Groupe de travail «Cohomologie étale et formalisme des six foncteurs»

———————

FAISCEAUX ÉTALES CONSTRUCTIBLES

F. DÉGLISE

———————

Table des matières

Introduction

Tous les schémas sont supposés noethériens. On fixe un anneau de coefficients $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un entier arbitraire $n > 0$. Si X est un schéma, on note $\tilde{X}_{\text{ét}}$ le topos étale de X. On appelle Λ_X-module tout faisceau de Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$ et on note $\Lambda_X - mod$ la catégorie correspondante.

1. Faisceaux localement constants

1.1. Définition.

Définition 1.1. Soit E un ensemble, X un schéma. On appelle faisceau constant sur X de valeur E le faisceau associé au préfaisceau

$$\hat{E}_X : V/X \mapsto E.$$

On le note E_X.

Le faisceau E_X dépend fonctoriellement de E. Plus précisément, considérons la catégorie finale $*$, munie d'un seul objet et d'un seul morphisme, ainsi que le morphisme canonique $\epsilon : X_{\text{ét}} \to *$. Si l'on munit $*$ de la topologie canonique, ϵ est un morphisme de site et il induit un morphisme de topos :

$$\tilde{X}_{\text{ét}} \xrightarrow{(\epsilon^*, \epsilon_*)} \mathscr{E}ns.$$

Date: Novembre 2008.

Par définition, pour un ensemble E, $\epsilon^* E = E_X$, ce qui montre que ϵ^* est exact. De plus, on vérifie (par exemple en utilisant la formule d'adjonction) que pour tout faisceau F, $\epsilon_*(F) = \Gamma(X; F)$, sections globales de F.

Remark 1.2. (i) Comme le foncteur faisceau associé (ou encore le foncteur ϵ^* commute aux sommes, $E_X = \sqcup_{x\in E} X$ – écriture que l'on abrègera $\sum_E X$.

(ii) Si E est un Λ-module, on considère E_X comme un objet de $\Lambda_X - mod$.

Proposition 1.3. *Soit X un schéma, V un X-schéma étale, et E un ensemble. Alors,*

$$\Gamma(V; E_X) = E^{\pi_0(V)}$$

où $\pi_0(V)$ désigne l'ensemble des composantes connexes de V.

Démonstration. On se ramène au cas $X = V$. Par additivité des foncteurs $\Gamma(.; E_X)$ et π_0, on peut supposer que X est connexe. Notons que le préfaisceau séparé associé à $\hat{E}_X$ est définit par la formule :

$$\hat{E}'_X : V/X \mapsto \begin{cases} E & \text{si } V \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

On calcule $\Gamma(X; E_X)$ grâce au complexe de Čech à coefficients dans $\hat{E}'_X$. Or si $(V_i \xrightarrow{p_i} X)_{i\in I}$ est un recouvrement étale de X, le morphisme p_i est ouvert. Si X est irréductible, pour tous indices i, j, $p_i(V_i) \cap p_j(V_j)$, intersection de deux ouverts, est non vide donc $V_i \times_X V_j \neq \emptyset$. On peut dès lors conclure par induction sur le nombre de composantes irréductibles de X. □

Définition 1.4. Soit F un faisceau sur X.

(i) On dit que F est *constant* si il est égal à un faisceau de la forme E_X.

(ii) On dit que F est *localement constant* si il existe un recouvrement $(V_i)_{i\in I}$ de X tel que pour tout indice $i \in I$, $F|_{V_i}$ est constant.

Dans ces deux cas, on dit que F est de plus *constructible* si pour tout point géométrique $\bar{x} \to X$, la fibre $F_{\bar{x}}$ est finie.

Il est immédiat que les faisceaux constants (resp. localement constants) sont stables par pullback.

Remark 1.5. (i) Ces définitions s'appliquent aux Λ_X-modules en oubliant leur structure de modules. On notera particulièrement que la condition de finitude sur un Λ_X-module F localement constant constructible équivaut dans ce cas à dire que les fibres $F_{\bar{x}}$ sont des Λ-module de type fini – car Λ est un *anneau fini* d'après notre convention.

(ii) La terminologie « localement constant constructible » est parfois remplacée par la terminologie plus courte « constant-tordu » (cf 1.13(ii) pour une explication de la terminologie).

Définition 1.6. Soit $f : F \to G$ un morphisme de faisceaux sur X.

(i) On dit que f est *constant* si $f = \epsilon^*(\phi)$ pour un morphisme d'ensemble $\phi : F \to E$.

(ii) On dit que f est *localement constant* si il existe un recouvrement $(V_i)_{i\in I}$ de X tel que pour tout indice $i \in I$, $f|_{V_i}$ est constant.

Remark 1.7. De même, on dira qu'un morphisme de Λ_X-modules est constant s'il provient d'un morphisme de Λ-modules.

Proposition 1.8. (i) *Soit $f : F \to G$ un morphisme de faisceaux sur $X_{ét}$ tel que F et G sont localement constant. Si F est constructible, le morphisme f est localement constant.*

(ii) *Le noyau (resp. conoyau) d'un morphisme de faisceaux localement constant constructibles sur $X_{ét}$ est localement constant constructible.*

(iii) *Considérons une suite exacte de Λ_X-modules :*

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0. \qquad (*)$$

Alors, si deux des trois faisceaux de la suite sont localement constants constructibles, le troisième est localement constant constructible.

