

# Topos et sites étales

David Hébert  
Groupe de travail  
Cohomologie étale

12 novembre 2008

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Construction de faisceaux.</b>	<b>4</b>
1.1 Produit fibré . . . . .	4
1.2 Recouvrement . . . . .	5
1.3 Faisceauification . . . . .	6
<b>2 Schémas et faisceaux étales</b>	<b>10</b>
2.1 Schématisation . . . . .	10
2.2 Comparaison de topologie. . . . .	12
2.3 Topos . . . . .	15
2.4 Fibres. . . . .	19

# Introduction.

Soit  $\underline{X} = (X, \tau)$  un espace topologique, c'est à dire la donnée d'un ensemble  $X$  et d'une partie  $\tau \subset \mathcal{P}(X)$  des parties de  $X$  satisfaisant :

(a).  $\emptyset \in \tau$ ,  $X \in \tau$ ,

(b). Soit  $I$  un ensemble d'indices et  $\{U_i\}_{i \in I} \in \tau^I$  alors  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ ,

(c).  $\forall (U, V) \in \tau^2$ ,  $U \cap V \in \tau$ .

Les éléments de  $\tau$  sont appelés les ouverts de  $\underline{X}$ . On définit une catégorie.

**Définition 0.0.1.** La catégorie  $\tilde{X}$  est définie de la manière suivante :

$$\text{Ob}(\tilde{X}) := \tau$$

et pour toute paire  $U$  et  $V$  d'ouverts de  $\underline{X}$

$$\text{Hom}_{\tilde{X}}(U, V) := \begin{cases} \emptyset & \text{si } U \not\subset V \\ U \hookrightarrow V, & \text{si } U \subset V. \end{cases}$$

On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une catégorie. La composition des morphismes étant la composition usuelle.

**Définition 0.0.2.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Un préfaisceau à valeur dans  $\mathcal{C}$  sur  $\underline{X}$  est la donnée d'un foncteur contravariant

$$P : \tilde{X} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Si  $U$  et  $V$  sont deux ouverts de  $\underline{X}$  tels que  $U \subset V$  et  $P$  un préfaisceau (en ensemble) sur  $\underline{X}$ , alors le morphisme  $\iota : U \hookrightarrow V$  se transforme par  $P$  en un morphisme  $P(\iota) : P(V) \longrightarrow P(U)$ . On note en général l'image d'un élément  $s \in P(V)$  (appelé section de  $V$ ) sous  $P(\iota)$  par  $s|_U$ .

**Définition 0.0.3.** Soit  $F$  un préfaisceau sur  $\underline{X}$ . Si les conditions suivantes sont vérifiées, on dit que  $F$  est un faisceau.

(i). Pour tout ouvert  $U$  de  $\underline{X}$ , pour tout recouvrement  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  (c'est à dire tel que  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ ) et

pour toute paire  $(s, t)$  d'éléments de  $F(U)$ ,

$$\left( \forall i \in I, s|_{U_i} = t|_{U_i} \in F(U_i) \right) \implies (s = t \in F(U)).$$

(ii). Pour tout ouvert  $U$  de  $\underline{X}$ , pour tout recouvrement  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  et pour toute famille  $(s_i \in F(U_i))_{i \in I}$ ,

$$\left( \forall (i, j) \in I^2, s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \in F(U_i \cap U_j) \right) \implies \left( \exists s \in F(U), \forall i \in I, s_i = s|_{U_i} \right).$$

**Proposition 0.0.4.** Un préfaisceau  $F$  en groupe abélien est un faisceau si et seulement si pour tout ouvert  $U$  de  $\underline{X}$  et pour tout recouvrement  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $U$  la suite

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F(U) & \longrightarrow & \prod_i F(U_i) & \rightrightarrows & \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j) \\ & & s \longmapsto & & (s|_{U_i})_i & & \\ & & & & & & (s_i)_i \longmapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j}) \end{array}$$

est exacte.

Le premier objectif de ce travail est de généraliser la notion de faisceau : au lieu de considérer les faisceaux sur un espace topologique on va définir un faisceau sur une catégorie  $\mathcal{C}$ . A travers l'étude analogique des définitions ci-dessus, nous allons donner les meilleures conditions sur  $\mathcal{C}$  pour pouvoir parler de faisceaux, ce qui nous amènera à étudier les topologies de Grothendieck.

En seconde partie nous utiliserons cette nouvelle notion pour définir une topologie étale, ce qui nécessitera de "schématiser" ce que nous avons fait dans le précédent exposé.

# Chapitre 1

## Construction de faisceaux.

On se donne une catégorie  $\mathcal{C}$ . Les objets ne sont *à priori* plus des ensembles. Pour des manipulations légales des objets, le point de vue des univers est le plus adapté. Nous ne nous soumettrons pas à cette rigueur absolue (*c.f.* LNM 269 : SGA4 "THÉORIE DES TOPOS ET COHOMOLOGIE ÉTALE DES SCHEMAS" exposé I).

Nous voulons donc définir une notion de faisceaux sur une catégorie  $\mathcal{C}$ . Les idées prédominantes de la définition de faisceaux au sens classique sont :

- Le recouvrement des ouverts, c'est à dire des objets d'une catégorie du type  $\tilde{X}$ , qu'il nous faut traduire en "recouvrement des objets de  $\mathcal{C}$ ".
- Le recollement des sections qui coïncident sur les intersections; ce qui équivaut à l'exactitude de la suite de la proposition (*c.f.* introduction). Nous adopterons plutôt ce point de vue. On pourra dire (et on dira) qu'un préfaisceau (une fois que nous aurons défini cette notion) est un faisceau si cette suite est exacte pour tout système de recouvrement. Mais ceci nécessite de définir "l'intersection".

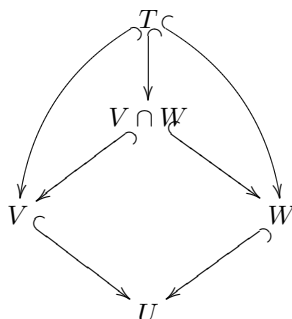
Dans un premier temps, nous donnons un "équivalent catégoriel" d'intersection et de recouvrement, puis une fois la notion de faisceau établie, nous donnons quelques résultats.

### 1.1 Produit fibré.

Pour trouver un équivalent catégoriel d'une notion est de voir si elle ne satisfait pas une propriété universelle. Raisonnons en termes de morphismes, c'est un bon point de vue pour les catégories (car une catégorie c'est juste la donnée d'objets et de morphismes 'légèrement stables'). Soient  $U$  un ouvert d'un espace topologique  $\underline{X}$  et  $V, W$  deux ouverts tels que  $V \subset U$  et  $W \subset U$ . On peut alors caractériser l'intersection  $V \cap W$  de la manière suivante :

Pour tout ouvert  $T \subset U$  de  $\underline{X}$  tel que  $T \subset V$  et  $T \subset W$  alors  $T \subset V \cap W$ .

Ce que nous pouvons résumer dans le diagramme suivant :



Dans une catégorie arbitraire, on remplace les inclusions par des morphismes. On parle alors de produit fibré. Son existence n'est pas toujours assurée.

**Définition 1.1.1.** Soient  $U, V$  et  $X$  trois objets d'une catégorie  $\mathcal{C}$ ,  $u_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$  et  $v_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, X)$ , alors le produit fibré de  $U$  et  $V$  au dessus de  $X$ , noté

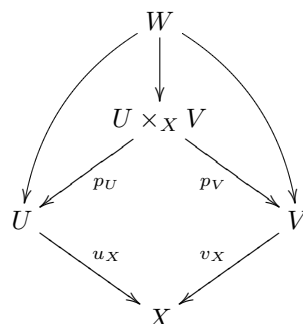
$$U \times_X V$$

est caractérisé par la propriété universelle suivante :

Il existe deux morphismes canoniques  $p_U : U \times_X V \rightarrow U$  et  $p_V : U \times_X V \rightarrow V$  tels que pour tout objet  $W$  de  $\mathcal{C}$  et toute paire de morphismes  $W \rightarrow U, W \rightarrow V$ , il existe un unique morphisme

$$W \rightarrow U \times_X V$$

tel que le diagramme suivant



soit commutatif.

