)$, u appartient à $H^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ où les espaces $H^{r,s}(\Omega \times (0,T))$ sont définis dans [5] comme $L^2(0,T;H^r(\Omega)) \cap H^s(0,T;L^2(\Omega))$.

Nous décomposons le domaine Ω en deux sous-domaines $\Omega_1 = (-\infty, L)$ et $\Omega_2 = (0,\infty)$. L'algorithme général de relaxation d'ondes avec recouvrement consiste à résoudre itérativement les sous-problèmes dans $\Omega_1 \times (0,T)$ et $\Omega_2 \times (0,T)$ au moyen d'opérateurs $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ définis sur les interfaces $x = 0$ et $x = L$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{L}(u_1^n) = f & \text{dans } \Omega_1 \times (0,T), \\ u_1^n(\cdot,0) = u_0 & \text{dans } \Omega_1, \\ \mathcal{B}_1 u_1^n(L,\cdot) = \mathcal{B}_1 u_2^{n-1}(L,\cdot) & \text{sur } (0,T), \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} \mathcal{L}(u_2^n) = f & \text{dans } \Omega_2 \times (0,T), \\ u_2^n(\cdot,0) = u_0 & \text{dans } \Omega_2, \\ \mathcal{B}_2 u_2^n(0,\cdot) = \mathcal{B}_2 u_1^{n-1}(0,\cdot) & \text{sur } (0,T). \end{array}\right. \tag{2}$$

Dans l'algorithme de relaxation d'ondes classique, les opérateurs $\mathcal{B}_i$ sont égaux à l'identité. Cet algorithme a été analysé dans [2] pour l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$. Un résultat de convergence superlinéaire pour $t \in [0,T]$, $T < \infty$, et linéaire pour tout t a été établi pour $L > 0$ par le principe du maximum.

Introduisons les opérateurs $\mathcal{B}_i = \partial/\partial x + \mathcal{S}_i$, où les $\mathcal{S}_i$ sont des opérateurs linéaires pseudodifférentiels en temps, de symbole σ_i. Notons e_j^n l'erreur à l'étape n dans Ω_j pour $j = 1,2$. Nous calculons explicitement les transformées de Fourier en temps $\hat{e}_1^n(x,\omega) = \hat{e}_1^n(L,\omega)e^{\sqrt{i\omega}(x-L)}$, $\hat{e}_2^n(x,\omega) = \hat{e}_2^n(0,\omega)e^{-\sqrt{i\omega}x}$, où, pour ω réel non nul, $\sqrt{i\omega}$ est la racine de $i\omega$ de partie réelle strictement positive. Les conditions de transmission fournissent une relation de récurrence $\hat{e}_1^{n+1}(0,\omega) = \rho\, \hat{e}_1^{n-1}(0,\omega)$, $\hat{e}_2^{n+1}(L,\omega) = \rho\, \hat{e}_2^{n-1}(L,\omega)$, où le coefficient ρ est le taux de convergence de l'algorithme, donné par

$$\rho(i\omega) := \frac{\sqrt{i\omega} - \sigma_1(i\omega)}{\sqrt{i\omega} + \sigma_1(i\omega)} \, \frac{\sqrt{i\omega} + \sigma_2(i\omega)}{\sqrt{i\omega} - \sigma_2(i\omega)} \, e^{-2\sqrt{i\omega}L}. \tag{3}$$