Démonstration. Considérons l'assertion (i). Quitte à considérer un recouvrement ouvert, on peut supposer que $F = A_X$ et $G = B_X$ sont constants. Comme F est constructible, A est un ensemble fini. Par définition, le morphisme

$$f : \sqcup_A X \to \sqcup_B X$$

est somme de morphismes $f_a : X \to \sqcup_B X$, pour $a \in A$ et il suffit de montrer que chaque f_a est localement constant. On peut donc supposer que $F = X$. Le morphisme $f : X \to \sqcup_B X$ correspond à un X-morphisme de schémas étales[1]. Quitte à recouvrir X à nouveau, on peut supposer que X est connexe. Alors, l'image de f est connexe et tombe dans un seul des facteurs du membre de droite. Comme f est un X-morphisme, on en déduit maintenant, tautologiquement, que f est constant. L'assertion (ii) en résulte.

Considérons l'assertion (iii). Un morphisme entre Λ_X-modules localement constants constructibles est nécessairement localement constant. On en déduit que son noyau (resp. conoyau) est localement constant. Comme la constructibilité se teste sur les fibres, ce noyau (resp. conoyau) est constructible. Il reste à traiter le cas où F est une extension de faisceaux localement constant constructibles.
Quitte à revouvrir X, on peut supposer X connexe et $F'' = M_X$, faisceau constant de valeur un Λ-module M de type fini.
Supposons que M est libre, de base $(m_1, .., m_n)$. Chaque élément m_i peut-être vu comme une section globale de $F'' = M_X$ (cf 1.3). Quitte à recouvrir X, on peut donc relever chacun des m_i en une section globale de F. Ainsi, la suite exacte courte $(*)$ est localement scindé ce qui permet de conclure.
Dans le cas général, on considère une résolution de M

$$0 \to R \to L \to M \to 0$$

telle que L est un Λ-module libre. Considérons le Λ_X-module $H = L_X \times_{F''} F$. Dans la catégorie abélienne $\Lambda_X\text{--}mod$, on en déduit un diagramme formé de suites exactes courtes

$$(b)$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & & R_X \arrow[r, equal] \arrow[d] & R_X \arrow[d] & \\
(a) & 0 \arrow[r] & F' \arrow[r] \arrow[d, equal] & H \arrow[r] \arrow[d] & L_X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & F' \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & F'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

[1]Rappelons qu'un morphisme étale est supposé localement de type fini.

Ainsi, d'après le cas déjà traité et la suite exacte courte (a), le faisceau H est localement constant constructible. D'après la suite (b) et le résultat sur les conoyaux, F est localement constant constructible. $\square$

1.2. **Caractérisation par les fibres.** Soit $\bar{x} \to X$ un point géométrique. A tout faisceau F sur $X_{\text{ét}}$, on associe sa fibre en $\bar{x}$, notée $F_{\bar{x}}$. On appelle voisinage étale de $\bar{x}$ dans X tout X-schéma étale tel que $V \times_X \bar{x}$ est non vide. On note $\mathscr{V}_{\bar{x}}(X)$ la sous-catégorie pleine de $X_{\text{ét}}$ formée de ces voisinages étales. Elle est cofiltrante et on obtient :

$$F_{\bar{x}} = \varinjlim_{V \in \mathscr{V}_{\bar{x}}(X)^{op}} F(V). \tag{1}$$

Considérons maintenant deux points géométriques $\bar{x}$, $\bar{y}$ de X et notons x, y leur image respective dans X. On dit que $\bar{y}$ est une *spécialisation* de $\bar{x}$ si $y \in \overline{\{x\}}$. On le note encore $\bar{x} \to \bar{y}$.
Etant donné un tel couple de points, tout voisinage étale de $\bar{y}$ dans X est encore un voisinage étale de $\bar{x}$ dans X. D'après la propriété caractéristique (1) des fibres, on en déduit donc un morphisme

$$F_{\bar{y}} \to F_{\bar{x}}$$

appelé *morphisme de spécialisation.*

Proposition 1.9. *Soit F un faisceau sur $X_{\acute{e}t}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *F est localement constant constructible.*
- (ii) (a) *Pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X, $F_{\bar{x}}$ est finie.*
  - (b) *Pour tous points géométriques $\bar{x}$, $\bar{y}$ tels que $\bar{y}$ est une spécialisation de $\bar{x}$, le morphisme de spécialisation $F_{\bar{y}} \to F_{\bar{x}}$ est bijectif.*

Démonstration. Le fait que (i) entraine (ii) est trivial. Montrons la réciproque. Soit $\bar{x}$ un point géométrique de X. Par définition, il existe un voisinage étale V de $\bar{x}$ dans X tel que le morphisme canonique $F(V) \xrightarrow{f} F_{\bar{x}}$ est surjectif. Soit $E \subset F(V)$ tel que $f|_E$ est bijectif. On en déduit un morphisme $E_V \to F|_V$. De plus, par définition, $(E_V)_{\bar{x}} \to F_{\bar{x}}$ est un isomorphisme. Or, comme V est noethérien, pour tout point géométrique $\bar{y}$ de V, on peut trouver (par récurrence noethérienne) une chaîne de spécialisations comme suit :