**Proposition 1.1.2.** Si le produit fibré existe, il est unique à isomorphisme unique près.

**Proposition 1.1.3.** Dans une petite catégorie admettant des produits finis, il existe un produit fibré.

*Démonstration.* On pose (avec les notations de la définition de produit fibré) :

$$U \times_X V := \{(u, v) \in U \times V \mid u_X(u) = v_X(v) \in X\}$$

Il est facile de voir que cet objet vérifie la propriété universelle. Les morphismes  $U \times_X V \rightarrow U$  et  $U \times_X V \rightarrow V$  étant les projections canoniques (plus exactement leur restriction à  $U \times_X V$ ).  $\square$

Par exemple, toute petite catégorie additive admet un produit fibré. Dans une catégorie de la forme  $\tilde{X}$  pour un espace topologique  $\underline{X}$ , le produit fibré coïncide avec l'intersection (car les morphismes de cette catégorie sont les inclusions).

## 1.2 Recouvrement

On cherche de même un équivalent catégoriel à la notion de recouvrement. On se demande alors quelles sont les relations vérifiées par les recouvrements d'un espace topologique  $\underline{X}$ .

Soient  $U$  un ouvert de  $\underline{X}$  et  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $U$  (pour un certain système d'indices  $I$ ). Ce qui signifie :

**Inclusion.**  $\forall i \in I, U_i \subset U$ .

**Recouvrement.** Pour tout  $V$  ouvert de  $\underline{X}$  tel que  $V \subset U$ , on a

$$V = \bigcup_{i \in I} U_i \cap V.$$

On observe que l'on a un principe de "re-recouvrement" :

Si  $\mathfrak{U}_i = \{U_{i,j}\}_{j \in J}$  est un recouvrement de  $U_i$  alors  $\{U_{i,j}\}_{i \in I, j \in J}$  est un recouvrement de  $U$ .

A présent nous traduisons ces données dans le langage de la catégorie  $\tilde{X}$  : Les inclusions sont les morphismes de  $\tilde{X}$  et l'intersection correspond au produit fibré.

**Définition 1.2.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Pour tout objet  $U$  de  $\mathcal{C}$  on se donne un ensemble, noté  $\text{Cov}(U)$ , d'ensembles de morphismes de but  $U$ . Ces données satisfaisant les axiomes suivants :

**Axiome 0.** Les produits fibrés existent.

**Axiome 1.** (stabilité par changement de base = inclusion) Pour tout  $\{U_\alpha \longrightarrow U\}_{\alpha \in A} \in \text{Cov}(U)$  et tout morphisme  $V \longrightarrow U$  de  $\mathcal{C}$ ,

$$\{U_\alpha \times_U V \longrightarrow V\}_{\alpha \in A} \in \text{Cov}(V).$$

**Axiome 2.** (stabilité par composition = re-recouvrement) Soient  $\{U_\alpha \xrightarrow{t_\alpha} U\}_{\alpha \in A} \in \text{Cov}(U)$  et  $\{U_{\alpha,\beta} \xrightarrow{t_{\alpha,\beta}} U_\alpha\}_{\beta \in B} \in \text{Cov}(U_\alpha)$  alors

$$\{U_{\alpha,\beta} \xrightarrow{t_\alpha \circ t_{\alpha,\beta}} U\}_{\alpha \in A, \beta \in B} \in \text{Cov}(U).$$

**Axiome 3 "faible".** Pour tout objet  $U$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\{U \xrightarrow{\text{Id}_U} U\} \in \text{Cov}(U)$ .

**Axiome 3 "fort".** Pour toute paire d'objets  $U$  et  $V$  isomorphe de  $\mathcal{C}$ ,  $\{U \xrightarrow{\sim} V\} \in \text{Cov}(V)$ .

Les éléments de  $\text{Cov}(U)$ , pour un objet  $U$  de  $\mathcal{C}$  sont appelés raffinements ou recouvrements de  $U$ .

Une catégorie  $\mathcal{C}$  munie d'un système de recouvrements s'appelle une topologie de Grothendieck (ou un site). On note  $\text{Cat}(\mathcal{C})$  pour faire appel à la catégorie sous-jacente et  $\text{Cov}(\mathcal{C})$  pour le système de recouvrement.

Dans le langage des espaces topologiques (i.e. d'une catégorie de la forme  $\tilde{X}$ ) l'axiome 3 nous dit simplement que  $U$  est un recouvrement de  $U$ .

Dans GROTHENDIECK TOPOLOGIES de Artin (1962) c'est la version forte de l'axiome 3 qui est utilisée tandis que dans SGA 4 exposé 2 c'est la version faible qui est prise. En fait c'est plutôt dans la définition de prétopologie que l'on voit l'axiome 3 faible. La définition d'un site passe par le point de vue des foncteurs. Mais dans le cas où les produits fibrés sont représentables (et on se placera toujours dans ce cas) alors tout site provient d'une prétopologie (voir remarque 1.3.1. exposé 2 de SGA 4).

Si l'on considère une catégorie dans laquelle le produit fibré existe, et que l'on prend pour système de recouvrement tous les morphismes de cette catégorie, on définit bien une topologie de Grothendieck (faible et forte) appelée topologie discrète.

Pour finir donnons une dernière analogie avec les espaces topologiques usuels : les fonctions continues.

Dans un espace topologique, une application est continue si l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert.

**Définition 1.2.2.** Un morphisme de sites  $F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  parfois appelé fonction continue est un foncteur (covariant)  $G : \text{Cat}(\mathcal{T}') \longrightarrow \text{Cat}(\mathcal{T})$  tel que

(i). Si  $\{U'_\alpha \xrightarrow{t'_\alpha} U'\}_{\alpha \in A}$  un élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T}')$  alors  $\{G(U'_\alpha) \xrightarrow{G(t'_\alpha)} G(U')\}_{\alpha \in A}$  est un élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T})$

(ii). Si  $\{U'_\alpha \xrightarrow{t'_\alpha} U'\}_{\alpha \in A}$  un élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T}')$  et  $V' \longrightarrow U'$  un morphisme de  $\text{Cat}(\mathcal{T}')$  alors

$$\forall \alpha \in A, \quad G(V' \times_{U'} U'_\alpha) \simeq G(V') \times_{G(U')} G(U'_\alpha)$$

On note  $G = F^{-1}$ .

## 1.3 Faisceaufication

Nous savons comment définir une notion de recouvrement dans une catégorie du type topologie de Grothendieck. Il nous est maintenant facile de définir la notion de faisceau.

**Définition 1.3.1.** Soient  $\mathcal{T}$  une topologie de Grothendieck et  $\mathcal{C}$  une catégorie. Un préfaisceau sur  $\mathcal{T}$  à valeur dans  $\mathcal{C}$  est un foncteur contravariant

$$F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Un faisceau sur  $\mathcal{T}$  à valeur dans  $\mathcal{C}$  est un préfaisceau tel que pour tout  $\{U_\alpha \longrightarrow U\}_{\alpha \in A}$  élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T})$  la suite

$$F(U) \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} F(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha \in A, \beta \in A} F(U_\alpha \times_U U_\beta)$$

est exacte.

(on suppose dans la définition de faisceau que la catégorie  $\mathcal{C}$  est exacte pour pouvoir parler de suite exacte. En général, ça sera  $\mathcal{A}b$ .)

Si l'on considère la topologie de Grothendieck  $\mathcal{T} = \tilde{X}$  pour un certain espace topologique  $\underline{X}$  (les recouvrements étant tous les morphismes de cette catégorie) on retrouve la notion usuelle de faisceau sur  $\underline{X}$ .

Dans la suite on fixe une topologie de Grothendieck  $\mathcal{T}$ .

**Définition 1.3.2.** On définit  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  la catégorie des préfaisceaux sur  $\mathcal{T}$  à valeur dans  $\mathcal{A}b$ .

On définit de même la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$  des faisceaux sur  $\mathcal{T}$  à valeur dans  $\mathcal{A}b$ .

**Proposition 1.3.3.** La catégorie  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  est abélienne. De plus la somme quelconque d'objets de cette catégorie existe, le produit de suites exactes est exacte, et la limite directe d'une suite exacte d'objets filtrés est exacte.

