

---

**GROUPE DE TRAVAIL "COHOMOLOGIE ÉTALE"**  
**-CONSTRUCTION DES FONCTEURS  $(f_!, f^!)$**

*par*

Nguyen Thi Kim Ngan

---

**Table des matières**

1. Rappel sur les 2-foncteurs .....	1
2. Construction du foncteur $f_!$ .....	2
3. Démonstration de l'existence et de l'unicité de $f_!$ .....	9
4. Foncteur $f^!$ .....	18
Références .....	19

Cet exposé se concentre à présenter la construction du foncteur  $f_!$  - un des six foncteurs de Grothendieck ([Dels1, 2.1]) - à partir des idées préliminaires de Deligne ([SGA 4, chap. XVII]) et la construction générale ainsi que la démonstration complète d'Ayoub ([Ayo, 1.3]).

Je voudrais remercier F. Déglise pour des discussions sur ce problème et aussi pour des références intéressantes.

**1. Rappel sur les 2-foncteurs**

(cf. [Del])

**Définition 1.1.** — Une 2-catégorie est une catégorie avec des objets, des 1-morphismes  $F : X \rightarrow Y$  entre des objets, et des 2-morphismes entre des 1-morphismes de même source et but.

**Définition 1.2.** — Un 2-foncteur  $F$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  vers une 2-catégorie  $\mathcal{D}$  est :

- (a) une application  $Ob(\mathcal{C}) \rightarrow Ob(\mathcal{D})$ ,
- (b) pour tout  $X, Y \in \mathcal{C}$ , une application de  $\text{Hom}(X, Y)$  dans l'ensemble des 1-morphismes de  $F(X)$  à  $F(Y)$ ,
- (c) pour  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  dans  $\mathcal{C}$ , un 2-morphisme inversible (2-isomorphisme de connexion)

$$F(gf) \xrightarrow{c(f,g)} F(g)F(f).$$

Ces données satisfont :

- (i) pour une composée  $hgf$  dans  $\mathcal{C}$ , le diagramme des isomorphismes déduits de (c)

$$\begin{array}{ccc} F(hgf) & \longrightarrow & F(hg)F(f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(h)F(gf) & \longrightarrow & F(h)F(g)F(h) \end{array}$$

est commutatif.

- (ii) pour  $X \in \mathcal{C}$ ,  $F(Id_X)$  est une équivalence *i.e.* il existe  $u : F(X) \rightarrow F(X)$  tel que  $u \circ F(Id_X)$  et  $F(Id_X) \circ u$  sont isomorphes à  $Id_{F(X)}$ .

## 2. Construction du foncteur $f_!$

**Théorème 2.1.** — ([Ayo, theo. 1.3.1])

**Données A :** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie admettant des produits fibrés. Soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux sous-catégories (non nécessairement pleines) de  $\mathcal{C}$  telles que :

- (a) Les isomorphismes sont dans  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Les flèches de  $\mathcal{C}_1$  (*resp.* de  $\mathcal{C}_2$ ) sont stables par pull-back suivant toute flèche de  $\mathcal{C}$ .
- (b) Toute flèche  $f$  de  $\mathcal{C}$  se factorise :  $f = f_2 \circ f_1$  avec  $f_i$  dans  $\mathcal{C}_i$  pour  $i = 1, 2$ .
- (c) Pour toute flèche  $B \rightarrow A$  de  $\mathcal{C}$ , la diagonale  $B \rightarrow B \times_A B$  est dans  $\mathcal{C}_1$ .

**Données B :** Supposons donnée une 2-catégorie  $\mathcal{D}$  et deux 2-foncteurs covariants :

$$H_i : \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{D}$$

tels que pour tout  $X \in Ob(\mathcal{C})$ ,  $H_1(X) = H_2(X)$ . On suppose également donné un isoéchange codirectionnel de type  $\swarrow$  sur le couple  $(H_1, H_2)$  pour la classe des carrés commutatifs ayant les flèches verticales dans  $\mathcal{C}_2$

et les flèches horizontales dans  $\mathcal{C}_1$ . Plus explicitement, pour tout carré commutatif  $(C)$  :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{i'} & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{i} & \bullet \end{array}$$

avec  $i, i'$  dans  $\mathcal{C}_1$  et  $f, f'$  dans  $\mathcal{C}_2$ , on a un 2-isomorphisme :

$$a(C) : H_2(f) \circ H_1(i') \xrightarrow{\sim} H_1(i) \circ H_2(f')$$

compatible aux 2-isomorphismes de connexions  $c_i$  des 2-foncteurs  $H_i$  de la manière habituelle. On supposera de plus que pour  $i = id$  et  $i' = id$  (resp.  $f = id$  et  $f' = id$ ) le 2-morphisme  $a(C)$  est l'identité.

**Conclusion :** Il existe alors un 2-foncteur

$$H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

tel que  $H(X) = H_1(X) = H_2(X)$  pour tout  $X \in Ob(\mathcal{C})$ , ainsi que des isomorphismes de 2-foncteurs :

$$u_i : H \circ [\mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}] \rightarrow H_i$$

pour  $i = 1, 2$  qui soient l'identité sur les objets et tel que l'échange sur  $(H_1, H_2)$  soit la restriction de l'échange trivial sur  $(H, H)$  par les isomorphismes  $u_1$  et  $u_2$ . De plus le triple  $(H, u_1, u_2)$  est unique à un isomorphisme unique près.

Considérons la catégorie  $\mathcal{C}$  des schémas (noetheriens) et des morphismes séparés de type fini. Soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  ses sous-catégories dont les morphismes sont des immersions ouvertes (donc séparées ([Har, cor. 4.6])) et des morphismes propres.