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{p}_1 & & \bar{p}_3 & \cdots & \bar{p}_n & \\
\bar{x} \arrow[ur] & & \bar{p}_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & & & & \bar{y}. \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

La propriété (ii)(b) montre donc que $(E_V)_{\bar{y}} \to F_{\bar{y}}$ est un isomorphisme. Donc $E_V \simeq F|_V$. $\square$

1.3. **Revêtements et groupe fondamental.**

Lemme 1.10. *Soit F un faisceau localement constant sur $X_{\acute{e}t}$.*
Alors, F est représentable par un X-schéma étale V. De plus, F est constructible si et seulement si V/X est fini.

Démonstration. Dans le cas où F est constant de valeur E, on sait que $F = \sqcup_E X$, donc tautologiquement, F est représentable bar le schéma étale $\sqcup_E X$. Dire que F est constructible équivaut à dire que E est fini, ce qui équivaut à dire que $\sqcup_E X$ est fini en tant que X-schéma.

Dans le cas général, on sait qu'il existe un morphisme étale surjectif $W \xrightarrow{p} X$ tel que $F|_W$ est constant – quitte à prendre la somme des X-schémas étales d'un recouvrement de X. Ainsi, $F|_W$ est représentable par un W-schéma étale Y'. Considérons les morphismes de projections évidents :

$$W \times_X W \times_X W \xrightarrow{q_1,q_2,q_3} W \times_X W \xrightarrow{p_1,p_2} W.$$

Le morphisme p_i est la projection sur le i-ème facteur, le morphisme q_i est la projection sur les deux facteurs différents de i. Alors, il existe un isomorphisme canonique $\phi : p_1^*(F|_W) \to p_2^*(F|_W)$, ce qui équivaut à un isomorphisme de schémas

$$\phi : p_1^{-1}Y' \to p_2^{-1}Y'.$$

Par ailleurs, cet isomorphisme de schéma satisfait la condition de transitivité :

$$q_2^{-1}(\phi) = q_1^{-1}(\phi) \circ q_3^{-1}(\phi)$$

puisque c'est vrai du point de vue du faisceau $F|_W$. Or, p est en particulier fidèlement plat ; il résulte du théorème de descente de Grothendieck [SGA3, X 5.4] qu'il existe un unique X-schéma étale Y tel que $Y' = Y \times_X V$ et ϕ correspond à l'isomorphisme canonique induit par Y. L'unicité de Y est même valable dans la catégorie des faisceaux, ce qui montre l'existence d'un isomorphisme $F \simeq Y$.

L'assertion finale résulte du fait que pour vérifier qu'un morphisme de schémas $f : Y \to X$ est fini, il suffit de vérifier que $p^{-1}f$ est fini pour un morphisme $p : V \to X$ fidèlement plat. □

Soit X un schéma. Un *revêtement étale* de X est un morphisme fini étale surjectif.

Rappelons qu'un morphisme $f : V \to X$ étale fini est à la fois ouvert et fermé, de sorte que, si X est connexe, f est nécessairement surjectif.

Corollaire 1.11. *Soit X un schéma connexe.*
La catégorie des faisceaux d'ensembles localement constant constructibles sur X est équivalente à la catégorie des revêtements étales de X.

Démonstration. Il ne reste plus qu'à démontrer que le faisceau représentable par un revêtement étale V de X est localement constant constructible. On peut supposer X connexe, de point générique η. Rappelons que l'on définit le degré n de V/X comme le cardinal de sa fibre au point géométrique $\bar{\eta}$. On fait une récurrence sur n.

Si $n = 1$, on montre que V est isomorphe à X, donc constant. Comme V/X est plat, on en déduit que toutes les fibres de V/X ont pour cardinal 1. Il en résulte que la projection $V \xrightarrow{p} X$ est un monomorphisme. Pour montrer que p est un isomorphisme, on peut supposer $X = \mathrm{Spec}(A)$ local. Dès lors, V est un schéma affine, spectre d'une A-algèbre finie et plate B. Ainsi, B/A est libre. Si $\mathcal{M}$ désigne l'idéal maximal de A, $B/\mathcal{M}B$ est isomorphe à $A/\mathcal{M}$ par hypothèse. On en déduit donc $B \simeq A$.

Raisonnons par induction. On considère $V \to X$ comme un recouvrement. Dès lors, $V \times_X V \xrightarrow{q} V$ est un revêtement. L'immersion diagonale $\delta : V \to V \times_X V$ est fermée (car V/X est séparé) et ouverte (car c'est une section du morphisme étale $V \times_X V \to V$). Donc, $\delta(V)$ est une composante connexe de $V \times_X V$. Soit $W = V \times_X V - \delta(V)$. Pour toute composante connexe V_0 de V, le degré de $W \times_V V_0$ est strictement plus petit que n. Par hypothèse de récurrence, $W \times_V V_0$ est localement constant constructible sur V_0, ce qui permet de conclure. □

1.12. Considérons un schéma connexe X, ainsi qu'un point géométrique $\bar{x} = \mathrm{Spec}(\Omega)$ de X. Soit $\mathscr{R}_X$ la catégorie des revêtements étales de X. On peut alors considérer le foncteur fibre en $\bar{x}$:

$$\eta_{\bar{x}} : V/X \mapsto V_{\bar{x}}$$

où $V_{\bar{x}}$ est formé des points géométriques de V (à valeur dans Ω) au-dessus de $\bar{x}$ – rappelons que cet ensemble est fini.

