

Chapitre 7

Formules de quadrature

Sommaire

7.1	Formules de quadrature élémentaires	3
7.2	Méthode composite	6
7.3	Méthode de Gauss	10
7.4	quadrature adaptative	12

Les formules de quadrature sont des formules approchées de calcul d'intégrales de Riemann du type

$$I := \int_a^b f(x) dx.$$

La formule la plus connue est la formule des trapèzes. elle consiste à introduire des points équidistants a_i dans l'intervalle, $a =: a_0 < a_1 < \dots < a_N < a_{N+1} := b$, avec $a_{i+1} - a_i = h$, et à remplacer l'intégrale (l'aire de la portion de plan située entre la courbe et l'axe des x) par la somme suivante

$$I_N := \frac{h}{2} f(a) + h(f(a_1) + \dots + f(a_i) + \dots + f(a_N)) + \frac{h}{2} f(b)$$

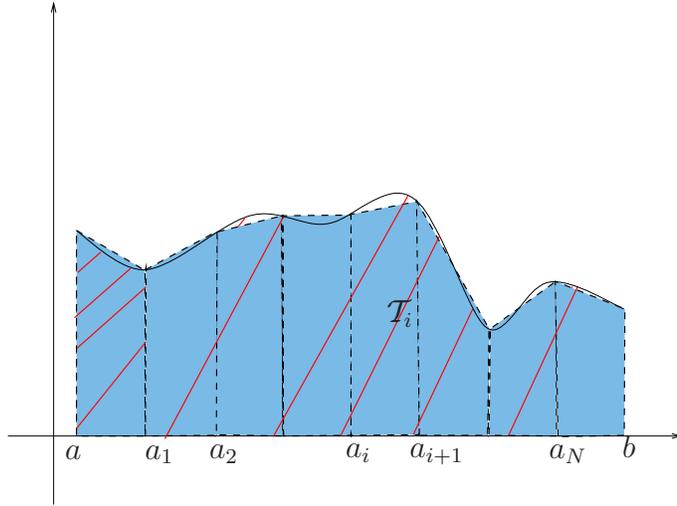


FIG. 7.1 – calcul approché par la formule des trapèzes

Récrivons la formule comme

$$\begin{aligned}
 S_N &:= \frac{h}{2} (f(a_0) + f(a_1)) \\
 &+ \frac{h}{2} (f(a_1) + f(a_2)) \\
 &+ \dots \\
 &+ \frac{h}{2} (f(a_i) + f(a_{i+1})) \\
 &+ \dots \\
 &+ \frac{h}{2} (f(a_N) + f(a_{N+1}))
 \end{aligned}$$

La quantité $\frac{h}{2} (f(a_i) + f(a_{i+1}))$ représente l'aire \mathcal{A}_i du trapèze \mathcal{T}_i . On a alors

$$S_N = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1 + \dots + \mathcal{T}_i + \dots + \mathcal{T}_N. \quad (7.1)$$

Maintenant pourquoi garder un partage équidistant. On peut avoir avantage à généraliser la formule (7.1), avec des points distribués différemment, $a_{i+1} - a_i = h_i$, et $\mathcal{A}_i = \frac{h_i}{2} (f(a_i) + f(a_{i+1}))$.

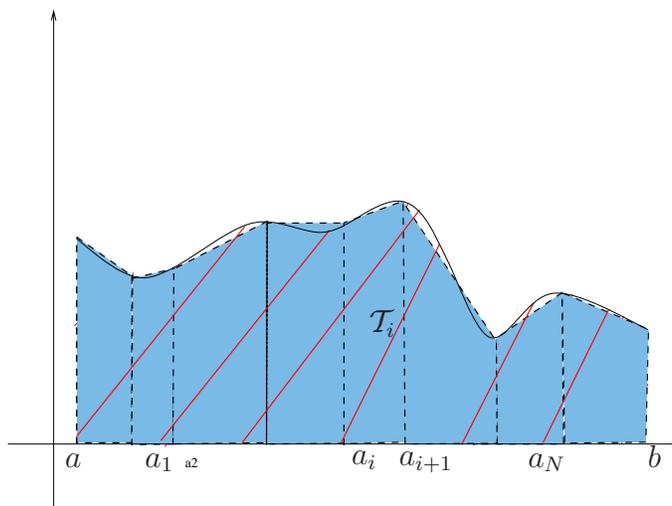


FIG. 7.2 – calcul approché par la formule des trapèzes, choix des points non équidistants

On connaît également les sommes de Riemann :

$$\sum_{j=0}^N (a_{j+1} - a_j) f(b_j), \quad b_j \in [a_j, a_{j+1}]$$

L'intégrale de Riemann d'une fonction réglée est définie comme la limite de telles sommes.