Soit  $\mathcal{D}$  une 2-catégorie des catégories triangulées avec pour 1-morphismes les foncteurs triangulés et pour 2-morphismes les transformations naturelles triangulées. Les catégories dérivées  $D(\Lambda_X - mod)$  des faisceaux de  $\Lambda$ -module sur  $X_{et}$  (ici on note comme dans l'exposé de Déglise [Dels2]) sont des objets de  $\mathcal{D}$ .

On veut construire un 2-foncteur  $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  comme dans le théorème 2.1, explicitement comme suivant :

$$\begin{array}{ll} H : \mathcal{C} & \rightarrow \mathcal{T} \\ X & \mapsto D(\Lambda_X - mod) \\ X \xrightarrow{f} Y & \mapsto f_! : D(\Lambda_X - mod) \rightarrow D(\Lambda_Y - mod) \end{array}$$

Maintenant on vérifie les données du théorème 2.1.

**Théorème 2.2.** — (Un théorème de Nagata et Deligne ([**Con**]))

Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme des schémas (noetheriens) de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est séparé.
- (ii) il existe une factorisation

$$Y \xrightarrow{j} \bar{Y} \xrightarrow{p} X$$

où  $j$  est une immersion ouverte et  $p$  est propre.

D'après le théorème 2.2, les catégories  $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  satisfont la donnée A dans le théorème d'Ayoub **sauf (c) mais on espère ça n'influence pas à la démonstration dans notre cas.**

**2.1. Rappel la définition du foncteur  $f_!$  sur les faisceaux.** — ([**SGA 4**, VIII, partie 6] ou [**Mil**, p. 73-78])

Considérons  $Z \xrightarrow{i} X \xleftarrow{j} U$  où  $j$  est une immersion ouverte et  $Z = X - U$ . Soit  $F$  un faisceau étale sur  $X$ . On pose  $F_1 = i^*F$  et  $F_2 = j^*F$ . Comme  $\text{Hom}(F, j_*j^*F) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(j^*F, j^*F)$ , il existe un morphisme canonique  $F \rightarrow j_*j^*F$  correspond à l'identité de  $j^*F$ . Donc il existe un morphisme :

$$\phi_F : F_1 = i^*F \rightarrow i^*j_*j^*F = i^*j_*F_2.$$

Et on peut associer  $F$  à une triple  $(F_1, F_2, \phi_F)$ .

Soit  $\mathbf{T}(X)$  une catégorie dont les objets sont les triples  $(F_1, F_2, \phi)$  où  $F_1 \in \mathbf{S}(Z_{et})$  (catégorie des faisceaux étales sur  $Z$ ),  $F_2 \in \mathbf{S}(U_{et})$  et  $\phi : F_1 \rightarrow i^*j_*F_2$ . Un morphisme  $(F_1, F_2, \phi) \rightarrow (F'_1, F'_2, \phi')$  est une paire  $(\psi_1, \psi_2)$  où  $\psi_1 : F_1 \rightarrow F'_1$ ,  $\psi_2 : F_2 \rightarrow F'_2$  et ces deux morphismes sont compatibles avec  $\phi, \phi'$  tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\phi} & i^*j_*F_2 \\ \psi_1 \downarrow & & i^*j_*\psi_2 \downarrow \\ F'_1 & \xrightarrow{\phi'} & i^*j_*F'_2. \end{array}$$

**Théorème 2.3.** — ([**Mil**, II, theo. 3.10]) Il existe un foncteur  $\mathbf{S}(X_{et}) \rightarrow \mathbf{T}(X)$  qui envoie  $F$  vers  $(i^*F, j^*F, \phi_F)$ . Et c'est une équivalence entre des catégories.

On définit six foncteurs suivants (vu  $\mathbf{S}(X)$  identique à  $\mathbf{T}(X)$ ) :

$$\begin{array}{ccc} \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j_!} \\ \mathbf{S}(Z) & \xrightarrow{i_*} & \mathbf{S}(X) & \xrightarrow{j^*} & \mathbf{S}(U) \\ \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} \end{array}$$

avec

$$\begin{aligned} i^* : F_1 &\leftarrow (F_1, F_2, \phi) & j_! : (0, F_2, 0) &\leftarrow F_2 \\ i_* : F_1 &\mapsto (F_1, 0, 0) & j^* : (F_1, F_2, \phi) &\mapsto F_2 \\ i^! : \ker\phi &\leftarrow (F_1, F_2, \phi) & j_* : (i^*j_*F_2, F_2, 1) &\leftarrow F_2. \end{aligned}$$

**Proposition 2.4.** — ([Mil, prop. 3.14])

- (a) Chaque foncteur est un adjoint à gauche de celui au-dessous.
- (b) Des foncteurs  $i^*, i_*, j^*, j_!$  sont exactes et  $j_*, i^!$  sont exactes à gauche.
- (c) Des composés  $i^*j_!, i^!j_!, i^!j_*, j^*i_*$  sont zéros.
- (d) Des foncteurs  $j_*, j^*, i^!, i_*$  préservent des injectifs.

Il y a une suite exacte dans  $\mathbf{T}(X)$  :

$$0 \rightarrow (0, j^*F, 0) \rightarrow (i^*F, j^*F, \phi_F) \rightarrow (i^*F, 0, 0) \rightarrow 0$$

équivalente à une suite exacte dans  $\mathbf{S}(X)$  :

$$0 \rightarrow j_!j^*F \rightarrow F \rightarrow i_*i^*F \rightarrow 0.$$

**2.2.** Considérons le 2-foncteur suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}_1 : \mathcal{C}_1 & & \rightarrow \mathcal{T} \\ X & & \mapsto D(\Lambda_X - \text{mod}) \\ U \xrightarrow{j} X & & \mapsto j_! : D(U, j^*\Lambda) \rightarrow D(X, \Lambda) \end{array}$$

car le foncteur  $j_!$  sur les modules est exacte donc passe trivialement aux catégories dérivées et définit un foncteur  $j_! : D(j^*(\Lambda_X - \text{mod})) \rightarrow D(\Lambda_X - \text{mod})$ . Pour une composée  $h = j \circ k$  dans  $\mathcal{C}_1$ , il existe une transformation naturelle :

$$j_!k_! \xrightarrow{c(k,j)} h_! = (jk)_!.$$

Et de plus, pour une composée  $hgf$ , on a le diagramme suivant

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} (hgf)_! & \xrightarrow{c(f,hg)} & (hg)_!(f)_! \\ c(gf,h) \downarrow & & c(g,h) \downarrow \\ (h)_!(gf)_! & \xrightarrow{c(f,g)} & (h)_!(g)_!(h)_! \end{array}$$

est commutatif.