Suivant Grothendieck (cf [SGA1, V]), le groupe fondamental de X en $\bar{x}$ est définit comme le groupe des automorphismes du foncteur fibre $\eta_{\bar{x}}$, noté $\pi_1(X, \bar{x})$. Notons que c'est un groupe topologique – en fait un groupe pro-fini.
Bien sûr, pour tout revêtement étale V/X, le groupe $\pi_1(X, \bar{x})$ agit par définition sur la fibre $V_{\bar{x}}$. D'après la théorie de Galois-Grothendieck [SGA1, V, par. 7], le foncteur $\eta_{\bar{x}}$ définit une équivalence de catégories :

$$\mathscr{R}_X \to \pi_1(X, \bar{x})-rep$$

où $\pi_1(X, \bar{x})-rep$ est formée des ensembles finis munis d'une action continue de $\pi_1(X, \bar{x})$ – ce qui signifie que l'action se factorise par un quotient fini de $\pi_1(X, \bar{x})$.

Remark 1.13. (i) Notons que du point de vue des topos, le groupe $\pi_1(X, \bar{x})$ est formé des automorphismes du foncteur fibre au point $\bar{x}$.

(ii) Si on considère un faisceau localement constant constructible sur $X_{\text{ét}}$. La représentation de $\pi_1(X, \bar{x})$ qui lui est associé d'après 1.11 et 1.12 est la fibre $F_{\bar{x}}$ munie de son action canonique. Alors, F est constant si et seulement si cette action est triviale.
Ainsi, l'expression « constant-tordu » pour désigner F traduit le fait que F correspond à l'ensemble fini $F_{\bar{x}}$ « tordu » par l'action de $\pi_1(X, \bar{x})$.

(iii) Il résulte de la théorie de Galois-Grothendieck que tout revêtement étale Y/X est dominé par un revêtement étale Galoisien P/X (tel que $\mathrm{Aut}_X(P) \simeq P_{\bar{x}}$). Dès lors, $Y \times_X P \simeq \sum_{i \in Y_{\bar{x}}} P$ ce qui montre que Y est trivialisé par le recouvrement P/Y et redonne une démonstration de 1.11.

2. Faisceaux constructibles

La définition des faisceaux localement constant, pour autant satisfaisante quelle soit, n'est pas satisfaisante si l'on veut trouver une catégorie de coefficients suffisament grosse. Ainsi, on vérifie (par le critère sur les fibres 1.9) que si F est un faisceau constant-tordu, et $i : Z \to X$ une immersion fermée de codimension non nulle, alors $i_*(F)$ n'est pas constant-tordu.

Le guide pour arriver à la théorie des faisceaux constructibles est le *formalisme des 6 opérations de Grothendieck*. Ainsi, on veut une catégorie (abélienne) de faisceaux qui soit stable par les 6 opérations, et en particulier par le foncteur image directe f_*[2].

2.1. Définition.

2.1. Soit X un schéma. Considérons une partie $T \subset X$. On dit que T est localement fermée si pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $T \cap U$ est fermé dans U.
Rappelons que, par convention, X est supposé noethérien. Son espace est quasi-compact. On en déduit que $T \subset X$ est est localement fermée si et seulement si $T = F \cap U$ où F (resp. U) est fermé (resp. ouvert) dans X.

Définition 2.2. Un Λ_X-module F est constructible si il existe une partition finie $X = \sqcup_{i \in I} T_i$ en parties localement fermées telle que pour tout i, $F|_{T_i}$ est localement constant constructible.

[2]Cette stabilité par f_* correspond à la volonté d'obtenir une suite spectrale du type Leray-Serre, dont le terme E_2 s'exprime à l'aide d'un système local. En topologie, une telle suite spectrale est associée à une *fibration* – mais ce cas est suffisant pour les calculs.

Une décomposition comme dans la définition ci-dessus est appelée une *stratification*. Dans la situation de la définition ci-dessus, on dit encore que (T_i) trivialise F. Etant donnée deux stratifications

$$X = \sqcup_{i \in I} T_i = \sqcup_{j \in J} T'_j,$$

on dit que (T'_j) est plus fine que (T_i) s'il existe une application $\varphi : J \to I$ tel que pour tout $j \in J$, $T'_j \subset T_{\varphi(j)}$. Dans cette situation, il est immédiat que si un faisceau constructible F est trivialisé par (T_i), il est trivialisé par (T'_j).

Remark 2.3. On définit de même les faisceaux (d'ensembles) constructibles.

2.4. Comme les parties localement fermées sont stables par intersection avec un ouvert, il est évident que cette notion est locale pour la topologie de Zariski. Par ailleurs, comme l'image inverse d'une partie localement fermée est encore localement fermée, pour tout morphisme $f : Y \to X$, F constructible implique f^*F constructible.