Questions

1. Peut-on évaluer l'erreur en fonction de h ?
2. Peut-on en trouver d'autres ?
3. Peut-on les comparer ?

7.1 Formules de quadrature élémentaires

Ce sont les formules qui permettent de calculer dans un sous-intervalle. Reprenons la formule

$$I_j = \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x) dx \sim \frac{h_j}{2} (f(a_j) + f(a_{j+1}))$$

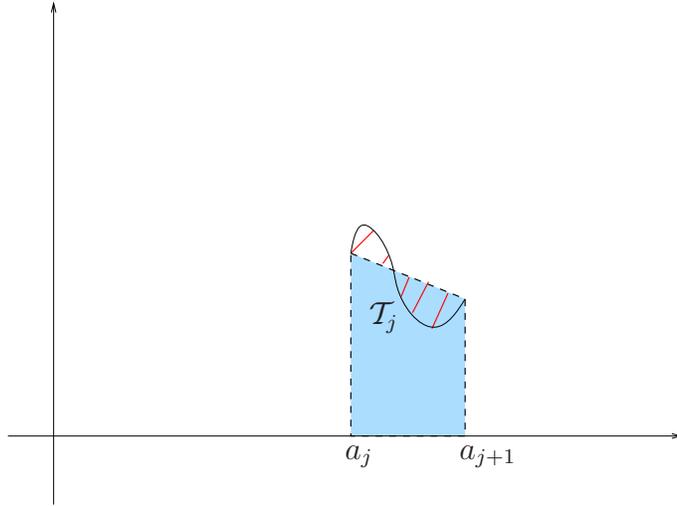


FIG. 7.3 – calcul élémentaire par la formule des trapèzes

On voit bien que si f est affine sur l'intervalle, les deux quantités coïncident. D'où une autre façon d'obtenir la formule élémentaire. On remplace f par son polynôme d'interpolation de degré ≤ 1 sur (a_j, a_{j+1}) .

$$f(x) = p_1(x) + \frac{1}{2}f'''(\zeta_x)(x - a_j)(x - a_{j+1}), \quad \zeta_x \in]a_j, a_{j+1}[$$

et on écrit

$$I_j = \int_{a_j}^{a_{j+1}} p_1(x) dx + \frac{1}{2} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'''(\zeta_x)(x - a_j)(x - a_{j+1}) dx$$

On applique la formule de la moyenne au dernier terme, et on obtient

$$I_j = \int_{a_j}^{a_{j+1}} p_1(x) dx + \frac{1}{2}f'''(\zeta_j) \int_{a_j}^{a_{j+1}} (x - a_j)(x - a_{j+1}) dx = \int_{a_j}^{a_{j+1}} p_1(x) dx - \frac{h_j^3}{12}f'''(\zeta_j)$$

D'autre part $p_1 = \frac{1}{h_j}(f(a_{j+1})(x - a_j) - f(a_j)(x - a_{j+1}))$, et

$$\int_{a_j}^{a_{j+1}} p_1(x) dx = \frac{h_j}{2}(f(a_j) + f(a_{j+1}))$$

Méthode des trapèzes $I_j = \frac{h_j}{2}(f(a_j) + f(a_{j+1})) - \frac{h_j^3}{12}f'''(\zeta_j)$

Si nous interpolons dans \mathbb{P}_0 , nous obtenons les 3 formules, suivant que nous interpolons à gauche, à droite ou au point milieu

Méthode	Formule	Erreur
formule des rectangles à gauche	$I_j \sim h_j f(a_j)$	$\frac{h_j^2}{2} f'(\zeta_j)$
formule des rectangles à droite	$I_j \sim h_j f(a_{j+1})$	$\frac{h_j^2}{2} f'(\zeta_j)$
formule du point milieu	$I_j \sim h_j f\left(\frac{a_j + a_{j+1}}{2}\right)$	$\frac{h_j^3}{24} f''(\zeta_j)$

La méthode de Simpson, utilise l'interpolation dans \mathbb{P}_2 aux points a_j , a_{j+1} , et $\frac{a_j+a_{j+1}}{2}$. On démontre que l'on a

Méthode de Simpson $I_j = h_j \left(\frac{1}{6} f(a_j) + \frac{2}{3} f\left(\frac{a_j + a_{j+1}}{2}\right) + \frac{1}{6} f(a_{j+1}) \right) - \frac{h_j^5}{2880} f^{(4)}(\zeta_j)$

On note sur cette formule qu'elle est en fait exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On appelle formules de Newton-Cotes toutes les formules qu'on obtient de cette manière. Pour systématiser on fait le changement de variable dans I_j :

$$\begin{aligned} [-1, 1] &\rightarrow [a_j, a_{j+1}] \\ y &\mapsto x = \frac{a_j, a_{j+1}}{2} + \frac{h_j}{2} y \end{aligned}$$

et donc

$$I_j = \frac{h_j}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a_j, a_{j+1}}{2} + \frac{h_j}{2} y\right) dy.$$

On notera $\varphi_j(y) = f\left(\frac{a_j, a_{j+1}}{2} + \frac{h_j}{2} y\right)$.