**2.3.** Considérons le 2-foncteur suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}_2 : \mathcal{C}_2 & \rightarrow & \mathcal{T} \\ X & \mapsto & D(\Lambda_X - \text{mod}) \\ X \xrightarrow{p} Y & \mapsto & Rp_* : D(X, p^* \Lambda_Y) \rightarrow D(Y, \Lambda_Y) \end{array}$$

Soit  $p : X \rightarrow Y$  un morphisme propre,  $\mathcal{A}$  un faisceau d'anneaux de torsion sur  $Y$  (ici on prend  $\mathcal{A} = \Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ) et annelons  $X$  par le faisceau d'anneaux image réciproque de  $\mathcal{A}$ . Supposons que la dimension des fibres de  $p$  soit majorée par un entier  $n$  (ici c'est bon car  $X, Y$  sont noethériens, c'est encore bon si  $X, Y$  sont quasi-compacts). D'après [SGA 4, XII 5.3 bis] (le chapitre du théorème de changement de base propre), pour chaque faisceau de  $p^*\mathcal{A}$ -modules  $F$  sur  $X$ , les faisceaux  $R^q p_* F$  sont nuls pour  $q > 2n$ . Donc d'après [SGA 4, XVII 1.2.10], le foncteur  $p_*$  admet un foncteur dérivé

$$Rp_* : D(X, p^* \Lambda) \rightarrow D(Y, \Lambda).$$

Si  $f = gh$  est le composé de deux morphismes propres  $X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z$ , on a un isomorphisme naturel ([Drew, 1.2.1])

$$Rf_* = Rg_* Rh_*.$$

En effet, soit  $C \in D(\Lambda_X - \text{mod})$  et soient  $I \rightarrow C$  une résolution injective de  $C$ ,  $J \rightarrow h_*(I)$  une résolution injective de  $h_*(I)$ , on a

$$R(g \circ h)_*(C) = (g \circ h)_*(I) \cong g_*(h_*(I)) \xleftarrow{\sim} g_*(J) = Rg_*(h_*(I)) = Rg_*(Rh_*(C)).$$

Et de plus, pour une composée  $hgf$ , on a le diagramme suivant

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} R(hgf)_* & \xrightarrow{c(f,hg)} & R(hg)_* Rf_* \\ c(gf,h) \downarrow & & c(g,h) \downarrow \\ Rh_* R(gf)_* & \xrightarrow{c(f,g)} & Rh_* Rg_* Rf_* \end{array}$$

est commutatif.

**2.4.** Considérons le diagramme suivant

$$Z \xrightarrow{i} X \xleftarrow{j} U$$

dans lequel  $i$  est une immersion fermée et  $j$  est une immersion ouverte complémentaire. On a

$$j_!j^* \rightarrow 1 \rightarrow Ri_*i^* \xrightarrow{+1}.$$

(Cette suite est exacte sur les faisceaux. Elle est encore exacte sur les complexes de faisceaux car  $j^*, i^*$  sont exacts,  $j_!$  aussi et  $i$  est fini donc  $i_*$  est exact). On a un corollaire important suivant grâce à la suite exacte ci-dessus

**Corollaire 2.5.** — Soit  $M \in D(\Lambda_X - \text{mod})$ . Alors  $M = 0$  si et seulement si  $j^*M = 0$  et  $i^*M = 0$ .

ou le corollaire équivalent suivant

**Corollaire 2.6.** — Soit  $\phi : M' \rightarrow M$  un morphisme dans  $D(\Lambda_X - \text{mod})$ . Alors  $\phi$  est un isomorphisme si et seulement si  $j^*\phi, i^*\phi$  sont des isomorphismes.

2.4.1. Considérons le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccccc} X' = U \times_Y X & \xrightarrow{j'} & X & \xleftarrow{i'} & X'' = X \times_Y V \\ p' \downarrow & & p \downarrow & & p'' \downarrow \\ U & \xrightarrow{j} & Y & \xleftarrow{i} & V \end{array}$$

dans lequel  $p, p', p''$  sont des morphismes propres,  $j, j'$  sont des immersions ouvertes et  $i, i'$  sont des immersions fermées. D'après le théorème de changement de base propre ([Drew, theo. 2.1]), on a

$$j^*Rp_* \xrightarrow{\sim} Rp'_*j'^*.$$

D'une part,  $j^*j_! = 1$  donc

$$(3) \quad j^*(Rp_*j_!) \xrightarrow{\sim} Rp'_*j'^*j_! \xrightarrow{\sim} Rp'_* \xrightarrow{\sim} j^*(j_!Rp'_*).$$

D'autre part, d'après [Har, cor. 4.8],  $i$  est une immersion fermée donc propre, donc on peut appliquer aussi le théorème de changement de base propre :

$$(4) \quad i^*(Rp_*j_!) \xrightarrow{\sim} Rp''_*i'^*j_! = Rp''_*0 = 0 = i^*(j_!Rp'_*).$$