Proposition 2.5. *Considérons une suite exacte de Λ_X-modules :*

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0.$$

Alors, si deux des trois Λ_X-modules de cette suite sont constructibles, le troisième l'est aussi.

Démonstration. On se ramène, en considérant une stratification suffisament fine pour trivialiser les faisceaux F, F' et F'', aux cas où les faisceaux sont localement constants constructibles et on applique 1.8(ii) et (iii). ☐

2.2. **Caractérisation par les fibres.**

2.6. Soit X un schéma – toujours supposé noethérien. Une partie $T \subset X$ est dite *constructible* (cf [EGA3, chap. 0, 9.1.7]) si elle est réunion finie de parties localement fermées.

Proposition 2.7. *Soit F un Λ_X-module. On lui associe l'application $c : X \to \mathbb{N}, x \mapsto \sharp F_{\bar{x}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est constructible.*

(ii) *L'application c est bornée constructible* i.e. *pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $c^{-1}(n)$ est une partie constructible de X.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) est triviale. On peut supposer que c est constante, de valeur n.
On raisonne par induction noethérienne sur X. Soit $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus d'un point générique de X. Il existe un X-schéma étale V tel que $F(V) \to F_{\bar{\eta}}$ est surjectif. Or, tout point géométrique $\bar{x}$ de V est un spécialisation de $\bar{\eta}$. Du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & F_{\bar{x}} \arrow[d, "\phi"] \\ F(V) \arrow[ur] \arrow[r] & F_{\bar{\eta}} \end{tikzcd}$$

on déduit que ϕ est surjectif, donc bijectif puisque le cardinal de la source et égale au cardinal du but. Soit U l'image de V dans X ; c'est un ouvert non vide de X. Il résulte de la proposition 1.9 que $F|_U$ est localement constant constructible. Par induction noethérienne, $F|_{X-U}$ est constructible ce qui conclut. ☐

Corollaire 2.8. *Soit F un Λ_X-module constructible et $f : V \to X$ un morphisme étale surjectif. Alors, si $f^*(F)$ est constructible, F est constructible.*

Autrement dit, la constructibilité est une propriété locale pour la topologie étale. On peut améliorer ce résultat comme suit :

Proposition 2.9. *Soit $f : Y \to X$ un morphisme surjectif de type fini. Pour tout Λ_X-module F, les conditions suivantes sont équivalentes,*

(i) *F est constructible.*

(ii) *$f^*(F)$ est constructible.*

Démonstration. On peut supposer X réduit. On raisonne par induction noethérienne sur X. Soit η un point générique de X, de corps résiduel K et $X_\eta = \mathrm{Spec}(K)$ le schéma localisé de X en η. La fibre Y_η est un K-schéma algébrique. Il admet donc un point fermé y de corps résiduel L. L'extension L/K est fini. Soit E/K la cloture séparable de K dans L. On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(L) \arrow[rrr] \arrow[dr, "h"'] & & & Y_\eta \arrow[r] \arrow[dd] & Y \arrow[dd] \\ & \mathrm{Spec}(E) \arrow[drr, "g"'] & & & \\ & & & X_\eta \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

où (1) (resp. (2)) est un morphisme étale surjectif fini (resp. radiciel surjectif fini). Comme ces données sont de « présentation finie », elle se relève sur un voisinage ouvert V de x dans X :

$$\begin{tikzcd} V'' \arrow[rrr] \arrow[dr, "h"'] & & & Y \times_X V \arrow[r] \arrow[dd] & Y \arrow[dd] \\ & V' \arrow[drr, "g"'] & & & \\ & & & V \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

où g et h vérifient les mêmes propriétés que leurs homologues ci-dessus. On en déduit donc $h^*g^*(F|_V)$ est constructible. Or, h étant radiciel surjectif de type fini, c'est une immersion fermée d'idéal nilpotent ; ainsi, $h^{-1} : V'_{\text{ét}} \to \tilde{V}''_{\text{ét}}$ est une équivalence de catégorie et h^* aussi. On est donc ramené, par induction noethérienne, au cas du morphisme g qui a déjà été traité dans le corollaire précédent. $\square$

Corollaire 2.10. *Soit V un X-schéma étale de type fini. Alors, $\Lambda_X(V)$ est constructible.*

Démonstration. On applique la proposition 2.7 aux fibres de V/X. Quitte à prendre un recouvrement ouvert de V, on peut supposer que V est affine. Dès lors, le corollaire résulte du fait que le nombre des fibres géométriques d'un morphisme étale séparé de type fini varie de manière semi-continue inférieurement sur X (cf [EGA4][18.2.8]). $\square$

2.3. **Espaces algébriques.**

2.11. Rappelons (cf [Gab62, II.4]) qu'un objet A d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$ est noethérien si toute suite

$$A_0 \xrightarrow{p_0} A_1 \to \cdots \to A_n \xrightarrow{p_n} \cdots \to A$$

de monomorphismes est stationaire (p_n est un isomorphisme pour tout $n >> 0$).