On se donne des points $\tau_i = -1 + 2i/n$. Pour les formules de Newton-Cotes fermées, i varie de 0 à n . Pour les formules ouvertes i varie de 1 à $n-1$. Commençons par les formules fermées. On écrit pour tout f dans $[-1, 1]$,

$$\int_{-1}^1 \varphi(y) dy = \sum_{i=0}^n \omega_i \varphi(\tau_i) + E(\varphi).$$

Avec $n+1$ coefficients à déterminer, on peut réclamer que la formule soit exacte dans \mathbb{P}_n .

Théorème 7.1 – *Il existe une et une seule formule de quadrature exacte dans \mathbb{P}_n . Les poids sont donnés par*

$$\omega_i = \int_{-1}^1 \ell_i(y) dy$$

– Si n est pair, la formule est exacte dans \mathbb{P}_{n+1} .

–

$$E(\varphi) = \begin{cases} \frac{\varphi^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{-1}^1 y \Pi_{n+1}(y) dy & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{-1}^1 \Pi_{n+1}(y) dy & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

Démonstration Prenons pour φ le polynôme d'interpolation de Lagrange au point τ_i . On en déduit les coefficients par la formule précédente, ce qui donne aussi l'unicité. Le deuxième point relève de considérations de parité. Pour l'erreur on écrit pour n impair la formule d'erreur pour le polynôme d'interpolation de φ aux points τ_i :

$$\varphi(y) = p_n(y) + \frac{\varphi^{(n+1)}(\zeta_y)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(y).$$

Il faut alors intégrer sur $[-1, 1]$, utilisant le fait que $\int_{-1}^1 p_n(y) dy = \sum_{i=0}^n \omega_i \varphi(\tau_i)$. L'intégration précise est alors un peu difficile, voir dans les livres. ■

Le cas $n = 1$ correspond à la formule des trapèzes, le cas $n = 2$ à la formule de Simpson.

Les formules de Newton-Cotes ouvertes ne sont utilisées que dans le cas du point-milieu.

On définit l'ordre r des formules de Newton-Cotes comme le plus grand entier tel que la formule est exacte pour $f \in \mathbb{P}_{r-1}$.

Théorème 7.2 *Si n est pair, $r = n + 1$, Si n est impair, $r = n$.*

Méthode	nombre de points	ordre
rectangles	1	1
point-milieu	1	2
trapèzes	2	2
Simpson	3	4

7.2 Méthode composite

On recolle maintenant les intégrales élémentaires. Pour cela les points $\xi_{j,i}$ se déduisent tous des points $\tau_i = -1 + 2i/n$ au moyen de la transformation affine et

$$I = \sum_{j=0}^N \frac{h_j}{2} \left(\sum_{i=0}^n \omega_i f(\xi_{j,i}) + E(\varphi_j) \right)$$

avec $\sum_{i=0}^n \omega_i = 2$. L'erreur globale $E(f)$ est donc

$$E(f) = \sum_{j=0}^N \frac{h_j}{2} \begin{cases} \left(\frac{h_j}{2}\right)^{n+2} \frac{f^{(n+2)}(\xi_j)}{(n+2)!} \int_{-1}^1 y \Pi_{n+1}(y) dy & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \left(\frac{h_j}{2}\right)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi_j)}{(n+1)!} \int_{-1}^1 \Pi_{n+1}(y) dy & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

Que se passe-t-il pour la méthode des trapèzes ? L'erreur s'écrit

$$E(f) = - \sum_{j=0}^N \frac{h_j^3}{12} f'''(\zeta_j), \quad \zeta_j \in]a_j, a_{j+1}[$$

Si $h_j \equiv h$, on peut montrer qu'il existe $\eta \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} f(a) + h(f(a_1) + \dots + f(a_i) + \dots + f(a_N)) + \frac{h}{2} f(b) - \frac{(b-a)^2 h^2}{12} f'''(\eta)$$