D'après les isomorphismes 3, 4 et le corollaire 2.6, il vient que

$$Rp_*j_! \xrightarrow{\sim} j_!Rp'_*.$$

2.4.2. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j'} & X \\ p' \downarrow & & p \downarrow \\ V & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

dans lequel  $j, j'$  sont des immersions ouvertes et  $p, p'$  sont des morphismes propres. Soit  $X' = V \times_Y X$  le produit fibré de  $V, X$  sur  $Y$ , on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{k} & X' & \xrightarrow{j'_1} & X \\ p' \downarrow & & p'_1 \downarrow & & p \downarrow \\ V & \xlongequal{\quad} & V & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

où  $p' = p'_1 k$  et  $j' = j'_1 k$ . Ici  $k$  est une immersion ouverte propre donc  $k_! = k_*$ . Alors

$$Rp_* j'_! = Rp_*(j'_1)_! k_! \xrightarrow{\sim} j_! R(p'_1)_* k_* = j_! Rp'_*$$

2.4.3. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j''} & X \\ q' \downarrow & & q \downarrow \\ V & \xrightarrow{j'} & Y \\ p' \downarrow & & p \downarrow \\ W & \xrightarrow{j} & Z \end{array}$$

où  $j, j', j''$  sont des immersions ouvertes et  $p, p'q, q'$  sont des morphismes propres. On a

$$R(pq)_* j''_! \xrightarrow{\sim} Rp_* Rq_* j''_! \xrightarrow{\sim} Rp_* j'_! Rq'_! \xrightarrow{\sim} j_! Rp'_* Rq'_! \xrightarrow{\sim} j_! R(p'q')_*.$$

2.4.4. De manière analogue, pour le diagramme commutatif suivant

$$(6) \quad \begin{array}{ccccc} U' & \xrightarrow{j'_1} & U & \xrightarrow{j'_2} & X \\ p \downarrow & & q \downarrow & & r \downarrow \\ V' & \xrightarrow{j_1} & V & \xrightarrow{j_2} & Y \end{array}$$

où  $j_1, j_2, j'_1, j'_2$  sont des immersions ouvertes et  $p, q, r$  sont des morphismes propres, on a

$$Rr_*(j'_2 j'_1)_! \xrightarrow{\sim} Rr_*(j_2)_!(j'_1)_! \xrightarrow{\sim} (j_2)_! Rq_*(j'_1)_! \xrightarrow{\sim} (j_2)_!(j_1)_! Rp_* \xrightarrow{\sim} (j_2 j_1)_! Rp_*.$$

Alors, les foncteurs  $j_!, Rp_*$  satisfont la donnée B du théorème 2.1.

### 3. Démonstration de l'existence et de l'unicité de $f_!$

Ici on va montrer le théorème 2.1 pour les catégories  $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}$  comme dans la partie précédente et on utilise les arguments de ([Ayo, 1.3]). Pour une vue générale, voir la démonstration de la référence.

L'unicité : Soient  $H' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un autre 2-foncteur qui satisfait des mêmes conditions que  $H$  et les isomorphismes de 2-foncteurs

$$u'_i : H' \circ [C_i \rightarrow C] \rightarrow H_i$$

avec  $i = 1, 2$ . On a  $H'(X) = H(X)$  pour tout  $X \in Ob(\mathcal{C})$ . Soit  $f$  une flèche dans  $\mathcal{C}$ , on choisit une factorisation  $f = f_2 \circ f_1$  avec  $f_i \in \mathcal{C}_i$ . On définit un 2-isomorphisme  $H'(f) \rightarrow H(f)$  par

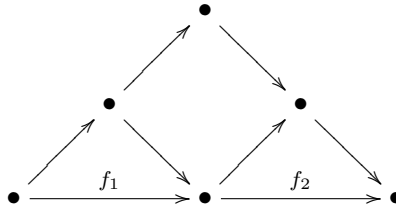
$$H'(f) \xrightarrow{\sim} H'(f_2) \circ H'(f_1) \xrightarrow{\sim} H_2(f_2) \circ H_1(f_1) \xrightarrow{\sim} H(f_2) \circ H(f_1) \xrightarrow{\sim} H(f).$$

Ce 2-isomorphisme ne dépend que de  $f$  et pas du choix de la factorisation. Il est compatible aux 2-isomorphismes de connexions. Donc ça définit un isomorphisme entre  $H'$  et  $H$ . Et il commute avec  $u_i, u'_i$  aussi.

L'existence : il nous faut construire les 1-morphismes  $H(f)$  pour  $f \in Mor(\mathcal{C})$  et les 2-isomorphismes de connexion vérifiant la compatibilité. On a besoin des notions suivantes.

**3.1. Les catégories  $\Delta_k$ .** — Soit  $\bullet \xrightarrow{f_1} \bullet \xrightarrow{f_2} \bullet \dots \bullet \xrightarrow{f_k} \bullet$  une suite de  $k$  morphismes composables de  $\mathcal{C}$ . On introduit les catégories  $\Delta_k(f_1, f_2, \dots, f_k)$  définies par :

- Les objets de  $\Delta_k(f_1, f_2, \dots, f_k)$  sont des diagrammes commutatifs à la forme suivante, par exemple pour  $k = 2$  :



tels que les flèches  $\nearrow$  sont dans  $\mathcal{C}_1$  et les flèches  $\searrow$  sont dans  $\mathcal{C}_2$ .

- Une flèche de  $\Delta_k(f_1, f_2, \dots, f_k)$  entre deux tels diagrammes est la donnée de  $\frac{1}{2}k(k+1)$  flèches dans  $\mathcal{C}_2$  reliant les objets qui ne sont pas sur la base

et se trouvant au même niveau et tel que le diagramme résultant (en identifiant les bases des deux triangles entre eux) commute.

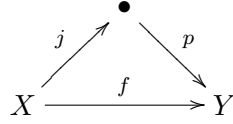
**Lemme 3.1.** — ([Ayo, lemme 1.3.2]) Les catégories  $\Delta_k(f_1, f_2, \dots, f_k)$  sont connexes.