Proposition 2.12. *Pour tout Λ_X-module F, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est constructible.*

(ii) *F est noethérien dans $\Lambda_X\!-\!mod$.*

(iii) *Il existe un X-morphisme $f : V \to U$ de schémas étales séparés de type fini sur X et un isomorphisme*

$$F \simeq \mathrm{coKer}\big(\Lambda_X(V) \xrightarrow{f_*} \Lambda_X(U)\big).$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : On raisonne par induction noethérienne sur X. Soit U un ouvert non vide de X tel que $G = F|_U$ est localement constant. Soit $(G_i)_i$ une suite croissante de sous-faisceaux de G. Soit $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus d'un point générique de X. Puisque $G_{\bar{\eta}}$ est finie, on peut supposer que la suite $(G_i)_{\bar{\eta}}$ est constante.
Soit $\bar{x}$ une spécialisation de $\bar{\eta}$. Comme G est constant-tordu, $G_{\bar{x}} \to G_{\bar{\eta}}$ est bijective. Il en résulte que pour tout indice i, $(G_i)_{\bar{x}} \to (G_i)_{\bar{\eta}}$ est injective.
Soit $s_1, ..., s_n$ des générateurs de $G_{0\bar{\eta}}$. Il existe un schéma V étale sur U, voisinage de $\bar{\eta}$ dans U, tel que les éléments s_i se relèvent dans $G_0(V)$. Pour tout point géométrique $\bar{x}$ de V, on en déduit que la suite $(s_1, ..., s_n)$ est génératrive dans $(G_i)_{\bar{x}}$. Il en résulte que G_i est stationaire sur V, donc sur l'image de V dans U qui est un ouvert non vide U_0. Par hypothèse noethérienne, $(F_i)|_{X-U_0}$ est stationaire, ce qui implique que la suite $(F_i)_i$ est stationaire sur X.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Il existe une famille de X-schémas étales affines $(U_i)_{i\in I}$ et un épimorphisme
$$\bigoplus_{i\in I} \Lambda_X(U_i) \to F.$$
Comme F est noethérien, il existe une partie finie I_0 telle que
$$\bigoplus_{i\in I_0} \Lambda_X(U_i) \xrightarrow{f} F$$
est un épimorphisme. Posons $U = \sqcup_{i\in I_0} U_i$. C'est un X-schéma étale séparé de type fini. En particulier, $\Lambda_X(U)$ est constructible. Le noyau K de f est donc constructible. On peut appliquer le procédé ci-dessus à K pour obtenir un épimorphisme $\Lambda_X(V) \to K$ avec V/X étale séparé de type fini, d'où la résolution attendue.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : On applique 2.10 et 2.5. □

2.13. On en déduit que la catégorie des Λ_X-modules constructibles est une sous-catégorie épaisse Λ_X–*mod* (car c'est facile à vérifier en général pour la sous-catégorie des objets noethériens d'une catégorie abélienne). Remarquons par ailleurs que Λ_X–*mod* a pour famille génératrive les modules $\Lambda_X(U)$ où U/X est affine étale sur X, donc en particulier est constructible. Le corollaire suivant en résulte formellement :

Corollaire 2.14. *Tout Λ_X-module est limite inductive filtrante de Λ_X-modules constructibles.*

Il est en effet réunion filtrante de ses sous-modules constructibles.
D'après [Gab62, II.4, cor. 1], on déduit aussi :

Corollaire 2.15. *Soit F un Λ_X-module constructible. Alors, le foncteur* $\mathrm{Hom}_{\Lambda_X}(F, .)$ *commute aux limites inductives filtrantes.*

Remark 2.16.
(i) On en déduit que sur un schéma noethérien de dimension de Krull finie, les objets de $D(\Lambda_X - mod)$ qui sont compacts sont exactement lesomplexes bornés à cohomologie constructible.
(ii) Dans le cas ensembliste, l'analogue de la propriété (iii) de la proposition précédente est encore vérifiée : tout faisceau constructible est conoyau d'une double flèche $V \rightrightarrows U$ où U et V sont des X-schémas étales séparés de type fini. Un tel conoyau est appelé un *espace algébrique* ou encore *champ algébrique d'Artin.*

3. Constructibilité et pushout

Lemme 3.1. *Soit X un schéma normal et $j : U \to X$ une immersion ouverte dominante. Alors, pour tout ensemble E, le morphisme d'adjonction*
$$E_X \xrightarrow{\rho} j_*j^*(E_X) = j_*(E_U)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $\bar{x}$ un point géométrique de X. D'après 1.3, la fibre du morphisme ρ au point $\bar{x}$ est égal à :

$$\varinjlim_{V} \left(E^{\pi_0(V)} \xrightarrow{\rho_V} E^{\pi_0(V \times_X U)} \right)$$

où la colimite est prise sur les voisinages étales V de $\bar{x}$ dans X. Or, comme X est normal et V/X étale, V est normal. En particulier, il est somme disjointe de ses composantes irréductibles. Il existe une unique composante irréductible de V contenant le point $\bar{x} \to V$, et c'est un voisinage étale de $\bar{x}$ dans X plus fin que V. Ainsi, dans la colimite filtrante ci-dessus, on peut se restreindre aux voisinages V qui sont de plus irréductibles.
Etant donné un tel voisinage, on obtient donc $\pi_0(V) = \{*\}$. Comme V/X est plat, l'ouvert $V \times_X U \to V$ est dense dans V, donc irréductible. Ainsi, $\pi_0(V \times_X U) = \{*\}$ et ρ_V est un isomorphisme. □

Lemme 3.2. *Soit X un schéma et F un Λ_X-module constructible.*
Alors, il existe un monomorphisme de Λ_X-modules

$$F \to \bigoplus_{i \in I} p_{i*}(G_i)$$

tel que I est un ensemble fini et pour tout indice $i \in I$, $p_i : Y_i \to X$ est un morphisme fini, G_i est un Λ_X-module constant fini sur Y_i.