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{C}at$  la catégorie où les objets sont les catégories et les morphismes sont les foncteurs (ce n'est pas vraiment une catégorie car l'ensemble des morphismes n'est pas un ensemble; dans le langage des univers tout est clair; avec les transformations naturelles  $\mathcal{C}at$  est une 2-catégorie). Alors

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} = \text{Hom}_{\mathcal{C}at}(\mathcal{T}^{\circ}, \mathcal{A}b)$$

et  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  hérite des propriétés de  $\mathcal{A}b$ . □

**Théorème 1.3.4.** Le foncteur canonique d'oubli  $\iota : \mathcal{F}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  admet un adjoint à gauche

$$\sharp : \mathcal{P}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{T}}.$$

Précisément : pour tout faisceau  $F$  et tout préfaisceau  $P$ ,

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}}(G^{\sharp}, F) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathcal{T}}}(G, \iota(F))$$

On appelle  $P^{\sharp} := \sharp(P)$  le faisceau associé à  $P$ .

Pour tout morphisme naturel  $f : P \rightarrow F$ , il existe un unique morphisme naturel  $f^{\sharp} : P^{\sharp} \rightarrow F$  tel que

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow & \nearrow f^{\sharp} & \\ P^{\sharp} & & \end{array}$$

soit un diagramme commutatif.

*Démonstration.* Soit  $P$  un préfaisceau sur  $\mathcal{T}$  à valeur dans  $\mathcal{A}b$ . Soient  $U$  un objet de  $\mathcal{C}at(\mathcal{T})$  et  $\{U_{\alpha} \rightarrow U\}_{\alpha \in A} \in \text{Cov}(U)$ ; on pose

$$P^+(U) = \varinjlim \text{Ker} \left( \prod_{\alpha \in A} P(U_{\alpha}) \rightrightarrows \prod_{\alpha \in A, \beta \in A} P(U_{\alpha} \times_U U_{\beta}) \right)$$

où la limite est prise sur les éléments de  $\text{Cov}(U)$ . Un morphisme  $f : \{U_{\alpha}^1 \rightarrow U\}_{\alpha \in A} \rightarrow \{U_{\beta}^2 \rightarrow U\}_{\beta \in B}$  étant la donnée de  $\{U_{\alpha}^1 \xrightarrow{f_{\alpha, \beta}} U_{\beta}^2\}_{\alpha \in A, \beta \in B}$  tel que

$$\begin{array}{ccc} U_{\alpha}^1 & \xrightarrow{f_{\alpha, \beta}} & U_{\beta}^2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

soit commutatif pour tout  $\alpha \in A$  et tout  $\beta \in B$ .

**Lemme 1.3.5.** Soit  $P$  un objet de  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ .

(i). Pour tout  $\{U_{\alpha} \rightarrow U\}_{\alpha \in A} \in \text{Cov}(U)$ ,  $P^+(U) \rightarrow \prod_{\alpha \in A} P^+(U_{\alpha})$  est injective.

(ii). Si pour tout  $\{U_{\alpha} \rightarrow U\}_{\alpha \in A} \in \text{Cov}(U)$ ,  $P(U) \rightarrow \prod_{\alpha \in A} P(U_{\alpha})$  est injective, alors  $P^+$  est un faisceau.

*Démonstration.* GROTHENDIECK TOPOLOGIES de Artin lemme II.1.4. □

On pose alors

$$P^{\sharp} := (P^+)^+.$$

□

**Définition 1.3.6.** Une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  sera dite avoir des générateurs, s'il existe un ensemble  $A$  tel que pour tout monomorphisme  $\iota : X \hookrightarrow Y$  qui n'est pas un isomorphisme, il existe un objet  $Z \in A$  et  $f : Z \rightarrow Y$  tel que  $f$  ne se factorise pas à travers  $\iota$ .

Par exemple  $\mathcal{A}b$  a des générateurs, en fait un :  $A = \{\mathbb{Z}\}$ .

**Corollaire 1.3.7.** La catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$  est abélienne. De plus le produit (resp. la somme) quelconque d'objets de cette catégorie existe, la limite directe d'une suite exacte d'objets filtrés est exacte et cette catégorie a des générateurs.

*Démonstration.* Le préfaisceau  $\text{Ker}$  est déjà un faisceau. Le faisceau associé au préfaisceau  $\text{Coker}$  satisfait la propriété universelle du conoyau. Le préfaisceau "produit quelconque de faisceau" est un faisceau etc.

Pour montrer que la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$  a des générateurs, on se place dans le cas où la catégorie  $\mathcal{T}$  est petite (parce que l'ensemble des générateurs doit être un ensemble). On considère l'ensemble indéxé par les objets  $U$  de  $\mathcal{T}$  :

$$A := \{\mathbb{Z}_U\}_U$$

où  $\mathbb{Z}_U$  est le représentant (qui existe) du foncteur  $\Gamma_U : \mathcal{F}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{A}b, F \mapsto F(U)$ .

Le langage des univers permet de substituer l'hypothèse de petitesse. □

**Proposition 1.3.8.** Une suite est exacte à gauche dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$  si et seulement si elle l'est dans  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ .

*Démonstration.* Cela découle de la faisceaufication et de l'exactitude à gauche du foncteur  $\iota$  (le préfaisceau  $\text{Ker}$  est déjà un faisceau). □

**Corollaire 1.3.9.** La catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$  a suffisamment d'injectifs.

Ce résultat est un corollaire du théorème suivant :

**Théorème 1.3.10.** Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne telle que la somme quelconque d'objets existe, le produit quelconque d'objets existe, la limite directe d'une suite exacte d'objets filtrés est exacte et il y a des générateurs (on dit que  $\mathcal{A}$  est une catégorie de Grothendieck). Alors  $\mathcal{A}$  admet suffisamment d'injectifs.

*Démonstration.* Soit  $\{A_i\}_{i \in I}$  un ensemble de générateurs de  $\mathcal{A}$ . On pose

$$A = \bigoplus_{i \in I} A_i,$$

(d'où l'importance que la famille des générateurs soit un ensemble) il s'agit d'un objet de  $\mathcal{A}$  (hypothèse).

D'après les propriétés des catégories abéliennes on sait que l'ensemble des morphismes de  $\mathcal{A}$  porte une structure de groupe abélien. Muni de la composition des morphismes, on fait de  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$  un anneau que l'on note  $\mathbb{A}$ .

Soit  $B$  un objet de  $\mathcal{A}$ . Par le biais de la composition des morphismes on offre à  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$  une structure de  $\mathbb{A}$ -module à droite. On considère alors le foncteur

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} : \mathcal{A} &\longrightarrow \text{Mod}_{\mathbb{A}} \\ B &\longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \end{aligned}$$

On sait que la catégorie des  $\mathbb{A}$ -modules à droite a suffisamment d'injectifs. Il faut voir que le foncteur  $\mathfrak{F}$  permet à  $\mathcal{A}$  d'hériter de cette propriété. Cela découle du fait que  $\mathfrak{F}$  possède un adjoint qui est pleinement fidèle.

*c.f.* INTRODUCTION TO THE THEORY OF CATÉGORIES AND FUNCTORS de Ion Bucur & Aristide Deleanu théorème 6.25. (Pure and applied mathematics, volume XIX). □

Vu que la catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$  possède suffisamment d'injectifs, on peut définir de la cohomologie.

**Proposition 1.3.11.** *Soit  $X$  un objet de  $\text{Cat}(\mathcal{T})$ . Le foncteur*

$$\begin{aligned} \Gamma(X, \bullet) : \mathcal{F}_{\mathcal{T}} &\longrightarrow \mathcal{A}b \\ F &\longmapsto F(X) \\ (F \xrightarrow{\phi} G) &\longmapsto (F(X) \xrightarrow{\phi_X} G(X)), \end{aligned}$$

*est exacte à gauche.*

*Démonstration.* c.f. 1.3.8. □

**Définition 1.3.12.** *Soient  $F$  un objet de  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$  et  $X$  un objet de  $\text{Cat}(\mathcal{T})$ , on définit le  $i$ -ème objet de cohomologie de  $F$  en  $X$ , noté  $H^i(X, F)$  comme*

$$H^i(X, F) = R^i\Gamma(X, \bullet)(F),$$

*pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .*

# Chapitre 2

## Schémas et faisceaux étales

### 2.1 Schématisation

Dans l'exposé précédent nous avons défini la notion de morphisme étale, net, formellement net. Ceci correspond au cas affine de la théorie des schémas. Pour pouvoir généraliser ces définitions il nous suffit donc de nous ramener au cas affine.

