
Méthodes itératives I

EXERCICE 1 : NON CONVERGENCE DE LA MÉTHODE DE JACOBI.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < 1$ et que la méthode de Jacobi converge si et seulement si $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

EXERCICE 2 : MÉTHODE DU GRADIENT À PAS FIXE.

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$ telle qu'il existe un réel α strictement positif avec

$$\langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Q.1) Montrer que pour tout vecteur $b \in \mathbb{R}^n$, le système linéaire $Ax = b$ admet une unique solution.

Q.2) Soient θ un réel et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de vecteurs définis par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k - \theta(Ax_k - b), \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Montrer que pour $\theta \in \left] 0, \frac{2\alpha}{\|A\|_2^2} \right[$, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution du système linéaire $Ax = b$.

EXERCICE 3 : AUTRE EXEMPLE DE LA MÉTHODE DU GRADIENT.

Soit A une matrice carrée d'ordre $n > 0$, et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On veut résoudre le système linéaire

$$Ax = b. \tag{1}$$

On note D la matrice diagonale constituée des éléments diagonaux de la matrice A . Soit $\alpha \neq 0$, on étudie la méthode itérative

$$x^{k+1} = (I_n - \alpha D^{-1}A) x^k + \alpha D^{-1}b.$$

Q.1) Montrer que la méthode est consistante, *i.e* si $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x alors x est solution de (1).

Q.2) Exprimer les coefficients de la matrice $D^{-1}A$ en fonction de ceux de A .

Q.3) On suppose que $0 < \alpha \leq 1$ et que A est à **diagonale strictement dominante**, *i.e*

$$|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Montrer que la méthode est bien définie et

$$\|I_n - \alpha D^{-1}A\|_{\infty} < 1.$$

En déduire que la méthode est convergente.

EXERCICE 4 : MÉTHODE DE RELAXATION.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = I_d - E - F$ avec

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q.1) Montrer que A est inversible.

Q.2) Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que la matrice $\left(\frac{1}{\omega}I_d - E\right)$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour $0 < \omega < 2$ avec $\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, on considère la méthode itérative, pour la résolution du système linéaire $Ax = b$, définie par :

$$\left(\frac{1}{\omega}I_d - E\right) x^{k+1} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega}I_d\right) x^k + b,$$

et note $\mathcal{L}_{\omega} = \left(\frac{1}{\omega}I_d - E\right)^{-1} \left(F + \frac{1-\omega}{\omega}I_d\right)$.

Q.3) Calculer en fonction de ω , les valeurs propres de $\mathcal{L}_{\omega}$ et son rayon spectral.

Q.4) Pour quelles valeurs de ω la méthode est-elle convergente? Déterminer $\omega_0 \in]0, 2[$ tel que $\rho(\mathcal{L}_{\omega_0}) = \min \left\{ \rho(\mathcal{L}_{\omega}), \omega_0 \in]0, 2[, \omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.

EXERCICE 5 : MÉTHODE DE JACOBI ET GAUSS-SIEDEL POUR UNE MATRICE TRIDIAGONALE.

On considère la matrice tridiagonale A d'ordre $n \geq 3$ à coefficients réels ou complexes donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix},$$

où les coefficients a_i étant non nuls.

Q.1) Montrer que pour toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout scalaire t , la matrice $B(t) = (b_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par

$$b_{i,j}(t) = t^{i-j} b_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

est semblable à B .

Q.2) Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice J intervenant dans la méthode de Jacobi (pour la résolution de $Ax = b$) s'écrit sous la forme $P_J(\lambda) = P(\lambda^2)\lambda^q$, où P est polynôme tel que $P(0) \neq 0$.

Q.3) Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice G intervenant dans la méthode de Gauss-Siedel s'écrit $P_G(\lambda^2) = P_J(\lambda)\lambda^n$.

Q.4) Montrer que $\rho(G) = (\rho(J))^2$ et $R_\infty(G) = 2R_\infty(J)$, et conclure.