On peut définir deux foncteurs reliant les catégories  $\Delta_k$  :

1.  $\Delta_{k_1+k_2}(f_1, \dots, f_{k_1+k_2}) \rightarrow \Delta_{k_1}(f_1, \dots, f_{k_1}) \times \Delta_{k_2}(f_{k_1+1}, \dots, f_{k_1+k_2})$  qui consiste à effacer une partie du triangle de base  $f_1, \dots, f_{k_1+k_2}$  pour ne garder que les deux sous-triangles de base  $f_1, \dots, f_{k_1}$  et  $f_{k_1+1}, \dots, f_{k_1+k_2}$ .
2.  $\phi_i : \Delta_k(f_1, \dots, f_i, f_{i+1}, \dots, f_k) \rightarrow \Delta_{k-1}(f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, f_i, f_{i+2}, \dots, f_k)$  qui consiste à composer les flèches situées dans chacune des deux bandes de base les deux côtés du sous-triangle de base  $(f_i, f_{i+1})$ .

**3.2. Foncteur associé à un chemin.** — On appelle un chemin  $c = (\epsilon_i)$  une façon de parcourir un diagramme quelconque dans  $Ob(\Delta_k)$  avec  $\epsilon_i = 1$  si la direction  $\nearrow$  et  $\epsilon_i = -1$  si la direction  $\searrow$ .

Soit  $c = (1, -1) = c_{max}^1$  un chemin associé avec un objet  $\chi = (pj)$  de  $\Delta_1(f)$  suivant :



On va construire à partir de  $c$  un foncteur

$$\psi(c) : \Delta_1(f) \rightarrow Mor_{\mathcal{D}}(\mathbb{H}(X), \mathbb{H}(Y))$$

comme suivant :

- (i) Pour  $\chi = (pj)$  un objet de  $\Delta_1(f)$ , on notera  $\psi(c)(\chi)$  le 1-morphisme de  $\mathcal{D}$  donné par la composée :  $\mathbb{H}_2(p) \mathbb{H}_1(j) = Rp_* j_!$ .
- (ii) Soit  $m : \chi' \rightarrow \chi$  une flèche de  $\Delta_1(f)$ . On associe à cette flèche un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j'} & \bullet & \xrightarrow{p'} & Y \\ \parallel \downarrow & & q \downarrow & & \parallel \downarrow \\ X & \xrightarrow{j} & \bullet & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

où  $q \in \mathcal{C}_2$ . On définit un 2-isomorphisme  $\psi(c)(m) : \psi(c)(\chi') \rightarrow \psi(c)(\chi)$  en prenant la composée de deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{H}(X) & \xrightarrow{j'_!} & \bullet & \xrightarrow{Rp'_*} & \mathbf{H}(Y) \\ \parallel \downarrow & & Rq_* \downarrow & & \parallel \downarrow \\ \mathbf{H}(X) & \xrightarrow{j_!} & \bullet & \xrightarrow{Rp_*} & \mathbf{H}(Y) \end{array}$$

car le rectangle à gauche est le 2-isomorphisme de connexion de la partie 2.4 et le rectangle à droite est le 2-isomorphisme de connexion de la partie 2.3 *i.e.*

$$Rp'_*j'_! \xrightarrow{\sim} (id_{H(Y)})_*Rp'_*j'_! \xrightarrow{\sim} Rp_*Rq_*j'_! \xrightarrow{\sim} Rp_*j_!(id_{H(X)})! \xrightarrow{\sim} Rp_*j_!$$

On a le lemme suivant

**Lemme 3.2.** — La donnée des  $\psi(c)(\chi)$  ainsi que des  $\psi(c)(m)$  définit un foncteur covariant :

$$\psi(c) : \Delta_1(f) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(H(X), H(Y)).$$

De plus, toute flèche de  $\Delta_1(f)$  est envoyée sur un isomorphisme par  $\psi(c)$ .

*Démonstration.* — Il nous reste à montrer que pour toute suite  $\chi'' \xrightarrow{n} \chi' \xrightarrow{m} \chi$ , on a  $\psi(c)(m) \circ \psi(c)(n) = \psi(c)(m \circ n)$ . Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j''} & \bullet & \xrightarrow{p''} & Y \\ \parallel \downarrow & & q' \downarrow & & \parallel \downarrow \\ X & \xrightarrow{j'} & \bullet & \xrightarrow{p'} & Y \\ \parallel \downarrow & & q \downarrow & & \parallel \downarrow \\ X & \xrightarrow{j} & \bullet & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

En appliquant les diagrammes commutatifs 5 et 2, on a

$$(Rp''_*j''_! \xrightarrow{\sim} Rp'_*j'_! \xrightarrow{\sim} Rp_*j_!) = (Rp''_*j''_! \xrightarrow{\sim} Rp_*j_!).$$

□

**Lemme 3.3.** — ([Ayo, lemme 1.3.5]) Pour deux chemins différents  $c_1, c_2$ , on a une transformation naturelle :

$$t(c_2, c_1) : \psi(c_2) \rightarrow \psi(c_1).$$

De plus, c'est un isomorphisme de foncteur.

**3.3. Construction du foncteur  $f_!$ .** — On retourne à notre but de construire  $f_!$ . On pose  $H(X) = H_1(X) = H_2(X)$  et pour  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{C}$ , on pose :

$$f_! = H(f) = \varinjlim_{\Delta_1(f)} (\Delta_1(f) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(H(X), H(Y))).$$

Ce foncteur est bien défini pour les deux raisons suivantes :

- Le foncteur  $\psi(c_{max}^1)$  envoie toute flèche de  $\Delta_1(f)$  sur un 2-isomorphisme de  $\mathcal{D}$ .
- La catégorie  $\Delta_1(f)$  est connexe.