On note dans la suite  $\mathcal{O}_{X,P}$  pour la localisation de  $\mathcal{O}_X$  en  $P \in X$ .

**Définition 2.1.1.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. Il sera dit formellement net (resp. net, resp. étale) si pour tout ouvert affine  $V$  de  $Y$  et tout ouvert affine  $U$  de  $f^{-1}(V)$  le morphisme d'anneaux induit par le morphisme de schémas  $U \rightarrow V$  est formellement net (resp. net et  $f$  de type fini, resp. étale et  $f$  de présentation fini).*

Cette définition coïncide bien dans le cas affine.

Grace aux propositions 2.1 et 3.1 de l'exposé précédent on obtient :

**Proposition 2.1.2.** *Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Z \rightarrow X$  des morphismes de schémas formellement nets (resp. nets, resp. étales) alors  $fg : Z \rightarrow Y$  est un morphisme de schémas formellement net (resp. net, resp. étale).*

Nous obtiendrons plus tard les autres propriétés formelles.

Nous voulons définir une topologie sur la catégorie des schémas où les recouvrements seront les morphismes étales de schémas (section suivante).

Dans le précédent exposé, c'est à dire le cas affine de ce que nous faisons ici, nous nous étions placés dans le cadre des  $A$ -algèbres (pour un anneau  $A$  fixé), c'est à dire la donnée d'un anneau  $B$  et d'un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow B$  (tous les anneaux considérés sont commutatifs unitaires). Du point de vue des schémas ces données correspondent à la donnée d'un schéma  $S (\leftrightarrow \text{Spec}(A))$ , d'un schéma  $X (\leftrightarrow \text{Spec}(B))$  et d'un morphisme de schémas  $X \rightarrow S$ . C'est à dire que  $X$  est un  $S$ -schéma. On se place dans cette catégorie que l'on note  $\text{Sch}(S)$ .

On dira qu'un schéma sur  $S$  est formellement net (resp. net, resp. étale) si le morphisme correspondant est formellement net (resp. net, resp. étale).

Le premier axiome pour une topologie de Grothendieck, en fait l'axiome 0, est l'existence de produit fibré.

**Théorème 2.1.3.** *Pour tout schéma  $S$ , le produit fibré existe dans  $\text{Sch}(S)$ .*

*Démonstration.* ALGEBRAIC GEOMETRY de Hartshorne, II.3.3. □

Par analogie on se demande naturellement à quoi correspond le produit fibré dans le cas affine.

**Lemme 2.1.4.** *Soient  $A$  un anneau,  $B$  et  $C$  deux  $A$ -algèbres alors*

$$\text{Spec}(B) \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(C) \simeq \text{Spec}(B \otimes_A C).$$

*Démonstration.* Dans la catégorie des  $A$ -algèbres le produit tensoriel vérifie la propriété suivante :

Pour toute  $A$ -algèbre  $X$  et tout morphisme  $f : B \rightarrow X$  et  $g : C \rightarrow X$  il existe un unique morphisme de  $A$ -algèbre  $F : B \otimes_A C \rightarrow X$  rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 B & & \\
 \downarrow & \searrow f & \\
 B \otimes_A C & \xrightarrow{F} & X \\
 \uparrow & \nearrow g & \\
 C & & 
 \end{array}$$

Explicitement : pour tout tenseur pur  $b \otimes c$  de  $B \otimes_A C$  on a  $F(b \otimes c) = f(b)g(c)$ .

Si on prend le diagramme précédent, qu'on fait  $\text{Spec}$ , ça inverse le sens des flèches et on arrive au diagramme qui caractérise par propriété universelle le produit fibré d'où le résultat.  $\square$

Ainsi le produit fibré dans  $\text{Sch}(S)$  correspond au produit tensoriel dans la  $\mathcal{A}lg_A$  on en déduit immédiatement une autre propriété formelle des morphismes de schémas formellement nets.

**Proposition 2.1.5.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schéma. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i). *Le morphisme  $f$  est net.*
- (ii). *Pour tout point  $y \in Y$  le morphisme induit*

$$X \times_Y \text{Spec} \left( \frac{\mathcal{O}_{Y,y}}{\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{Y,y}} \right) \rightarrow \text{Spec} \left( \frac{\mathcal{O}_{Y,y}}{\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{Y,y}} \right),$$

où  $\mathfrak{m}_y$  est l'idéal maximal de l'anneau local  $\mathcal{O}_{Y,y}$ , est net.

*Démonstration.* Il faut d'abord voir que  $\text{Spec} \left( \frac{\mathcal{O}_{Y,y}}{\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{Y,y}} \right)$  porte bien une structure de  $Y$ -schéma, ce qui est aisé. Le théorème 2.20. de l'exposé précédent permet de conclure.  $\square$

**Proposition 2.1.6.** *Soient  $S$  un schéma et  $X$  et  $Y$  deux  $S$ -schémas ; si  $X$  est formellement net (resp. net, resp. étale) alors  $X \times_S Y$  est formellement net (resp. net, resp. étale) en tant que  $Y$ -schéma.*

*Démonstration.* Exposé précédent : 2.2. et 3.2..  $\square$

On a dans la cas affine une réciproque à cet énoncé modulo une hypothèse de platitude. Commençons par traduire cette notion dans le langage des schémas.

**Définition 2.1.7.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. On dira que  $X$  est plat sur  $Y$  (ou que  $f$  est plat) si pour tout ouvert affine  $V$  de  $Y$  et tout ouvert affine  $U$  de  $f^{-1}(V)$ , le morphisme d'anneaux induit par  $U \rightarrow V$  est plat.*

*Un morphisme sera dit fidèlement plat, s'il est plat et surjectif.*

On a ainsi une réciproque à la proposition précédente :

**Proposition 2.1.8.** *Soient  $S$  un schéma et  $X$  et  $Y$  deux  $S$ -schémas tels que  $Y$  soit fidèlement plat sur  $S$  ; si  $X \times_S Y$  est formellement net (resp. net, resp. étale) en tant que  $Y$ -schéma alors  $X$  est formellement net (resp. net, resp. étale).*

*Démonstration.* Exposé précédent : 2.4. et 3.2..  $\square$

Nous allons à présent chercher à caractériser les algèbres (formellement) nettes par le biais d'une structure qui correspond dans le cadre affine au module des différentielles.

**Définition 2.1.9.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. On définit le faisceau des  $X$ -différentielles sur  $Y$  de la manière locale suivante :*

$$\forall P \in X, \quad (\Omega_{X/Y})_P := \Omega_{\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{O}_{Y,f(P)}}.$$

Ce module est construit à partir du noyau du morphisme de multiplication (voir exposé précédent). Le produit tensoriel se transformant en produit fibré dans la catégorie des schémas il est naturel de considérer le morphisme diagonal :

$$\Delta : X \longrightarrow X \times_Y X.$$

On retrouve facilement la définition "usuelle" de différentielle (c.f. ALGEBRAIC GEOMETRY remarque II.8.9.2.).

**Théorème 2.1.10.** *Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme de schémas. Alors  $f$  est formellement net si et seulement si  $\Omega_{X/Y} = 0$ . De même  $f$  est étale si et seulement s'il est plat et net.*

*Démonstration.* Exposé précédent : théorème 2.19. et corollaire 3.9. □

## 2.2 Comparaison de topologie.

**Définition 2.2.1.** *On dira qu'une famille  $\{X_\alpha \xrightarrow{\iota_\alpha} X\}_{\alpha \in A}$  est surjective si*

$$\bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(X_\alpha) = X.$$

Il faut bien sur que le symbole  $\cup$  ait un sens, ce qui est le cas dans le cadre des schémas (c'est l'union des ensembles sous-jacent à la structure de schéma).