Démonstration. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une stratification finie de X telle que pour tout indice $i \in I$, $u_i : X_i \to X$ l'immersion canonique, $G_i = u_i^*(F)$ est constant-tordu. Notons que le morphisme d'adjonction :

$$F \xrightarrow{(1)} \bigoplus_{i \in I} u_{i*} u_i^*(F) = u_{i*}(G_i)$$

est un monomorphisme, comme on peut le voir sur les fibres.
On fixe un indice $i \in I$. Il existe un recouvrement étale $X'_i \xrightarrow{\pi_i} X_i$ tel que $\pi_i^*(G_i)$ est constant. Notons que l'on peut supposer π_i séparé de type fini (pour cette dernière condition on utilise que X_i est noethérien). A nouveau, le morphisme d'adjonction

$$G_i \xrightarrow{(2)} \pi_{i*}\pi_i^*(G_i) =: \pi_{i*}(G'_i)$$

est un monomorphisme.

Le morphisme conposé $\pi_i u_i$ est quasi-fini séparé de type fini. D'après le théorème principal de Zariski (sous la forme généralisée de [EGA4, 8.12.6]), il admet dont une factorisation

$$X'_i \xrightarrow{v_i} X''_i \xrightarrow{f_i} X$$

telle que f_i est fini et v_i est une immersion ouverte que l'on peut supposer dominante. Notons Y_i le normalisé de X''_i et considérons le carré cartésien dans le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "w_i"] \arrow[d, "q_i"'] & Y_i \arrow[d, "p_i"] & \\ X'_i \arrow[r, "v_i"] & X''_i \arrow[r, "f_i"] & X \end{tikzcd}$$

tel que p_i est la porjection canonique. Comme X est excellent, X''_i est encore excellent et p_i est fini. Comme v_i est dominante et f_i birationnel, le morphisme q_i est birationnel ; donc q_i et q_i sont dominants. Dès lors, le morphisme d'adjonction

$$G'_i \xrightarrow{(3)} q_{i*}q_i^*(G'_i) =: q_{i*}(G''_i)$$

est un monomorphisme (q_i est fini surjectif). Du lemme 3.1, il résulte que $G_i''' = w_{i*}(G_i'')$ est constant-tordu. Mettant bout à bout les monomorphisme (1), (2), (3), on obtient le monomorphisme attendu :

$$F \to \oplus_{i\in I}(f_i p_i)_*(G_i''').$$

□

Théorème 3.3. *Soit $S = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma local hensélien, $f : X \to S$ un morphisme propre. Soit X_s la fibre fermé de X/S. Alors, l'immersion de X_s dans X induit un isomorphisme*

$$\pi_0(X) \to \pi_0(X_s).$$

Démonstration. Par additivité de π_0, on peut supposer que X est connexe non vide. Dans ce cas, on doit montrer que X_s est connexe non vide.
Or, $f(X)$ est fermé (f propre) dans S et non vide (X non vide). Cette partie contient donc le point fermé s de S, ce qui implique $X_s \neq \emptyset$.
On considère la factorisation de Stein ([EGA3, 4.3.1]) de f :

$$X \xrightarrow{f'} S' \xrightarrow{g} S$$

où f' est un morphisme propre surjectif dont les fibres sont connexes, et g est un morphisme fini. Comme S'/S est fini, S' est une somme de schémas locaux henséliens. Or, puisque X est connexe et f' surjectif, S' est connexe ; il est donc local hensélien. Trivialement, la fibre $g^{-1}(s)$ de g est réduite au point fermé s' de S'. Ainsi, $f^{-1}(s) = f'^{-1}(s')$ est connexe d'après le choix de f'. □

Remark 3.4. La preuve précédente utilise donc essentiellement l'existence de la factorisation de Stein. Pour ce dernier point, on utilise deux résultats essentiels :

(i) Le morphisme f étant propre, $f_*(\mathcal{O}_X)$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre cohérente, *i.e.* une A-algèbre finie A'. Avec les notations de la preuve ci-dessus, $S' = \mathrm{Spec}(A')$ (cf [EGA3, 4.1.5]).

(ii) Soit $\hat{A}$ le complété de l'anneau local A (*i.e.* par rapport à son idéal maximal $\mathcal{M}$), $\hat{S} = \mathrm{Spec}(\hat{A})$ et $\hat{X}$ le schéma formel complété de X le long de X_s – soit encore le complété $\mathcal{M}$-adique de X, si X est considéré comme un A-schéma. Considérons le morphisme induit $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{S}$. Alors, [EGA3, 4.1.5]

$$R^n \hat{f}_*(\mathcal{O}_{\hat{X}}) = R^n f_*(\mathcal{O}_X) \otimes_A \hat{A}.$$

(Prenant les sections globales de ces faisceaux dans le cas $n = 0$, on en déduit

$$\Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) \simeq A' \otimes_A \hat{A} \simeq \hat{A}'$$

ce qui montre que l'espace topologique sous-jacent à $\hat{X}$ – autrement dit X_s – est nécessairement connexe, car $\mathrm{Spec}(A')$ est connexe.)