THÉORÈME 2.1. – *Si les opérateurs $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ ont pour symboles $\sigma_1(i\omega) = -\sigma_2(i\omega) = \sqrt{i\omega}$, l'algorithme (2) converge vers la solution* u *de (1) en deux itérations indépendamment du recouvrement.*
Notons que ces opérateurs exacts sont intégraux en temps et donc coûteux à utiliser. Nous les approchons par des polynômes de bas degré en $i\omega$, de façon à obtenir des conditions de transmission simples à mettre en œuvre, et menant à des algorithmes convergents. Pour l'algorithme de relaxation classique, le taux de convergence est $\rho_D(i\omega) = e^{-2\sqrt{i\omega}L}$. Si les symboles $\sigma_j(i\omega)$ sont choisis tels que $\Re(\sqrt{i\omega}\,\overline{\sigma_1(i\omega)}) \geqslant 0$ et $\Re(\sqrt{i\omega}\,\overline{\sigma_2(i\omega)}) \leqslant 0$, alors $|\rho(i\omega)| \leqslant |\rho_D(i\omega)|$. Pour améliorer la convergence, il faut donc écrire des opérateurs approchés qui vérifient cette propriété. Nous supposons désormais que $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$, et nous cherchons σ^* de façon à résoudre

$$\min_{\sigma\in\mathbb{P}_n} \max_{\omega_{\min}\leqslant|\omega|\leqslant\omega_{\max}} |\rho(i\omega)| \tag{4}$$

où $\mathbb{P}_n$ est l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{C}$ de degré inférieur ou égal à n, et les quantités $\omega_{\min}$ et $\omega_{\max}$ sont des fréquences discrètes estimées par $\omega_{\max} = \pi/\Delta t$ et $\omega_{\min} = \pi/T$. Le taux de convergence optimal est noté ρ^*. Commençons par un résultat général pour ce problème de meilleure approximation.

THÉORÈME 2.2. – *Soit $\mathcal{D}$ un compact du plan complexe, f une fonction continue sur $\mathcal{D}$ telle que $f(\mathcal{D})$ est contenu dans le demi-plan $\Re z > 0$. Considérons le problème de min-max :*

$$\delta_n(L) = \min_{\sigma\in\mathbb{P}_n} \max_{z\in\,\mathcal{D}} \left|\frac{f(z)-\sigma(z)}{f(z)+\sigma(z)} e^{-f(z)L}\right|. \tag{5}$$

Pour tout entier n, pour $L = 0$, le problème (5) admet une solution et une seule $\sigma^{n,*}$. Il en est de même si L est non nul et tel que $\delta_n(0)e^{(sup_{\mathcal{D}}|f(z)|-\inf_{\mathcal{D}}|f(z)|)L} < 1$. Cette solution est caractérisée par l'existence d'au moins $n+2$ points z_j d'équioscillation, i.e. tels que $\left|\frac{f(z_j)-\sigma(z_j)}{f(z_j)+\sigma(z_j)}e^{-f(z_j)L}\right| = \delta_n(L)$. De plus si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à l'axe réel, et $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ pour tout z dans $\mathcal{D}$, $\sigma^{n,*}$ est à coefficients réels et l'ensemble des points d'équioscillation est symétrique par rapport à l'axe réel .
La démonstration d'existence et l'unicité reposent sur le fait que pour tout z_0 complexe, les courbes définies par $|\frac{z-z_0}{z+z_0}| = C$ sont des cercles, donc strictement convexes, et l'ensemble $|\frac{z-z_0}{z+z_0}| \leqslant C$ est l'intérieur du disque pour $C < 1$. La démonstration de la propriété d'équioscillation généralise la démonstration classique dans le cas de la meilleure approximation de Tchebycheff linéaire [6].

Nous appliquons maintenant ce résultat à notre problème, c'est-à-dire à la fonction $f(z) = \sqrt{z}$ sur $\mathcal{D} = i[\omega_{\min}, \omega_{\max}] \cup i[-\omega_{\max}, -\omega_{\min}]$. Nous le précisons dans les cas des approximations d'ordre zéro et d'ordre un, qui sont celles que nous utiliserons numériquement.

