M/12/08

J. Wildeshaus, "Théorème de changement de base lisse"

On considère
$$g : S' \longrightarrow S$$
un morphisme donné de schémas,
$$L \subset \mathbb{Z}$$
un ensemble de premiers.

Question: Identifier une condition sur g telle que le Thm. de changt. de base soit vrai, $\forall X/S$, $\forall \mathcal{F} \in S(X_{ét})_{L\text{-tor}}$:

$$\begin{tikzcd}
X' := X \times_S S' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & X \arrow[d, "f"] \\
S' \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}$$

alors $g^* R^q f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R^q f'_* g'^* \mathcal{F}$, $\forall q$.

(éventuellement restreindre "$\forall X/S$"...)

§1 Acyclicité

Rappel: [Brad, Thm. 3.5]

Si f est quasi-compact et quasi-sép., alors la fibre en $\bar{s}'$ (pt. géo. de S') de
$$g^* R^q f_* \mathcal{F} \longrightarrow R^q f'_* g'^* \mathcal{F}$$
s'identifie à
$$H^q(X \times_S S_{(\bar{s}')}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X \times_S S'_{(\bar{s}')}, g'^*_{(\bar{s}')} \mathcal{F})$$
$$\| $$
$$(g'_{(\bar{s}')} : X \times_S (S'_{(\bar{s}')} \longrightarrow S_{(\bar{s}')})) \qquad H^q(X \times_S S_{(\bar{s}')}, R g'_{(\bar{s}')*} g'^*_{(\bar{s}')} \mathcal{F})$$

Définition: $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq -1$, $h : Y' \to Y$.

(a) h est dit <u>n-acyclique</u> si $\forall\ \mathcal{F} \in S(Y_{ét})_{L\text{-tor}}$

$$\mathrm{Cone}\left(\mathcal{F} \xrightarrow{\smile} Rh_* h^* \mathcal{F}\right)$$

est concentré en degré $> n$.

c.a.d.: $\mathcal{F} \hookrightarrow h_* h^* \mathcal{F}$ si $n = -1$,

$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} h_* h^* \mathcal{F} \\ \text{et } R^1 h_* h^* \mathcal{F} = \ldots = R^n h_* h^* \mathcal{F} = 0 \end{array}\right\}$ si $n \geq 0$.

c.a.d.: $\forall\ X/Y$ étale et de prés. finie, $X' := X \times_Y Y'$

$$H^q_{ét}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q_{ét}(X', h^* \mathcal{F})$$

$\cong$ pour $q \leq n$, $\hookrightarrow$ pour $q = n+1$.

(voir [Brad, Sect. 4]...)

(b) h est dit <u>acyclique</u> s'il est n-acyclique $\forall n$.

(c) h est dit <u>universellement (n-)acyclique</u> si

h_Z est (n-) acyclique $\forall\ Z/Y$.

(d) h est dit <u>localement (n-) acyclique</u> si

$\forall\ \bar{y}'$ pt. géo. de Y',

$h_{(\bar{y}')} : Y'_{(\bar{y}')} \longrightarrow Y_{(\bar{y}')}$ est (n-) acyclique.

(e) h est dit <u>universellement localement (n-) acyclique</u>...

Remarque: D'après ce que l'on vient de dire,

"g loc.^{mt} (univ.^{mt} acyclique)" implique

"Thm. de chngmt. de base $\forall\ X/S$ quasi-compact et quasi-séparé".

Proposition 1: Tout morphisme étale de prés. finie est loc.^{mt} (univ.^{mt} acyc.) et univ.^{mt} (loc.^{mt} acyc.).

Démonstration: $Y'_{(\bar{y}')} \longrightarrow Y_{(\bar{y}')}$ est l'identité...

CQFD

(Donc, le "Thm. de chgmt. de base étale" n'est pas très difficile...)

<u>Théorème 2:</u> Soit g un morphisme univ.^{mt} loc.^{mt} acyc., $f: X \to S$ quasi-comp. et quasi-sép. Alors, le chgmt. de base vaut pour g et f:

$$g^* R^q f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R^q f'_* g'^* \mathcal{F}$$

$\forall q$, $\forall \mathcal{F} \in S(X_{ét})_{L\text{-tor}}$.

<u>Démonstration:</u> OPS: S affine.

Mayer-Vietoris pour un rec. fini de X par des S-affines

$\rightsquigarrow$ OPS: $X \overset{\circ}{\hookrightarrow} S\text{-affine} \longrightarrow S$.

compat. avec des limites

$\rightsquigarrow$ OPS: $X \overset{\circ}{\hookrightarrow} S$-affine de t.f.

donc: $X \overset{\circ}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N_S$ pour $N \gg 0$.