Théorème 7.3 *On suppose que la formule de quadrature élémentaire est d'ordre r et que $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b])$. Soit $h = \sup h_j$. Alors*

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{j=0}^N \frac{h_j}{2} \sum_{i=0}^n \omega_i f(\xi_{j,i}) \right| \leq Ch^{r+1} \sup_{[a,b]} |f^{(r+1)}(x)|$$

Mise en œuvre :

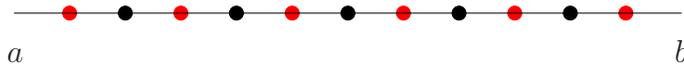


FIG. 7.4 – N nœuds de la formule de quadrature

Supposons que pour le pas h_N les nœuds intérieurs soient les ronds noirs du dessin, $a + i * h_N$. Pour le pas $h_{N+1} = h_N/2$, on ajoute les points rouges.

$$S_{N+1} = S_N/2 + h_{N+1}(f(a + h_{N+1}) + \dots + f(a + 3h_{N+1}) + \dots + f(a + (2N - 1)h_{N+1}))$$

```

function T = trapez(f,a, b, tol);
% TRAPEZ(f,a, b, tol) tries to integrate int_a^b f(x) dx
% to a relative tolerance tol using the composite
% trapezoidal rule.
%
h = b - a; s = (f(a) + f(b)) / 2;
tnew = h * s; zh = 1; told = 2*tnew;
while abs (told - tnew) > tol * abs (tnew),
told = tnew; zh = 2 * zh;
h = h / 2;
s = s + sum(f(a + [1:2:zh]*h));
tnew = h * s;
end;
T = tnew;

```

Qu'en est-il pour Simpson ? Les extrémités sont affectées du poids $1/6$, les points noirs du poids $2/6$ et les points rouge du poids $4/6$. Mise en œuvre :

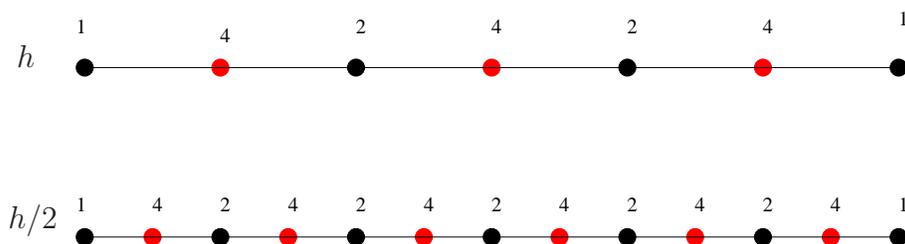


FIG. 7.5 – N œuds de la formule de quadrature avec les poids pour Simpson

On écrit

$$S(h) = \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 4s_4)$$

Notons s_j^{new} les nouvelles valeurs, pour $h_1 = h/2$.

$$s_1^{new} = s_1, \quad s_2^{new} = s_2 + s_4, \quad s_4^{new} = f(a + h_1/2) + f(a + 3h_1/2) + \dots$$

On écrit alors

```

function S = simpson (f,a,b,tol);
% SIMPSON (f,a, b,tol) tries to integrate int_a^b f(x) dx
% to a relative tolerance tol using the composite
% Simpson rule.
%
h = (b-a)/2; s1 = f(a) + f(b); s2 = 0;
s4 = f(a + h); snew = h*(s1 + 4 * s4)/6
zh = 2; sold=2*snew;
while abs(sold-snew)>tol*abs(snew),
sold = snew; zh = 2 * zh; h = h / 2;
s2 = s2 + s4;
s4 = sum(f(a +[1:4:zh]*h));
snew = h*(s1 + 2*s2 + 4*s4)/6;
end
S = snew;

```

i	h_i	$T(h_i)$	$\frac{T(h_i) - I}{T(h_{i-1}) - I}$	$S(h_i)$	$\frac{S(h_i) - I}{S(h_{i-1}) - I}$
0	1	0.339785228		0.357516745	
1	$\frac{1}{2}$	0.353083866	0.31293	0.358992305	0.09149
2	$\frac{1}{4}$	0.357515195	0.26840	0.359130237	0.07184
3	$\frac{1}{8}$	0.358726477	0.25492	0.359140219	0.06511
4	$\frac{1}{16}$	0.359036783	0.25125	0.359140870	0.06317
5	$\frac{1}{32}$	0.359114848	0.25031	0.359140911	0.06267
6	$\frac{1}{64}$	0.359134395	0.25007	0.359140914	0.06254



Erreur divisée par 4



Erreur divisée par 16

FIG. 7.6 – Comparaison des méthodes des trapèzes et de Simpson