3. Approximation d'ordre 0

THÉORÈME 3.1. – *Pour $n = 0$, pour tout L, le problème de min-max (4) admet une solution unique $\sigma^{0,*}$, strictement positive. Pour $L = 0$, $\sigma^{0,*} = (\omega_{\min}\omega_{\max})^{1/4}$. Pour $L > 0$, on a trois cas :*

1. *pour $0 < L \leqslant \underline{L} = \sqrt{2}\omega_{\min}^{1/4}\omega_{\max}^{-3/4} + o(\omega_{\max}^{-3/4})$, le paramètre optimal $\sigma^{0,*}$ est donné par la résolution de l'équation non linéaire $|\rho(i\omega_{\min})| = |\rho(i\omega_{\max})|$;*
2. *pour $\underline{L} < L \leqslant \overline{L} = C/\sqrt{\omega_{\min}}$, $C = 0.3401\ldots$, $\sigma^{0,*}$ est donné par la résolution de l'équation non linéaire $|\rho(i\omega_{\min})| = |\rho(i\omega_e)|$, avec $\omega_e = \sigma^{0,*}L^{-1}(1 + \sqrt{1-(L\sigma^{0,*})^2 - 2L\sigma^{0,*}})$;*
3. *pour $L > \overline{L}$, $\sigma^{0,*} = \sqrt{\omega_{min}}$.*

La démonstration de ce théorème, comme celle du théorème 4.1, repose sur une étude fine du comportement du taux de convergence et de ses dérivées partielles.

Pour tout $p > 0$ nous introduisons alors les conditions de Robin

$$\mathcal{B}_1 = \partial_x + p, \quad \mathcal{B}_2 = \partial_x - p. \tag{6}$$

THÉORÈME 3.2. – *Pour tout $L \geqslant 0$, pour tout $p > 0$, l'algorithme (2) avec conditions de transmission (6) est défini dans $\prod_{j=1,2} H^{2,1}(\Omega_j \times (0,T))$ et converge dans $\prod_{j=1,2} L^2((0,T) \times \Omega_j)$ vers la solution u de (1).*

Les résultats d'existence contenus dans ce théorème reposent sur des estimations *a priori*. La régularité s'obtient par transformation de Fourier. Quant à la convergence, elle s'obtient par estimations d'énergie dans le cas sans recouvrement, et par transformation de Fourier dans le cas avec recouvrement. Il en est de même pour le théorème 4.2.

Nous étudions maintenant le comportement du taux de convergence lorsque Δt tend vers 0. En l'absence de recouvrement, le pas de temps intervient *via* ω_{max}. En présence de recouvrement, sa taille est d'ordinaire de quelques pas d'espace, et les pas de temps et d'espace sont souvent liés. Nous introduisons donc une taille de recouvrement sous la forme Δt^β, $\beta > 0$.

THÉORÈME 3.3. – *Soit ρ^* la solution de (4) avec $n = 0$. Pour l'algorithme sans recouvrement, quand Δt tend vers 0 on a*

$$\rho^* = \max_{\omega_{\min} \leqslant |\omega| \leqslant \omega_{\max}} |\rho^*(i\omega)| = 1 - 2^{3/2}(\frac{\omega_{\min}}{\pi})^{1/4}\Delta t^{1/4} + o(\Delta t^{1/4}). \tag{7}$$

Pour $L > 0$, supposons $L = C_L \Delta t^\beta$. Lorsque Δt tend vers 0, on a

$$\max_{\omega_{\min} \leqslant |\omega| \leqslant \omega_{\max}} |\rho^*(i\omega)| = \begin{cases} 1 - 2^{11/6}\omega_{\min}^{1/6} C_L^{1/3} \Delta t^{\beta/3} + o(\Delta t^{\beta/3}) & \text{si } \beta \leqslant 3/4, \\ 1 - 2^{3/2}(\frac{\omega_{\min}}{\pi})^{1/4}\Delta t^{1/4} + o(\Delta t^{1/4}) & \text{si } \beta > 3/4. \end{cases} \tag{8}$$

4. Approximation d'ordre 1

Nous nous plaçons maintenant dans le cas $n = 1$, et nous posons $\sigma^{1,*} = p^* + i\omega q^*$. La caractérisation du polynôme optimal s'écrit alors :