Il existe donc une compact. de notre situation:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, hook, "j'"'] \arrow[dd, bend right=60, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & X \arrow[d, hook, "j"] \arrow[dd, bend left=60, "f"] \\
\overline{X'} \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}'"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{f}"] \\
S' \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}$$

avec $\overline{f}$ propre.

alors: $g^* R f_* \mathcal{F} = g^* R \overline{f}_* R j_* \mathcal{F} \xrightarrow[\text{base propre}]{\text{chgmt. de}} R \overline{f}'_* \overline{g}^* R j_* \mathcal{F}$.

g est univ.^{mt} loc.^{mt} acyc., donc $\overline{g}$ est loc.^{mt} acyc.

j est une imm. ouv., donc étale de prés. finie

$\underset{\text{Déf.}}{\Longrightarrow}$ $R \overline{f}'_* \overline{g}^* R j_* \mathcal{F} = R \overline{f}'_* R j'_* g'^* \mathcal{F} = R f'_* g'^* \mathcal{F}$.

<u>CQFD</u>

Théorème 3:

Si $g : S' \longrightarrow S$ est le morph. str. $\mathbb{A}^1_S \longrightarrow S$, et tous les $l \in L$ sont inversibles sur S, alors g est (univ.^{mt}) loc.^{mt} acyc.

Exemple: Soit k un corps sep.^{mt} clos, p premier, $r \geq 1$

$$H^i_{ét}(\mathbb{A}^1_k, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, & i=0 \\ ?\,, & i=1 \\ 0\,, & i=2 \end{cases}$$

(a) Si $p \in k^*$, alors

$$\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \cong \mu_{p^r} = \ker(p^r : \mathcal{O}^* \twoheadrightarrow \mathcal{O}^*)$$

$$\rightsquigarrow \quad 1 \longrightarrow \mu_{p^r}(k) \longrightarrow k^* \xrightarrow{p^r} k^*$$

$$\longrightarrow H^1_{ét}(\mathbb{A}^1_k, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1_{ét}(\mathbb{A}^1_k, \mathcal{O}^*) = \mathrm{Pic}_{\mathbb{A}^1_k} = 0$$

donc, $H^1_{ét}(\mathbb{A}^1_k, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) = 0$.

au total: $H^q_{ét}(\mathbb{A}^1_k, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) = H^q_{ét}(\mathrm{Spec}\, k, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$,
et $\mathbb{A}^1_k \to \mathrm{Spec}\, k$ est acyclique si car $k \notin L$.

(b) Si $p = \mathrm{car}\, k$, alors (<u>théorie d'Artin-Schreier</u>)

$$H^1_{ét}(\mathbb{A}^1_k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong k[T] / \{f^p - f,\ f \in k[T]\} \neq 0.$$

Donc, $\mathbb{A}^1_k \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k$ n'est pas acyclique si car $k \in L$.

Pour prouver le Thm. 3, on aura besoin de comprendre le lien entre "acyc." et "loc.^{mt} acyc.":

Proposition 4: $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq -1$, $h : Y' \longrightarrow Y$ quasi-comp. et quasi-sép.
Supposons que h est loc.^{mt} $(n-1)$-acyc., et toutes les fibres géo. $Y'_{\bar{y}} \longrightarrow \bar{y}$, t.q. $\kappa(\bar{y})/\kappa(y)$ algébrique, sont n-acyc.
Alors, h est n-acyc.

Corollaire 5: $n \in \mathbb{Z}, n \geq -1$, $h : Y' \longrightarrow Y$.

Supposons que $\forall$ pt. géo. $\bar{y}'$ de Y'

$$\rightsquigarrow h_{(\bar{y}')} : Y'_{(\bar{y}')} \longrightarrow Y_{(\bar{y}')}$$

et $\forall$ pt. géo. $\bar{y}$ de $Y_{(\bar{y}')}$, tq. $\kappa(\bar{y})|\kappa(y)$ alg.,

la fibre $(Y'_{(\bar{y}')})_{\bar{y}} \longrightarrow \bar{y}$ est acyc.

Alors, h est loc.^{mt} acyc.

Demonstration: appliquer la Prop. 4 à t. les $h_{(\bar{y}')}$...

CQFD

Remarque: Thm. 3, Exemple, Prop. 4 $\Longrightarrow$ $\mathbb{A}^1_S \longrightarrow S$ est (univ.^{mt}) acyc. si $L \subset \mathcal{O}_S^*$.