Ces limites inductives existent encore avec  $\Delta_2, \Delta_3$  pour les mêmes raisons. Il nous faut vérifier que  $H$  est un 2-foncteur.

Soit  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  dans  $\mathcal{C}$ . Dans  $\Delta_2(f, g)$ , considérons l'objet  $\chi$  suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \bullet & & \\ & & \nearrow^{j'} & & \searrow^{p'} \\ & \bullet & & \bullet & \\ \nearrow^{j_1} & & \searrow^{p_1} & \nearrow^{j_2} & \searrow^{p_2} \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z. \end{array}$$

Le morphisme  $\Delta_2(f, g) \rightarrow \Delta_1(gf)$  envoie l'objet  $\chi$  de  $\Delta_2(f, g)$  vers l'objet

$$\begin{array}{ccccc} & & \bullet & & \\ & & \nearrow^{j'} & & \searrow^{p'} \\ & \bullet & & \bullet & \\ \nearrow^{j_1} & & \searrow^{p_1} & \nearrow^{j_2} & \searrow^{p_2} \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z. \end{array}$$

Et de manière analogue de  $\psi_1(c_{max}^1)$ , on a le morphisme

$$\psi_2(c_{max}^2) : \Delta_2(f, g) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(H(X), H(Z))$$

qui envoie l'objet  $\chi$  ci-dessus de  $\Delta_2(f, g)$  vers

$$H(p_2 p') \circ H(j' j_1) = H(p_2) H(p') H(j') H(j_1).$$

Soit  $\chi \rightarrow \chi'$  une flèche de  $\Delta_2(f, g)$  :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{(j_1)_\chi} & \bullet & \xrightarrow{(j')_\chi} & \bullet & \xrightarrow{(p')_\chi} & \bullet & \xrightarrow{(p_2)_\chi} & Z \\ = \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & = \downarrow \\ X & \xrightarrow{(j_1)_{\chi'}} & \bullet & \xrightarrow{(j')_{\chi'}} & \bullet & \xrightarrow{(p')_{\chi'}} & \bullet & \xrightarrow{(p_2)_{\chi'}} & Z. \end{array}$$

On a aussi un isomorphisme

$$\mathbf{H}((p_2)_\chi) \mathbf{H}(p'_\chi) \mathbf{H}(j'_\chi) \mathbf{H}((j_1)_\chi) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}((p_2)_{\chi'}) \mathbf{H}(p'_{\chi'}) \mathbf{H}(j'_{\chi'}) \mathbf{H}((j_1)_{\chi'})$$

D'où il vient une transformation naturelle

$$\begin{array}{ccc} \Delta_2(f, g) \rightarrow \Delta_1(gf) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{H}(X), \mathbf{H}(Z)) & & \\ & \sim \downarrow & \\ \psi_2(c_{max}^2) : \Delta_2(f, g) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{H}(X), \mathbf{H}(Z)). & & \end{array}$$

est un isomorphisme.

D'autre part, le morphisme  $\Delta_2(f, g) \rightarrow \Delta_1(f) \times \Delta_1(g)$  envoie l'objet  $\chi$  ci-dessus vers  $(f, g)$  avec

$$\begin{array}{ccccc} & & \bullet & & \bullet \\ & \nearrow^{j_1} & & \nearrow^{j_2} & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & & \searrow_{p_1} & & \searrow_{p_2} \end{array}$$

D'où il vient aussi un isomorphisme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \psi_2(c_{max}^2) : \Delta_2(f, g) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{H}(X), \mathbf{H}(Z)) & & \\ & \sim \downarrow & \\ \psi_2(c^1 * c^1) = (\psi(c^1), \psi(c^1)) \circ (\Delta_2(f, g) \rightarrow \Delta_1(f) \times \Delta_1(g)) & & \end{array}$$

$$\text{car } \mathbf{H}(p_2) \mathbf{H}(p') \mathbf{H}(j') \mathbf{H}(j_1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}(p_2) \mathbf{H}(j_2) \mathbf{H}(p_1) \mathbf{H}(j_1).$$

On prendra comme 2-isomorphisme de connexion la composée  $c(f, g)$  des 2-isomorphismes :

$$\begin{aligned}
H(g \circ f) &= \varinjlim_{\Delta_1(gf)} (\Delta_1(gf) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbb{H}(X), \mathbb{H}(Z))) \\
&= \downarrow \\
\varinjlim_{\Delta_2(f,g)} (\Delta_2(f, g) \rightarrow \Delta_1(gf) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbb{H}(X), \mathbb{H}(Z))) \\
&\cong \downarrow \\
\varinjlim_{\Delta_2(f,g)} (\psi_2(c_{max}^2) : \Delta_2(f, g) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbb{H}(X), \mathbb{H}(Z))) \\
&\cong \downarrow \\
\varinjlim_{\Delta_2(f,g)} (\psi_2(c^1 * c^1) : \Delta_2(f, g) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbb{H}(X), \mathbb{H}(Z))) \\
&\stackrel{def}{=} \downarrow \\
\varinjlim_{\Delta_1(f) \times \Delta_1(g)} ((\psi(c^1), \psi(c^1)) \circ (\Delta_2(f, g) \rightarrow \Delta_1(f) \times \Delta_1(g))) \\
&= \downarrow \\
&\mathbb{H}(g) \circ \mathbb{H}(f).
\end{aligned}$$

Il nous reste à vérifier la relation de cocycle *i.e.* pour

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T,$$

il faut prouver que le diagramme :

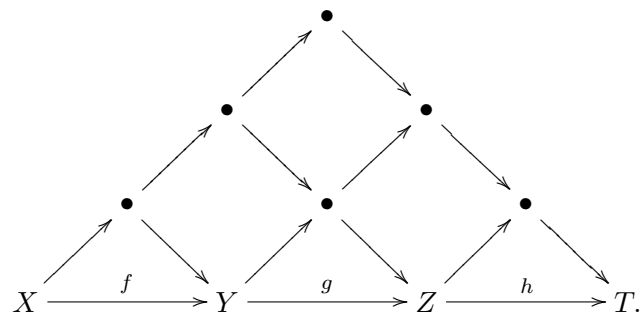
$$\begin{array}{ccc}
H(hgf) & \xrightarrow{c(gf,h)} & H(h)H(gf) \\
c(f,hg) \downarrow & & c(f,g) \downarrow \\
H(hg)H(f) & \xrightarrow{c(g,h)} & H(h)H(g)H(f).
\end{array}$$

est commutatif.