**Théorème 2.2.2.** *Soit  $S$  un schéma. Pour tout objet  $X$  de  $\text{Sch}(S)$  on définit :*

$$\text{Cov}(X) := \{\text{Familles de morphismes étales de but } X \text{ surjectives}\}.$$

*Alors munie de ce système de recouvrement la catégorie  $\text{Sch}(S)$  est une topologie de Grothendieck que l'on note  $\text{Sch}(S)_{\text{ét}}$ . C'est le gros site étale.*

*Démonstration.* Vérifions les axiomes d'un site :

**Axiome 0.** C'est le théorème 2.1.3.

**Axiome 1.** C'est la proposition 2.1.6.

**Axiome 2.** C'est la proposition 2.1.2.

**Axiome 3 "fort".** (donc faible) C'est une conséquence du lemme suivant :

**Lemme 2.2.3.** *Soit  $f : A \longrightarrow B$  un isomorphisme d'anneaux. Alors  $f$  est étale.*

*Démonstration.* Puisque  $f$  est un isomorphisme, on peut dire que  $A = B$ . Toute  $A$  dérivation de  $A$  est nulle donc  $\Omega_{B/A} = 0$ . De plus pour tout  $A$ -module  $M$ ,  $M \otimes_A A = M$ ; d'où la (fidèle) platitude. □

□

Il existe bien d'autres topologies sur  $\text{Sch}(S)$ . En fait dès que la catégorie de morphisme considérée est plutôt stable on peut définir une topologie de Grothendieck.

**Proposition 2.2.4.** *Soit  $S$  un schéma. On se donne une classe de morphisme de  $S$ -schémas notée  $E$  telle que les axiomes suivants soient satisfaits :*

**Axiome 1.** *Si  $Y \longrightarrow X \in E$  et  $Z \longrightarrow X$  est un morphisme de  $S$ -schémas alors  $Y \times_X Z \longrightarrow Z \in E$ .*

**Axiome 2.** *Si  $Y \longrightarrow X \in E$  et  $Z \longrightarrow Y \in E$  alors  $Z \longrightarrow X \in E$ .*

**Axiome 3 "faible".** *Pour tout objet  $X$  de  $\text{Sch}(S)$ ,  $\text{Id}_X \in E$ .*

**Axiome 3 "fort".** *On a  $Y \xrightarrow{\sim} X \in E$ .*

*Alors en prenant pour recouvrement d'un objet  $X$  de  $\text{Sch}(S)$  toutes les familles de morphismes de  $E$  de but  $X$  surjectives on définit un système de recouvrement et muni de ce système  $\text{Sch}(S)$  est une topologie de Grothendieck. On la note parfois  $\text{Sch}(S)_E$ .*

*Démonstration.* L'axiome (0) d'une topologie de Grothendieck est toujours vérifié dans la catégorie  $\text{Sch}(S)$ . Pour les autres axiomes c'est évident.  $\square$

**Théorème 2.2.5.** *Avec les notations de la proposition précédente, si l'on prend pour  $E$  les morphismes étales (resp. les morphismes plats, resp. les immersions ouvertes) on définit une topologie sur  $\text{Sch}(S)$ . On la note  $\text{Sch}(S)_{\text{ét}}$  (resp.  $\text{Sch}(S)_{\text{pl}}$ , resp.  $\text{Sch}(S)_{\text{zar}}$ ) et on l'appelle le gros site étale (resp. plat, resp. zariskien).*

*Démonstration.* Le cas étale a été traité dans le théorème précédent. Intéressons nous au cas des immersions ouvertes. On rappelle que  $f : X \rightarrow Y$  est une immersion ouverte de  $S$ -schémas si  $f$  induit un isomorphisme de  $S$ -schémas entre  $X$  et un sous- $S$ -schéma ouvert de  $Y$ .

**Axiome 1.** Soit  $X \rightarrow Y$  une immersion ouverte; notons  $U$  le sous-schéma ouvert de  $Y$  isomorphe à  $X$ . Soit  $f : Z \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas, alors  $f^{-1}(U) \simeq X \times_Y Z$

**Axiome 2.** Soient  $f : Y \rightarrow X$  et  $g : Z \rightarrow Y$  deux immersions ouvertes; Notons  $U$  et  $V$  les sous-schémas ouverts respectifs de  $X$  et  $Y$  tels que  $Y \simeq U$  et  $Z \simeq V$ , alors  $Z \simeq U \times_X f(V)$ .

**Axiome 3 "fort".** Trivial.

Pour le cas plat voir I.2.4. de *Milne*, *ETALE COHOMOLOGY*.  $\square$

On peut raffiner ces topologies en supposant que le morphisme qui induit sur un objet sa structure de  $S$ -schéma possède lui aussi la propriété (étale ou plat ou...). Commençons par donner un sens au mot "raffiner" :

**Définition 2.2.6.** *Soient  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  deux topologies de Grothendieck. On dit que  $\mathcal{T}$  est plus fine que  $\mathcal{T}'$ , et on note*

$$\mathcal{T} \leq \mathcal{T}',$$

*si tout recouvrement de  $\mathcal{T}'$  est un recouvrement pour  $\mathcal{T}$ .*

Voici un exemple :

**Lemme 2.2.7.** *Toute immersion ouverte de schémas est étale.*

**Lemme 2.2.8.** *Tout morphisme étale est plat.*

*Démonstration.* Etale = plat + net.  $\square$

Ainsi on peut écrire

$$\text{Sch}(S)_{\text{pl}} \leq \text{Sch}(S)_{\text{ét}} \leq \text{Sch}(S)_{\text{zar}}.$$

A noter que les deux lemmes précédents nous indiquent que toute immersion ouverte est plate.

**Théorème 2.2.9.** *Soit  $S$  un schéma. Considérons la sous-catégorie pleine de  $\text{Sch}(S)$  où les objets sont des  $S$ -schémas  $X$  tel que  $X \rightarrow S$  soit étale. Notons  $S_{\text{ét}}$  le site associé à cette catégorie munie de la topologie discrète (i.e. tous les morphismes). Alors :*

$$\text{Sch}(S)_{\text{ét}} \leq S_{\text{ét}} \leq \text{Sch}(S)_{\text{zar}}.$$

On appelle  $S_{\text{ét}}$  le petit site étale.

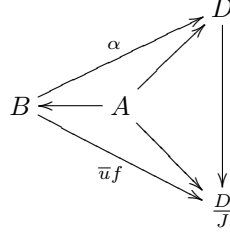
**Lemme 2.2.10.** *Soient  $A$  un anneau,  $B$  et  $C$  deux  $A$ -algèbres et  $f : B \rightarrow C$  un morphisme de  $A$ -algèbres. Si  $B$  et  $C$  sont étales sur  $A$  alors  $C$  est étale sur  $B$ .*

*Démonstration.* Soient  $D$  une  $B$ -algèbre,  $J$  un idéal de  $D$  de carré nul, et  $\bar{u} : C \rightarrow \frac{D}{J}$ . Il s'agit de voir que l'on peut relever  $\bar{u}$  de manière unique.

Notons  $\alpha : B \rightarrow D$  le morphisme de structure de  $B$ -algèbre sur  $D$ . On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & & D \\
 & \nearrow \tilde{u} & \uparrow \\
 C & \xleftarrow{\quad} & A \\
 & \searrow \bar{u} & \downarrow \\
 & & \frac{D}{J}
 \end{array}$$

où  $\tilde{u}$  est un morphisme de  $A$ -algèbres obtenu via la nature étale de  $A \rightarrow C$ . De plus comme  $A \rightarrow B$  est étale



on en déduit que  $\alpha$  est l'unique morphisme faisant commuté le précédent diagramme. Or  $\tilde{u}f$  est aussi un relèvement donc  $\alpha = \tilde{u}f$ , ce qui permet de prolonger  $\tilde{u}$  en une solution unique de  $B$ -algèbre.  $\square$

**Lemme 2.2.11.** Soient  $S$  un schéma,  $X$  et  $Y$  deux  $S$ -schémas et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas. Si  $X \rightarrow S$  et  $Y \rightarrow S$  sont étales alors il en est de même pour  $f$ .

*Démonstration.* Compte tenue de la définition de morphisme étale de schémas, il suffit de vérifier cette propriété dans le cas affine, ce qui équivaut au lemme précédent.  $\square$

*Démonstration du théorème 2.2.9.* Puisque tous les morphismes de la catégorie considérée sont étales d'après le lemme précédent, cette topologie "coïncide" avec la topologie de  $\text{Sch}(S)_{\text{ét}}$  lorsque les morphismes structuraux sont eux même étales.  $\square$

Nous pouvons comparer ces topologies au niveau des faisceaux.

**Définition 2.2.12.** Soit  $S$  un schéma. Considérons la sous-catégorie pleine de  $\text{Sch}(S)$  où les objets sont des  $S$ -schémas  $X$  tel que  $X \rightarrow S$  soit une immersion ouverte. Notons  $S_{\text{zar}}$  le site associé à cette catégorie munie de la topologie des immersions ouvertes. On l'appelle le petit site zariskien.