($\mathbb{A}^1$-invariance homotopique de la coh. étale!)

(Par contre, un morph. étale est rarement acyclique...)

Démonstration du Thm. 3: (à partir du Cor. 5.)

(esquisse.)

OPS : $S = \operatorname{Spec} A$ str.^{mt} Hensélien

$$\rightsquigarrow S' = \operatorname{Spec} A[T] = \mathbb{A}^1_A.$$

On se réduit d'abord au cas où le pt. géo. $\bar{s}'$ de S' est au-dessus de l'origine $0 \in \mathbb{A}^1_A$

$$\rightsquigarrow S'_{(\bar{s}')} = \operatorname{Spec} A\{T\},$$

$A\{T\}$ ($\subset A[[T]]$) l'Hensélisé strict de $A[T]$ en $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}_A, T)$.

donc: vérifier l'acyclicité des fibres géo. de

$$g_{(\bar{s}')} : \operatorname{Spec}(A \longrightarrow A\{T\}).$$

c.a.d.: $\bar{Z}$ une telle fibre, $\ell \in L$, alors $\forall r \geq 1$

$$H^0_{et}(\bar{Z}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z},$$

$$H^i_{et}(\bar{Z}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) = 0 \quad \forall i \geq 1.$$

compat. avec les limites:

$i \geq 2$: ✓ car $A\{T\} = \varinjlim B$,

Spec B des courbes affines $/A$

Thm. de Lefschetz faible: $H^i_{ét}(\bar{Z}, \cdot) = 0 \quad \forall i \geq 2$.

$i \leq 1$: OPS: A l'Hensélisé strict d'une $\mathbb{Z}$-alg. de type fini. (*)

"H^0": il faut montrer: $\bar{Z} \neq \emptyset$ et $\bar{Z}$ est connexe.

$g(s')$ admet des sections, donc $\bar{Z} \neq \emptyset$.

Pour "connexe", on se réduit au cas où A est intègre,

et $\bar{Z}$ est la fibre géo. générique,

c.a.d.: $\bar{Z} = \mathrm{Spec}(A\{T\} \otimes_A \mathrm{Frac}(A)^{sep})$.

toujours compat. avec les limites: considérer

$Z_K := \mathrm{Spec}(A\{T\} \otimes_A K)$

pour tout $K/\mathrm{Frac}(A)$ séparable.

$A' :=$ la clôture intégrale de A dans K.

boîte noire: (*) $\Longrightarrow$ A est <u>excellent</u> $\Longrightarrow$ A' fini sur A.

Donc, $A\{T\} \otimes_A A'$ est fini car $A\{T\}$ str.^{mt} Hens,

$\rightsquigarrow$ $A\{T\} \otimes_A A'$ str.^{mt} Hens.

$\rightsquigarrow$ $A\{T\} \otimes_A A' = A'\{T\} \subset A'[[T]]$ intègre.

Donc, $Z_K = \mathrm{Spec}(A'\{T\} \otimes_{A'} K)$ intègre, donc connexe.

"H^1": (*) $\Longrightarrow$ A est excellent.

soit: [SGA 4, pp. 197-202]: tout rev.^{mt} de Galois fini de $\bar{Z}$ dont le degré est $\in S^*$, est trivial.

donc: $H^1_{ét}(\bar{Z}, \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(\bar{Z}), \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}) = 0$.

soit: pour tout $K/\mathrm{Frac}(A)$ séparable, considérer la suite de Kummer

$$1 \longrightarrow \mu_{\ell^r} \longrightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{\ell^r} \mathcal{O}^* \longrightarrow 1,$$

et constate [FZK, pp. 78-80]:

$$\varinjlim_{K} (A\{T\}\otimes_A K)^*/(A\{T\}\otimes_A K)^{*\,l^r} \doteq \varinjlim_{K} K^*/K^{*\,l^r} = 1,$$

$\forall K$: $\ker l^r : \mathrm{Pic}\, Z_K \longrightarrow \mathrm{Pic}\, Z_K$ est trivial...

CQFD

<u>Corollaire 6:</u> $g : S' \longrightarrow S$ tel que Zariski-loc.^{mt} sur S',

g est le composé

$$S' \xrightarrow{g_0} \mathbb{A}^n_S \underset{\text{morph. str.}}{\longrightarrow} S,$$

avec g_0 étale de prés. finie, $L \subset S^*$,

alors g est univ.^{mt} loc.^{mt} acyc.,

et satisfait donc le chgmt. de base

pour tout $f : X \longrightarrow S$ quasi-comp. et quasi-sép.