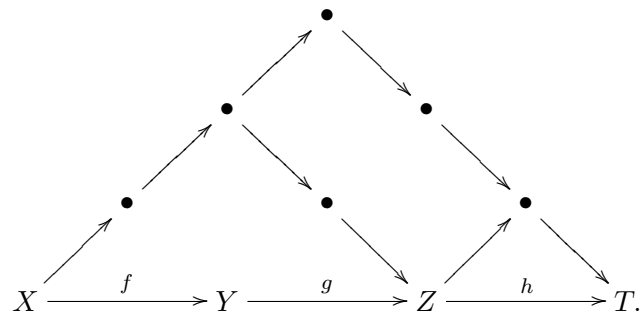
On a un diagramme commutatif de catégories :

$$\begin{array}{ccccc}
\Delta_1(hgf) & \longleftarrow & \Delta_2(gf, h) & \longrightarrow & \Delta_1(gf) \times \Delta_1(h) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\Delta_2(f, hg) & \longleftarrow & \Delta_3(f, g, h) & \longrightarrow & \Delta_2(f, g) \times \Delta_1(h) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Delta_1(f) \times \Delta_1(hg) & \longleftarrow & \Delta_1(f) \times \Delta_2(g, h) & \longrightarrow & \Delta_1(f) \times \Delta_1(g) \times \Delta_1(h).
\end{array}$$

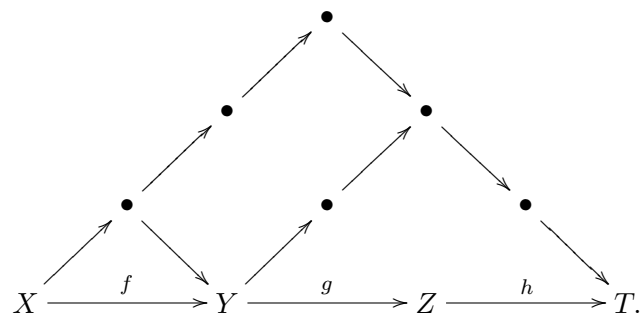
Soit  $\chi$  un objet de  $\Delta_3(f, g, h)$  comme suivant :



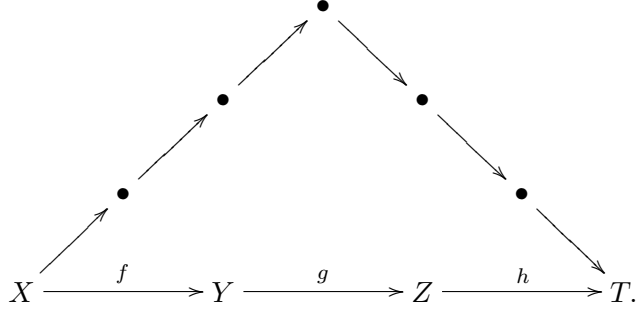
Le foncteur  $\phi_1 : \Delta_3(f, h, g) \rightarrow \Delta_2(gf, h)$  envoie  $\chi$  à ;



Le foncteur  $\phi_2 : \Delta_3(f, g, h) \rightarrow \Delta_2(f, hg)$  envoie  $\chi$  à :



Et le foncteur  $\phi_{1,2} : \Delta_3(f, g, h) \rightarrow \Delta_2 \rightarrow \Delta_1(hgf)$  envoie  $\chi$  à :



On a deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
 \psi_2(c_{max}^2) \circ \phi_2 & \longrightarrow & \psi_2(c_{max}^1 * c_{max}^1) \circ \phi_2 & \longrightarrow & \psi_3(c_{max}^1 * c_{max}^2) \\
 \uparrow & & & & \downarrow \\
 \psi_1(c_{max}^1) \circ \phi_{1,2} & \longrightarrow & & \longrightarrow & \psi_3(c_{max}^3) \\
 \downarrow & & & & \uparrow \\
 \psi_2(c_{max}^2) \circ \phi_1 & \longrightarrow & \psi_2(c_{max}^1 * c_{max}^1) \circ \phi_1 & \longrightarrow & \psi_3(c_{max}^2 * c_{max}^1).
 \end{array}$$

En utilisant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \psi_3(c_{max}^1 * c_{max}^1 * c_{max}^1) & & \\
 & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \\
 \psi_3(c_{max}^1 * c_{max}^2) & \longrightarrow & \psi_3(c_{max}^3) & \longleftarrow & \psi_3(c_{max}^2 * c_{max}^1),
 \end{array}$$

on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \psi_1(c_{max}^1) \circ \phi_{1,2} & \longrightarrow & \psi_2(c_{max}^1 * c_{max}^1) \circ \phi_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \psi_2(c_{max}^1 * c_{max}^1) \circ \phi_2 & \longrightarrow & \psi_3(c_{max}^1 * c_{max}^1 * c_{max}^1).
 \end{array}$$

En passant à la limite inductive, on a le diagramme commutatif voulu.