**Corollaire 2.2.13.**

$$\text{Sch}(S)_{\text{pl}} \leq \text{Sch}(S)_{\text{ét}} \leq S_{\text{ét}} \leq \text{Sch}(S)_{\text{zar}} \leq S_{\text{zar}}.$$

**Théorème 2.2.14.** Soient  $S$  un schéma et  $P$  un préfaisceau sur le site  $S_{\text{ét}}$  (resp.  $\text{Sch}(S)_{\text{pl}}$ ) à valeur dans  $\text{Ab}$  ou  $\text{Ens}$ . Alors  $P$  est un faisceau sur le site  $S_{\text{ét}}$  (resp.  $\text{Sch}(S)_{\text{pl}}$ ) si et seulement s'il satisfait les deux assertions suivantes :

- (a). Le foncteur  $P$  est un faisceau pour la topologie de Zariski  $S_{\text{zar}}$ .
- (b). Pour tout morphisme étale (resp. plat)  $X \rightarrow Y$  de  $S$ -schémas affines la suite

$$P(Y) \longrightarrow P(X) \rightrightarrows P(X \times_Y X)$$

est exacte.

*Démonstration.* Raisonnons pour le cas étale. Il est clair que si  $P$  est un faisceau sur  $S_{\text{ét}}$  alors les conditions (a) et (b) sont vérifiées. Réciproquement vérifions que  $P$  est un faisceau.

Pour tout recouvrement  $\{U_\alpha \rightarrow U\}_\alpha$  élément de  $\text{Cov}(S_{\text{ét}})$  le morphisme  $\coprod_\alpha U_\alpha \rightarrow U$  est étale. La condition (b) nous donne :

$$P(U) \longrightarrow P(\coprod_\alpha U_\alpha) \rightrightarrows P(\coprod_\alpha U_\alpha \times_U \coprod_\alpha U_\alpha)$$

or  $\coprod_\alpha U_\alpha \times_U \coprod_\alpha U_\alpha \simeq \coprod (U_\alpha \times_U U_\beta)$  et la condition (a) nous indique qu'on a  $P(\coprod U_\alpha) = \prod P(U_\alpha)$ .  
c.f. ÉTALE COHOMOLOGY de Milne proposition II.1.5.  $\square$

**Définition 2.2.15.** Soit  $S$  un schéma. Un faisceau sur le site  $S_{\text{ét}}$  (resp.  $S_{\text{pl}}$ , resp.  $S_{\text{zar}}$ ) s'appelle un faisceau étale (resp. plat, resp zariskien).

On s'intéresse à la catégorie formée de tel faisceau.

Voici un exemple :

**Proposition 2.2.16.** *Soit  $S$  un schéma. On a un faisceau étale, noté  $\mathcal{O}_{S_{\text{ét}}}$  défini par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{S_{\text{ét}}} : S_{\text{ét}} &\longrightarrow \text{Ann} \\ X &\longmapsto \mathcal{O}_X(X) \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\longmapsto (\mathcal{O}_Y(Y) \xrightarrow{F_Y} \mathcal{O}_X(X)). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Par définition de schéma, le faisceau structural associé est un faisceau à valeur dans la catégorie des anneaux. En passant par le cas affine on montre sans peine que

$$\mathcal{O}_{X \times_S Y}(X \times_S Y) = \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathcal{O}_S(S)} \mathcal{O}_Y(Y).$$

Ainsi pour montrer que  $\mathcal{O}_{S_{\text{ét}}}$  est un faisceau étale, il faut et il suffit de vérifier que pour tout recouvrement  $\{X_\alpha \xrightarrow{\iota_\alpha} X\}_{\alpha \in A} \in \text{Cov}(S_{\text{ét}})$  la suite

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \longrightarrow & \prod_{\alpha} \mathcal{O}_{X_\alpha}(X_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} \mathcal{O}_{X_\alpha}(X_\alpha) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X_\beta}(X_\beta) \\ s \longmapsto & \longrightarrow & (s|_{X_\alpha})_\alpha \\ & & (s_\alpha)_\alpha \longmapsto (s_\alpha \otimes 1 - 1 \otimes s_\beta)_{\alpha, \beta} \end{array}$$

est exacte (où  $s|_{X_\alpha} = \iota_{\alpha, X}(s)$ ). Ce qui se vérifie aisément en utilisant uniquement la structure plate des morphismes ; c'est à dire que  $\mathcal{O}_{S_{\text{ét}}}$  définit un faisceau sur  $\text{Sch}(S)_{\text{pl}}$ .  $\square$

## 2.3 Topos

**Définition 2.3.1.** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. S'il existe une topologie de Grothendieck  $\mathcal{T}$  et une équivalence de catégories entre  $\mathcal{C}$  et la catégorie des faisceaux sur  $\mathcal{T}$  (à valeur dans  $\mathcal{E}ns$ ), on dit que  $\mathcal{C}$  est un topos.*

Si  $\underline{X}$  est un espace topologique et  $\tilde{X}$  la catégorie associée alors muni de tous les morphismes de cette catégorie, on définit un site (on parle de topologie discrète). Alors la catégorie des faisceaux sur  $\tilde{X}$  (i.e. des faisceaux à valeur dans  $\mathcal{E}ns$  au sens usuel) est un topos. On le note  $\mathcal{T}op(X)$ .

**Lemme 2.3.2.** *La catégorie  $\mathcal{E}ns$  est un topos.*

*Démonstration.* Soit  $\underline{X}$  un espace topologique dont l'espace sous-jacent est réduit à un seul point :  $X = \{\emptyset\}$ . On considère le foncteur suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{T}op(X) &\longrightarrow \mathcal{E}ns \\ F &\longmapsto F(X). \end{aligned}$$

Si  $E$  est un ensemble, on considère le foncteur  $F_E : \tilde{X} \longrightarrow \mathcal{E}ns$  qui associe à  $\emptyset$  l'ensemble  $E$ . Alors le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{E}ns &\longrightarrow \mathcal{T}op(X) \\ E &\longmapsto F_E \end{aligned}$$

établit notre équivalence de catégories.  $\square$

**Définition 2.3.3.** *Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux topos. Un morphisme de topos  $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  est la donnée de*

- Deux foncteurs

$$f_* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \quad f^* : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C},$$

où  $f^*$  est exacte à gauche.

- Un isomorphisme  $\varphi$  d'adjonction : pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{D}$  et tout objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$

$$\varphi_{X, Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f^*(X), Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, f_*(Y))$$

On appelle  $f_*$  foncteur image directe et  $f^*$  foncteur image inverse.

On note parfois  $f = (f_*, f^*, \varphi)$ .

On note  $\text{HomTop}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  l'ensemble (en fait l'univers) des morphismes de topos.

En général, on donne pour définir un morphisme topos, le foncteur  $f^*$  où  $f_*$  l'un étant déterminé par l'autre à isomorphisme unique près (c.f. SGA 4 exposé IV remarque 3.1.1.).

**Définition 2.3.4.** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux topos et  $u, v : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  deux morphismes de topos. Un morphisme de morphismes de topos  $u \rightarrow v$  est la donnée d'un morphisme naturel entre les faisceaux images directes

$$u_* \rightarrow v_*.$$

On définit ainsi la catégorie des morphismes de topos  $\text{HomTop}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ .

Nous allons voir comment définir un morphisme de topos, à partir d'un morphisme de schémas.

**Proposition 2.3.5.** Soient  $S$  un schéma et  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie pleine de  $\text{Sch}(S)$  tel que le produit fibré de deux objets de  $\mathcal{C}$  est un objet de  $\mathcal{C}$ . Soit  $E$  un ensemble de morphismes satisfaisant les axiomes de 2.2.4.

Supposons que pour tout morphisme  $f$  de  $\mathcal{C}$  composable avec un morphisme  $g$  de  $E$  alors  $fg$  est un morphisme de  $\mathcal{C}$ . Alors  $\mathcal{C}$  munit de la topologie de  $E$  (i.e. un recouvrement d'un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  est une famille surjective de morphisme de  $E$  de but  $X$ ) est un site noté  $(\mathcal{C}/S)_E$ .