18/12/08

<u>Démonstration de la Prop. 4:</u> OPS: Y quasi-comp., $X = Y$.

[Frédéric 2, Cor. 2.14]: OPS: $\mathcal{F} \in S(Y_{ét})_{L\text{-}tor}$ est constructible.

OPS: $\mathcal{F}$ est de la forme

$$u_* F_0,$$

$u : \bar{y} \longrightarrow Y$ un pt. géo. de Y, $\kappa(\bar{y})/\kappa(y)$ sep.,

F_0 un groupe Ab. fini de L-torsion.

$\rightsquigarrow$ diagr. cart.

$$\begin{tikzcd} Y'_{\bar{y}} \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "h'"'] & Y' \arrow[d, "h"] \\ \bar{y} \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd} \qquad (*)$$

on montrera d'abord: (chgmt. de base partiel.)

$$(1) \qquad h^* R^q u_* F_0 \longrightarrow R^q u'_* h'^* F_0$$

est $\cong$ pour $q \leq n-1$, $\hookrightarrow$ pour $q = n$:

changement de base propre (appl. aux immers. fermées):

OPS: $\bar{y}$ au-dessus d'un pt. générique de Y.

u (et u') est alors lim de morph. étales de prés. finie.

Soit $\bar{y}'$ un pt. géo. de Y'.

[Brad, Thm. 3.5]: la fibre de (1) en $\bar{y}'$ est

$$(1') \qquad H^q_{et}(\bar{y}\times_Y Y_{(\bar{y}')}, \underline{F_0}) \longrightarrow H^q_{et}(\bar{y}\times_Y Y'_{(\bar{y}')}, \underline{F_0}).$$

D'après l'hypot., $Y'_{(\bar{y}')} \longrightarrow Y_{(\bar{y}')}$ est $(n-1)$-acyc.

compat avec les limites & définitions:

$$(1') \ \cong \text{ pour } q\le n-1, \ \hookrightarrow \text{ pour } q=n.$$

donc: (1) ✓.

$$\underset{\text{donc } R^q u_*=0,\, q>0}{\overset{u_* \text{ exacte}}{\Longleftrightarrow}} \qquad \underset{(2)}{h^* u_* F_0 \longrightarrow u'_* h'^* F_0} \begin{cases} \text{injectif, si } n\ge 0 \\ \text{bijectif, si } n\ge 1 \end{cases}$$

$$\text{et } R^1 u'_* h'^* F_0 = \dots = R^{n-1} u'_* h'^* F_0 = 0.$$

Considérons

$$\begin{tikzcd} u_* F_0 \arrow[r] \arrow[rrr, bend right] & h_* h^* u_* F_0 \arrow[r, "h_*(2)"] & h_* u'_* h'^* F_0 = & u_* h'_* h'^* F_0 \end{tikzcd}$$

$$= u_*(\text{adj}: F_0 \longrightarrow h'_* h'^* F_0),$$

donc $\hookrightarrow$ car h' est (-1)-acyc. d'après l'hyp.

donc: $u_* F_0 \hookrightarrow h_* h^* u_* F_0$.

Si $n\ge 0$, alors $h_*(2)$ est $\hookrightarrow$, et adj: $F_0 \longrightarrow h'_* h'^* F_0$ d'après l'hyp.

donc: $n\ge 0$, alors $u_* F_0 \xrightarrow{\sim} h_* h^* u_* F_0$.

Pour terminer, supposons $n\ge 1$, et montrons que

$$H^q_{et}(Y, u_* F_0) \longrightarrow H^q_{et}(Y', h^* u_* F_0) \begin{cases} \cong \text{ pour } q\le n \\ \hookrightarrow \text{ pour } q=n+1 \end{cases}$$

suite spectrale de Leray pour u':

$$H^p_{et}(Y', R^s u'_* h'^* F_0) \Longrightarrow H^{p+s}_{et}(Y'_{\bar{y}}, h'^* F_0).$$

avec (2) : $H^q_{ét}(Y', h^* u_* F_0) \hookrightarrow H^q_{ét}(Y'_{\bar y}, h'^* F_0)$

pour $q \leq n$.

d'après l'hyp. : pour $q \geq n$,

$H^q_{ét}(Y'_{\bar y}, h'^* F_0) = H^q_{ét}(\bar y, F_0) = 0$ si $q > 0$.

donc : $H^q_{ét}(Y', h^* u_* F_0) = 0$, $1 \leq q \leq n$.

d'autre part : $H^q_{ét}(Y, u_* F_0) = H^q_{ét}(\bar y, F_0) = 0$ $\forall q > 0$.