### 3.4. Construction de l'échange. —

3.4.1. Considérons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j'} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

où  $j, j'$  sont des immersions ouvertes et  $f, f'$  sont des morphismes de schémas, on en déduit le diagramme commutatif suivant :

(7)

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & & \nearrow = & & \\ j'_! \uparrow & & & & \\ U & \xleftarrow{j'^*} & X & & \\ f'^* \uparrow & & \uparrow f^* & & \\ V & \xleftarrow{j^*} & Y & & \\ & & \searrow = & & \\ & & V & & \end{array}$$

On a déjà des morphismes  $1 \xrightarrow{ad} j_! j^*$  et  $j^* j_! \xrightarrow{ad'} 1$ . Alors

$$f^* j_! \xrightarrow{ad} j'_! j'^* f^* j_! \xrightarrow{\sim} j'_! f'^* j^* j_! \xrightarrow{\sim} j'_! f'^*$$

Ce foncteur est encore vrai sur les complexes de faisceaux car  $f^*, j_!$  sont exacts.

3.4.2. Remplacer  $j, j'$  dans le diagramme 7 par des morphismes propres  $p, p'$ , de manière analogue, on a aussi

$$f^* p_! \rightarrow p'_! f'^*$$

3.4.3. Remplacer  $j, j'$  dans le diagramme 7 par des morphismes séparés  $g, g'$ . Supposons  $g = pj$  et  $g' = p'j'$ , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{j'_!} & \bullet & \xrightarrow{Rp'_*} & \bullet \\ f'^* \uparrow & & f''^* \uparrow & & f^* \uparrow \\ \bullet & \xrightarrow{j_!} & \bullet & \xrightarrow{Rp_*} & \bullet \end{array}$$

Donc on a un foncteur

$$f^* g_! = f^*(Rp_* j_!) \xrightarrow{\sim} Rp'_* f''^* j_! \xrightarrow{\sim} Rp'_* j'_! f'^* = g'_! f'^*$$

**3.5.** Pour tout morphisme séparé  $f$ , il existe une transformation naturelle :

$$\alpha_f : f_! \rightarrow f_*$$

compatible aux morphismes d'échange, qui est un isomorphisme si  $f$  est propre.

En effet, soit  $f = pj$  une composante de  $f$ . On sait que  $1 \xrightarrow{ad} j^*j_!$  est un isomorphisme, donc on prend le morphisme inverse  $j^*j_! \xrightarrow{ad^{-1}} 1$ . Comme  $j_*$  est un adjoint à gauche de  $j^*$ , il existe un morphisme  $j_! \rightarrow j_*$ . Et donc il existe :

$$f_! = p_*j_! \rightarrow p_*j_* = f_*.$$

#### 4. Foncteur $f^!$

Ici on veut construire  $f^!$  à partir de  $Rf_*$  comme Neeman ([Nee1, exemple 4.2, lemme 1.4]). Mais dans son article, il considère  $D(qc/X)$  la catégorie dérivée des complexes de faisceaux quasi-cohérents sur  $X$ , lors que nous considérons  $D(\Lambda_X - mod)$  la catégorie dérivée des complexes de faisceaux de  $\Lambda$ -module sur  $X_{et}$ . Donc on utilise un théorème dans ([Nee2]) pour les morphismes propres suivant :

**Théorème 4.1.** — Soit  $X \xrightarrow{p} S$  un morphisme propre. Supposons que

$$Rp_* : D(\Lambda - mod_X) \rightarrow D(\Lambda - mod_S)$$

vérifie :

1.  $D(\Lambda - mod_X)$  est "well generated" (ça convient pour notre cas car  $X, S$  noetheriens).
2.  $Rp_*$  est exacte et commute aux coproduits (somme directe infinie).

Alors,  $Rp_*$  admet un adjoint à droite.

Grâce à ce théorème,  $Rf_* = Rp_*j_*$  admet un adjoint à droite, on note  $f^!$ , car  $j_*$  admet un adjoint à droite aussi. Donc il nous reste à montrer que  $Rp_*$  commute aux coproduits *i.e.* montrer que

$$\oplus R^n p_*(F_i) \rightarrow R^n p_*(\oplus F_i)$$

où  $R^n p_*(F) := H^n(Rp_*(F))$ , est un isomorphisme. On montre que c'est un isomorphisme sur les fibres. D'après ([SGA 4, XII, cor. 5.2]), pour tout point géométrique  $\bar{s}$  de  $X$ , on a

$$R^n p_*(\oplus F_i)_{\bar{s}} = H^n(X_{\bar{s}}, \oplus F_i).$$

Et d'après ([SGA 4, VII, prop. 3.3]),  $H^n(X_{et}, F)$  commute aux coproduits donc on gagne.

### Références

- [Con] B. Conrad, *Deligne's notes on Nagata compactifications*, J. Ramanujan Math. Soc. 22 (2007), no. 3, 205-257.
- [Del] P. Deligne, *Voevodsky's lectures on cross functors Fall 2001*.
- [Ayo] J. Ayoub, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique*. <http://www.math.univ-paris13.fr/ayoub/These/THESE.pdf>
- [Drew] B. Drew, *Théorème du changement de base propre*.
- [Dels1] F. Déglise, *Formalisme des six foncteurs et conjecture de Weil*, <http://www.math.univ-paris13.fr/hebert/introduction.pdf>.
- [Dels2] F. Déglise, *Faisceaux étales constructibles*, <http://www.math.univ-paris13.fr/hebert/constructible.pdf>.
- [Mil] Milne, *Étale cohomology*, Princeton University Press, 1980.
- [Nee1] A. Neeman, *The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability*, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 205-236.
- [Nee2] A. Neeman, *Triangulated categories*, Annals of Mathematics Studies 148, Princeton University Press (2001).
- [Har] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, 1977.
- [SGA 4] SGA 4, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, séminaire dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, Lectures Notes in Mathematics 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-73.

---

08-01-2009

NGUYEN THI KIM NGAN