Ainsi, c'est réellement le fait que le foncteur $\mathrm{R}f_*$, dans le cadre des sites annelés de Zariski, préserve la cohérence et qu'il vérifie une compatibilité par rapport à la complétion[3] qui se trouve au coeur de la proposition précédente.

Le deuxième cas dans le théorème suivant est le seul fait présenté ici qui ne se trouve pas dans le séminaire [SGA4], bien que les arguments reposent essentiellement sur les lemmes de ce séminaire. Je dois sa démonstration à O. Gabber[4].

[3]On peut comparer ce résultat à une condition de compatibilité de $\mathrm{R}f_*$ avec les limites inductives filtrantes de schémas, puisqu'un schéma formel n'est rien d'autre qu'un ind-schéma.

[4]Un étude beaucoup plus complète du problème de stabilité des faisceaux constructibles par image directe se trouvera dans un volume à venir sur les travaux de Gabber en cohomologie étale.

Théorème 3.5. *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas. On suppose l'une des deux conditions suivantes vérifiées :*

(i) *f est propre.*

(ii) *f est de type fini et X est excellent.*

Alors, pour tout Λ_X-modules constructible F, $f_*(F)$ est constructible.

Démonstration. Considérons le premier cas. Rappelons qu'un sous-faisceau d'un faisceau constructible est constructible (2.13). Ainsi, en choisissant un plongement comme dans le lemme 3.2, on se ramène au cas où $F = M_Y$, M étant un Λ-module fini. En vue d'appliquer la caractérisation par les fibres 2.7, on considère un point géométrique $\bar{x}$ de X et on étudie la fibre en $\bar{x}$ de $f_*(\Lambda_Y)$ est égale à

$$\varinjlim_V M^{\pi_0(Y \times_X V)}$$

où la limite parcourt les voisinages étales de $\bar{x}$ dans X. Soit $X_{(\bar{x})}$ le localisé strict de X en $\bar{x}$. D'après [EGA4],

$$\pi_0(Y \times_X X_{(\bar{x})}) = \varinjlim_V M^{\pi_0(Y \times_X V)}.$$

Or, d'après le théorème 3.3, on obtient

$$\pi_0(Y \times_X X_{(\bar{x})}) = \pi_0(Y_{(\bar{x})}).$$

Il suffit maintenant d'appliquer [EGA4, 9.7.9] qui affirme que le cardinal des fibres géométriques d'un morphisme propre est une fonction constructible. La proposition 2.7 conclut.

Dans le deuxième cas, en considérant un plongement comme dans le lemme 3.2, on se ramène comme précédemment au cas où $F = M_Y$ est constant-tordu. Considérons un recouvrement ouvert $\pi : V \to Y$ tel que V est une somme finie d'ouverts affines de Y. Le morphisme

$$f_*(F) \to (f\pi)_*\pi^*(F)$$

est un monomorphisme car f_* est exact à gauche. Il suffit donc (2.13) de montrer que le membre de droite est constructible. Remplaçant Y par V, on peut donc supposer Y affine.

Le morphisme $f : Y \to X$ est alors séparé. Il admet donc une factorisation $Y \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{p} X$ telle que j est une immersion ouverte et p un morphisme propre. Quitte à remplacer X' par l'adhérence réduite de j, on peut supposer que j est dominante. Notons que X' est encore excellent puisque p est de type fini. Compte tenu du cas précédent, il reste à montrer que $j_*(M_Y)$ est constructible.

Soit $\bar{X}'$ le schéma normalisé de X. Considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \bar{Y} \arrow[r, "\bar{j}"] \arrow[d, "q"'] & \bar{X}' \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "j"] & X' \end{tikzcd}$$

où p est la projection canonique, qui est donc un morphisme fini birationnel. Comme j est dominante, q est encore birationnel, donc c'est en particulier un morphisme fini surjectif. Le morphisme

$$M_Y \to q_*q^*(M_Y)$$

est donc un monomorphisme, et il suffit de montrer que $j_*q_*(M_{\bar{Y}})$ est constructible. Appliquant à nouveau le cas précédent avec le morphisme fini p, on est ramené à montrer que $j'_*(M_{\bar{Y}})$ est constructible. Mais celà résulte maintenant du lemme 3.1 puisque $\bar{X}'$ est normal et j' est dominante. □

Références

[EGA3] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (11, 17), 1961, 1963.

[EGA4] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (20, 24, 28, 32), 1964–1967.

[Gab62] Pierre Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90 :323–448, 1962.

[SGA1] Alexander Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1).* SMF, recomposée et annotée edition, 2002.

[SGA3] M. Demazure and A. Grothendieck. *Schémas en groupes I, II, III.*, volume 151,152,153. Springer, 1970.

[SGA4] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, volume 269,270,305. Springer, 1972-73.