THÉORÈME 4.1. – *La solution unique $\sigma^{1,*} = p^* + i\omega q^*$ du problème de min-max (5), quand elle existe, vérifie $p^* > 0$ et $q^* > 0$. Dans le cas sans recouvrement on a*

$$\begin{aligned} p^* &= 2\frac{\sqrt{2}(\omega_{\min}\omega_{\max})^{3/8}\left(\sqrt{\omega_{\max}}+\sqrt{\omega_{\min}}-(\omega_{\max}\omega_{\min})^{1/4}\right)\sqrt{\sqrt{\omega_{\max}}+\sqrt{\omega_{\min}}+(\omega_{\max}\omega_{\min})^{1/4}}}{\omega_{\max}+\omega_{\min}+\sqrt{\omega_{\max}\omega_{\min}}}, \\ q^* &= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{\omega_{\max}}+\sqrt{\omega_{\min}}-(\omega_{\max}\omega_{\min})^{1/4}\right)\sqrt{\sqrt{\omega_{\max}}+\sqrt{\omega_{\min}}+(\omega_{\max}\omega_{\min})^{1/4}}}{(\omega_{\min}\omega_{\max})^{1/8}(\omega_{\max}+\omega_{\min}+\sqrt{\omega_{\max}\omega_{\min}})}, \end{aligned} \tag{9}$$

si $\omega_{\max} \geqslant \alpha^4 \omega_{\min}$ avec $\alpha > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}) \approx 2.89$. Dans le cas avec recouvrement pour $\omega_{\max}$ grand, on introduit le polynôme $Q(\omega) = Lq^4\omega^4 - 2q^3\omega^3 + (L - 4Lpq + 2q - 6q^2p + 2Lp^2q^2)\omega^2 + (6qp^2 - 2p)\omega + 2p^3 + Lp^4$. On a deux cas :

1. *pour $0 < L \leqslant \underline{L} = 2^{3/4}\omega_{\min}^{1/8}\omega_{\max}^{-5/8} + o(\omega_{\max}^{-5/8})$, p^* et q^* sont donnés par la résolution du système $|\rho(i\omega_{\min})| = |\rho(i\omega_1)| = |\rho(i\omega_{\max})|$ où ω_1 est la racine de Q réalisant le maximum de $|\rho|$.*
2. *pour $\underline{L} < L \leqslant \overline{L} = C/\sqrt{\omega_{\min}}$, $C = 0.04305\ldots$, p^* et q^* sont donnés par la résolution du système d'équations non linéaires $|\rho(i\omega_{\min})| = |\rho(i\omega_1)| = |\rho(i\omega_2)|$, où $\omega_1 < \omega_2$ sont les racines de Q réalisant le maximum de $|\rho|$.*

Nous construisons maintenant, pour p et q strictement positifs, les conditions de transmission

$$\mathcal{B}_1 = \partial_x + p + q\,\partial_t, \qquad \mathcal{B}_2 = \partial_x - p - q\,\partial_t. \tag{10}$$

THÉORÈME 4.2. – *Si f appartient à $H^{1,\frac{1}{2}}(\Omega \times (0,T))$ et u_0 à $H^2(\Omega)$, l'algorithme (2) avec les conditions de transmission (10) est défini dans $\prod_{j=1,2} H^{3,\frac{3}{2}}(\Omega_j \times (0,T))$ et converge dans $\prod_{j=1,2} L^2((0,T) \times \Omega_j)$ vers la solution u de (1).*

THÉORÈME 4.3. – *Pour l'algorithme sans recouvrement, quand Δt tend vers 0 on a*

$$\max_{\omega_{\min} \leqslant |\omega| \leqslant \omega_{\max}} |\rho(i\omega)| = 1 - 4\left(\frac{\omega_{\min}}{\pi}\right)^{1/8} \Delta t^{1/8} + o(\Delta t^{1/8}). \tag{11}$$