*Démonstration.* Vu les hypothèses il n'y a aucune difficulté.  $\square$

Si on prend pour  $\mathcal{C}$  la sous-catégorie pleine des  $S$ -schémas étales et pour  $E$  les morphismes étales de  $S$ -schémas (c'est à dire tous les morphismes de cette catégorie) alors  $(\mathcal{C}/S)_E$  est le petit site étale.

Le premier pas pour, à partir d'un morphisme de schémas, définir un morphisme de topos est de définir une application continue (i.e. un morphisme de sites).

**Proposition 2.3.6.** Soient  $f : S \rightarrow S'$  un morphisme de schémas,  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie pleine de  $\text{Sch}(S)$  et  $\mathcal{C}'$  une sous-catégorie pleine de  $\text{Sch}(S')$  tel que l'on ait des sites  $(\mathcal{C}/S)_E$  et  $(\mathcal{C}'/S')_{E'}$ . Supposons que

(a). Pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{C}'$ ,  $Y \times_{S'} S$  est un objet de  $\mathcal{C}$ .

(b). Pour tout morphisme  $U \rightarrow Y$  de  $E'$  le morphisme  $U \times_{S'} S \rightarrow Y \times_{S'} S$  est dans  $E$ .

Alors  $f$  induit un morphisme de sites

$$f_{E, E'} : (\mathcal{C}/S)_E \rightarrow (\mathcal{C}'/S')_{E'}.$$

*Démonstration.* D'après la définition 1.2.2, il faut se donner un foncteur  $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  (car  $\text{Cat}((\mathcal{C}/S)_E) = \mathcal{C}$ ). On pose alors :

$$\begin{aligned} G : \mathcal{C}' &\rightarrow \mathcal{C} \\ Y &\mapsto Y \times_{S'} S \\ (Y_1 \xrightarrow{\alpha} Y_2) &\mapsto \left( Y_1 \times_{S'} S \xrightarrow{(\alpha, \text{Id}_S)} Y_2 \times_{S'} S \right) \end{aligned}$$

Les conditions (a) et (b) justifient la bonne définition de ce foncteur ainsi que les axiomes de la définition 1.2.2.  $\square$

**Corollaire 2.3.7.** Avec les notations de la proposition précédente, si on prend  $S = S'$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$  et  $f = \text{Id}_S$  alors  $f_{E, E'}$  définit un morphisme de site si et seulement si  $(\mathcal{C}/S)_E \leq (\mathcal{C}/S)_{E'}$ .

*Démonstration.* Dans ce cas la condition (a) de la proposition précédente est toujours vérifiée car par hypothèse  $\mathcal{C}$  est fermé pour le produit fibré. De plus  $Y \times_S S = Y$ , ainsi la condition (b) équivaut à dire qu'un morphisme de  $E'$  est un morphisme de  $E$ .  $\square$

**Corollaire 2.3.8.** Soit  $S$  un schéma. Via le morphisme identité on a

$$\begin{aligned} \text{Sch}(S)_{pl} &\rightarrow \text{Sch}(S)_{ét} \rightarrow \text{Sch}(S)_{zar}. \\ S_{ét} &\rightarrow S_{zar}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* C'est le corollaire précédent avec le corollaire 2.2.13.  $\square$

Nous voulons toujours définir un morphisme de topos. Avant de définir un morphisme dans la catégorie des faisceaux, définissons-le dans la catégorie des préfaisceaux.

**Théorème 2.3.9.** *Tout morphisme de schémas  $f : S \rightarrow S'$  satisfaisant les hypothèses de 2.3.6, induit un foncteur*

$$\begin{aligned} (f_{E,E'})_p : \mathcal{P}_{(\mathcal{C}/S)_E} &\longrightarrow \mathcal{P}_{(\mathcal{C}'/S')_{E'}} \\ P &\longmapsto P \circ (f_{E,E'})^{-1} \end{aligned}$$

(c.f. définition 1.2.2 pour  $(f_{E,E'})^{-1}$ ). On appelle le préfaisceau  $(f_{E,E'})_p(P)$  l'image directe du préfaisceau  $P$ .

De plus ce foncteur admet un adjoint à gauche

$$(f_{E,E'})^p : \mathcal{P}_{(\mathcal{C}'/S')_{E'}} \longrightarrow \mathcal{P}_{(\mathcal{C}/S)_E}.$$

On appelle le préfaisceau  $(f_{E,E'})^p(P')$  l'image inverse du préfaisceau  $P'$ .

*Démonstration.* On peut donner explicitement le foncteur image directe en jumellant les derniers résultats : soient  $P$  un préfaisceau sur  $(\mathcal{C}/S)_E$  et  $Y$  un objet de  $\mathcal{C}'$  alors  $(f_{E,E'})_p(P)(Y) = P(Y \times_{S'} S)$ . Il est clair que ça définit bien un préfaisceau sur  $(\mathcal{C}'/S')_{E'}$ .

L'existence d'un adjoint à gauche du foncteur image directe est une conséquence générale de la théorie des catégories. Donnons néanmoins sa construction : soit  $P'$  un préfaisceau sur  $(\mathcal{C}'/S')_{E'}$  et  $U$  un objet de  $\mathcal{C}$ .

$$(f_{E,E'})^p(P')(U) = \varinjlim P(U')$$

où la limite est prise sur les paires  $(U \xrightarrow{g} U', U')$  telle que

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & U' \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ S & \xrightarrow{f} & S' \end{array}$$

et où on dira que  $(g, U') \rightarrow (h, V')$  s'il existe un morphisme de  $S'$ -schémas  $k : U' \rightarrow V'$  tel que  $kg = h$ .  $\square$

**Proposition 2.3.10.** *Avec les notations du théorème précédent, le foncteur  $(f_{E,E'})_p$  est exacte. De plus  $(f_{E,\text{ét}})^p$  (resp.  $(f_{E,\text{zar}})^p$ ) est exacte à gauche.*

*Démonstration.* Milne, ETALE COHOMOLOGY II.2.6.  $\square$

**Lemme 2.3.11.** *Avec les notations du théorème 2.3.9, si  $F$  est un faisceau sur  $(\mathcal{C}/S)_E$  alors  $(f_{E,E'})_p(F)$  est un faisceau sur  $(\mathcal{C}'/S')_{E'}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\{X'_\alpha \rightarrow X'\}_{\alpha \in A}$  un recouvrement de  $(\mathcal{C}'/S')_{E'}$  (i.e. tous les morphismes  $X'_\alpha \rightarrow X'$  sont dans  $E'$ ). Il s'agit de voir que la suite

$$(f_{E,E'})_p(F)(X') \longrightarrow \prod_\alpha (f_{E,E'})_p(F)(X'_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} (f_{E,E'})_p(F)(X'_\alpha \times_{X'} X'_\beta)$$

est exacte. Or, par construction  $(f_{E,E'})_p(F)(X') = F(X' \times_{S'} S)$ . Ainsi la suite précédente équivaut à

$$F(X' \times_{S'} S) \longrightarrow \prod_\alpha F(X'_\alpha \times_{S'} S) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} F((X'_\alpha \times_{X'} X'_\beta) \times_{S'} S)$$

En passant par le cas affine et en raisonnant sur le produit tensoriel, on montre sans peine que

$$(X'_\alpha \times_{X'} X'_\beta) \times_{S'} S \simeq (X'_\alpha \times_{S'} S) \times_S (X'_\beta \times_{S'} S)$$

Il s'agit donc de voir que la suite

$$F(X' \times_{S'} S) \longrightarrow \prod_\alpha F(X'_\alpha \times_{S'} S) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta} F((X'_\alpha \times_{S'} S) \times_S (X'_\beta \times_{S'} S))$$

est exacte. Mais c'est évident puisque  $F$  est un faisceau et que l'hypothèse (b) de 2.3.6 nous indique que  $\{X'_\alpha \times_{S'} S \rightarrow X' \times_{S'} S\}_{\alpha \in A}$  un recouvrement de  $(\mathcal{C}/S)_E$ .  $\square$

**Corollaire 2.3.12.** Avec les notations du théorème 2.3.9, si  $F$  est un faisceau sur  $(\mathcal{C}/S)_E$  et  $\iota_E : \mathcal{F}_{(\mathcal{C}/S)_E} \longrightarrow \mathcal{P}_{(\mathcal{C}/S)_E}$ ,  $\iota_{E'} : \mathcal{F}_{(\mathcal{C}'/S')_{E'}} \longrightarrow \mathcal{P}_{(\mathcal{C}'/S')_{E'}}$  alors

$$(f_{E,E'})_p(\iota_E(F)) = \iota_{E'}((f_{E,E'})_p(F)).$$

*Démonstration.* Il suffit de le vérifier sur chaque objet. Soit  $Y$  un objet de  $\mathcal{C}'$  alors :

$$\begin{aligned} (f_{E,E'})_p(\iota_E(F))(Y) &= (\iota_E(F))(Y \times_{S'} S) \\ &= F(Y \times_{S'} S) \quad \text{ensemblément (i.e. on a oublié la structure de faisceau)} \\ &= \iota_{E'}((f_{E,E'})_p(F))(Y). \end{aligned}$$

□

En général le préfaisceau image inverse n'est pas un faisceau.