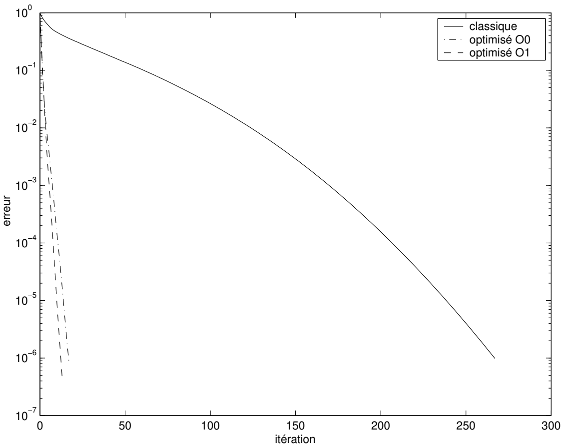
Si $L > 0$, supposons la taille du recouvrement $L = C_L \Delta t^\beta$. Lorsque Δt tend vers 0, on a

$$\max_{\omega_{\min} \leqslant |\omega| \leqslant \omega_{\max}} |\rho(i\omega)| = \begin{cases} 1 - 2^{21/10}\omega_{\min}^{1/10} C_L^{1/5} \Delta t^{\beta/5} + o(\Delta t^{\beta/5}) & si\ \beta \leqslant 5/8, \\ 1 - 4(\frac{\omega_{\min}}{\pi})^{1/8} \Delta t^{1/8} + o(\Delta t^{1/8}) & si\ \beta > 5/8. \end{cases} \tag{12}$$

Ces résultats théoriques montrent un net avantage à nos méthodes optimisées puisque pour la méthode SWR classique, d'une part il n'y a pas convergence en l'absence de recouvrement, et d'autre part le taux de convergence asymptotique pour un recouvrement $L = C_L \Delta t^\beta$ est en $1 - C_L\sqrt{2\omega_{\min}}\Delta t^\beta + o(\Delta t^\beta)$.

5. Expériences numériques

Une discrétisation de l'algorithme avec un schéma aux différences finies centré en espace et implicite en temps montre que pour un recouvrement de taille $L = 0.04$ et deux sous-domaines $\Omega_1 = [0, 3.02]$ et $\Omega_2 = [2.98, 6]$, l'algorithme classique a besoin de 267 itérations pour converger à une tolérance de $1e - 6$ pour $t \in [0, 10]$. Pour les mêmes données, l'algorithme avec des conditions optimisées d'ordre zéro nécessite 17 itérations et avec des conditions optimisées d'ordre un 13 itérations. La figure ci-contre décrit l'erreur en fonction du nombre d'itérations.



Références bibliographiques

[1] Gander M.J., Halpern L., Nataf F., Optimal Convergence for Overlapping and Non-Overlapping Schwarz Waveform Relaxation, Eleventh International Conference of Domain Decomposition Methods, Lai C-H., Bjørstad P., Cross M., Widlund O. editors, ddm.org (1999).

[2] Gander M.J., Zhao H., Overlapping Schwarz Waveform Relaxation for Parabolic Problems in Higher Dimension, à paraître dans BIT (2002).

[3] Japhet C., Nataf F., Rogier F., The Optimized Order 2 method. Application to convection-diffusion problems, Future Generation Computer Systems FUTURE 18 (2001).

[4] Lelarasmee E., Ruehli A.E., Sangiovanni-Vincentelli A.L., The Waveform Relaxation Method for Time-Domain Analysis of Large Scale Integrated Circuits, IEEE Trans. on CAD of IC and Syst. 1 (1982) 131–145.

[5] Lions J.L., Magenes E., Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris (1968).

[6] Meinardus G., Approximation of functions: Theory and Numerical methods, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York 1967.

[7] Picard E., Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 9 (1893) 217–271.