**Corollaire 2.3.13.** Soit  $f : S \longrightarrow S'$  un morphisme de schémas satisfaisant les hypothèses de 2.3.6 et tel que le foncteur image inverse (de préfaisceau) déduit de  $f$  soit exacte à gauche, alors  $f$  induit un morphisme de topos :

$$f^{top} : \mathcal{F}_{(\mathcal{C}/S)_E} \longrightarrow \mathcal{F}_{(\mathcal{C}'/S')_{E'}}$$

où pour tout faisceau  $F$  sur  $(\mathcal{C}/S)_E$   $(f^{top})_*(F) = (f_{E,E'})_p(F)$  et  $(f^{top})^*(F) = \left((f_{E,E'})^p(F)\right)^\sharp$  le faisceau associé au préfaisceau  $(f_{E,E'})^p(F)$ .

*Démonstration.* Il faut vérifier que la formule d'adjonction est correcte, c'est à dire que pour tout objet  $F'$  de  $\mathcal{F}_{(\mathcal{C}'/S')_{E'}}$  et tout objet  $F$  de  $\mathcal{F}_{(\mathcal{C}/S)_E}$

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}_{(\mathcal{C}/S)_E}}\left((f^{top})^*(F), F'\right) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{F}_{(\mathcal{C}'/S')_{E'}}}\left(F, (f^{top})_*(F')\right)$$

Or

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{F}_{(\mathcal{C}/S)_E}}\left((f^{top})^*(F), F'\right) &= \text{Hom}_{\mathcal{F}_{(\mathcal{C}/S)_E}}\left((f_{E,E'})^p(F)^\sharp, F'\right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{(\mathcal{C}/S)_E}}\left((f_{E,E'})^p(F), \iota_E(F')\right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{(\mathcal{C}'/S')_{E'}}}\left(F, (f_{E,E'})_p(\iota_E(F'))\right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{P}_{(\mathcal{C}'/S')_{E'}}}\left(F, \iota_{E'}((f_{E,E'})_p(F'))\right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{F}_{(\mathcal{C}'/S')_{E'}}}\left(F^\sharp, (f_{E,E'})_p(F')\right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{F}_{(\mathcal{C}'/S')_{E'}}}\left(F, (f^{top})_*(F')\right). \end{aligned}$$

□

**Définition 2.3.14.** Soit  $\mathcal{C}$  un topos. On dira que  $\mathcal{C}$  est un topos étale (resp. plat, resp. zariskien) s'il existe un schéma  $S$  tel que  $E \simeq \mathcal{F}_{S_{\text{ét}}}$  (resp.  $E \simeq \mathcal{F}_{S_{\text{pl}}}$ , resp.  $E \simeq \mathcal{F}_{S_{\text{zar}}}$ ). On note alors

$$\widetilde{S}_{\text{ét}}$$

(resp.  $\widetilde{S}_{\text{pl}}$ , resp.  $\widetilde{S}_{\text{zar}}$ ).

Par exemple, via 2.3.10, on observe que tout morphisme de schémas  $f : S \longrightarrow S'$  induit un morphisme de topos

$$f^{top} : \widetilde{S}_{\text{ét}} \longrightarrow \widetilde{S}'_{\text{ét}}$$

## 2.4 Fibres.

On cherche à imiter les germes d'un faisceaux (au sens usuel).  
Dans le langage des topos :

**Définition 2.4.1.** Soit  $\mathcal{C}$  un topos. On appelle point de  $\mathcal{C}$  tout morphisme de topos

$$\mathcal{E}ns \longrightarrow \mathcal{C}.$$

On définit la catégorie des points de  $\mathcal{C}$  note  $\mathcal{Pt}(\mathcal{C})$  la catégorie  $\underline{\text{HomTop}}(\mathcal{E}ns, \mathcal{C})$ .

**Définition 2.4.2.** Soient  $E$  un topos et  $p = (p_*, p^*, \varphi)$  un point de  $E$ . Soit  $F$  un objet de  $E$ . L'ensemble  $p^*(F)$  est appelé la fibre de  $E$  en  $p$  et noté  $F_p$ .

Interprétons dans le langage des schémas.

**Définition 2.4.3.** Soit  $S$  un schéma. Un point géométrique de  $S$  est un  $S$ -schéma qui est le spectre d'un corps séparablement clos.

**Lemme 2.4.4.** Soit  $S$  un schéma. La donnée d'un point géométrique équivaut à la donnée d'un point (au sens classique)  $s \in S$  et d'une extension séparablement close de  $\frac{\mathcal{O}_{S,s}}{\mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{S,s}}$ , où  $\mathfrak{m}_s$  est l'idéal maximal de l'anneau local  $\mathcal{O}_{S,s}$ .

**Définition 2.4.5.** Soit  $S$  un schéma et  $\xi$  un point géométrique. Notons  $u : \xi \longrightarrow S$  son morphisme de  $S$ -structure.

On appelle foncteur fibre géométrique relatif à  $\xi$ , le foncteur

$$\bullet_\xi : \widetilde{S}_{\text{ét}} \xrightarrow{u^*} \widetilde{\xi}_{\text{ét}} \xrightarrow{\Gamma(\xi, \bullet)} \mathcal{E}ns$$

où  $\Gamma(\xi, \bullet)$  est défini en 1.3.11 et où on note  $u^* = (u^{\text{top}})^*$  (c.f. corollaire 2.3.13).

On note  $F_\xi$  l'image d'un faisceau étale  $F$  par ce foncteur et  $u_\xi$  l'image d'un morphisme.

Soit  $s \in S$  un point ordinaire de  $S$ . On lui fait correspondre (lemme) un point géométrique en prenant une extension séparablement close (en fait on peut prendre la cloture séparable) de  $\frac{\mathcal{O}_{S,s}}{\mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{S,s}}$ . On note ce point géométrique  $\bar{s}$ .

(c.f. SGA 4 exposé VII remarque 3.4.).

**Lemme 2.4.6.** Soient  $S$  un schéma,  $F$  un faisceau (resp.  $P$  un préfaisceau) sur  $S_{\text{ét}}$  et  $\xi$  un point géométrique de  $S$ . Alors

$$F_\xi = \varinjlim F(X) \quad (\text{resp. } (P^\sharp)_\xi = \varinjlim P(X)),$$

où la limite est prise sur les couples  $(X, \xi \xrightarrow{f} X)$  avec  $X$  un  $S$ -schéma étale et  $f$  un morphisme de  $S$ -schémas et où  $(X, f) \longrightarrow (Y, g)$  est la donnée d'un morphisme de  $S$ -schéma  $h : X \longrightarrow Y$  (nécessairement étale) tel que  $hf = g$ .

*Démonstration.* c.f. SGA 4 exposé VIII proposition 3.9. □

**Théorème 2.4.7.** Soient  $S$  un schéma et  $f : F \longrightarrow G$  un morphisme de faisceaux étales sur  $S$ . Alors  $f$  est un isomorphisme si et seulement si c'est le cas pour tous les morphismes induits  $u_{\bar{s}} : F_{\bar{s}} \longrightarrow G_{\bar{s}}$  où  $s$  est un point ordinaire de  $S$ .

**Corollaire 2.4.8.** Un morphisme de faisceaux étales est un monomorphisme (resp. épimorphisme) s'il l'est sur chacune de ses fibres.

**Corollaire 2.4.9.** Une suite de faisceaux étales est exacte si et seulement si c'est le cas sur chacune de ses fibres.