CQFD

§2 Morphismes lisses

__Définition :__ Un morphisme $g : S' \longrightarrow S$ est dit **lisse** s'il est de prés. finie, plat, et si $\Omega_{S'/S}$ est loc.^{mt} libre de rg. égal à la dim. des fibres de g.

donc : étale = lisse & quasi-fini.

__Proposition 7 :__ Supposons $g : S' \longrightarrow S$ de prés. finie. Alors, g est lisse ssi Zariski-loc.^{mt} sur S', g est le composé

$$S' \xrightarrow{g_0} \mathbb{A}^n_S \xrightarrow[\text{morph. str.}]{} S ,$$

avec g_0 étale.

__Indice :__ g lisse, $s' \in S$.

Supposons trouvés $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{O}_{S'}$ tels que $dx_1, \dots, dx_n$ soit une $\mathcal{O}_{S'}$-base de $\Omega_{S'/S}$.

$\rightsquigarrow$ $x_1, \dots, x_n : S' \longrightarrow \mathbb{A}^1_S$

$\rightsquigarrow$ $g_0 := \underline{x} : S' \longrightarrow \mathbb{A}^n_S$

Par constr., g_0 induit

$$g_{0\#} : g_0^* \Omega_{\mathbb{A}^n_S/S} \xrightarrow{\sim} \Omega_{S'/S}$$

[Daniel 1, Cor. 2.18] : $\operatorname{coker} g_{0\#} = \Omega_{S'/\mathbb{A}^n_S}$

Ceci montre que $\Omega_{S'/\mathbb{A}^n_S} = 0$ ...

Cor. 6 & Prop. 7:

<u>Théorème de chgmt. de base lisse:</u> $g : S' \longrightarrow S$ lisse, $L \subset S^*$,

alors $g^* R^q f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R^q f'_* g'^* \mathcal{F}$, $\forall q$,

$\forall f : X \longrightarrow S$ quasi-comp. et quasi-sép.,

$\forall \mathcal{F} \in S(X_{ét})_{L\text{-tor}}$.

<u>Corollaire:</u> (Chgmt. de base propre-lisse.)

$g : S' \longrightarrow S$ propre et lisse, $L \subset S^*$, $\mathcal{G} \in S(S'_{ét})_{L\text{-tor}}$ constructible loc.^{mt} const.

(a) $R^q g_* \mathcal{G}$ est constr. loc.^{mt} const., $\forall q$.

(b) Si S est connexe, alors les groupes Abéliens

$$H^q_{ét}(S'_{\bar{s}}, \mathcal{G})$$

sont (non-canoniquement) iso., $\forall \bar{s}$ pt. géo. de S.

<u>Démonstration:</u> (a) $\Longrightarrow$ (b): chgmt. de base propre:

$$H^q_{ét}(S'_{\bar{s}}, \mathcal{G}) = (R^q g_* \mathcal{G})_{\bar{s}} \ldots$$

(a): finitude pour les morph. propres [Brad, Thm. 7.5]: $R^q g_* \mathcal{G}$ constr.

[Frédéric 2, Prop. 1.9]: il faut montrer:

$\bar{s}_0, \bar{s}_1$ pts. géo. de S, $\bar{s}_0$ spécialisation de $\bar{s}_1$, alors

$$(*) \qquad (R^q g_* \mathcal{G})_{\bar{s}_0} \longrightarrow (R^q g_* \mathcal{G})_{\bar{s}_1}$$

est $\cong$.

chgmt. de base $\rightsquigarrow$ OPS: $S = \operatorname{Spec} A$, A local str.^{mt} Henselien, normal, intègre,

Frac A sép.^{mt} clos, $\bar{s}_0$ le point fermé,

$\bar{s}_1$ le point générique.

(*) devient alors $H^q_{ét}(S', \mathcal{G}) \longrightarrow H^q_{ét}(S'_1, \mathcal{G}|_{S'_1})$,

$S'_1 := S' \otimes_A \operatorname{Frac} A$ la fibre générique.

$j' : S'_1 \longrightarrow S'$, $j : \operatorname{Spec}(\operatorname{Frac} A) \longrightarrow \operatorname{Spec} A = S$.

… il faut montrer : $R^n j'_* j'^* \mathcal{G} = \begin{cases} \mathcal{G}, & n=0 \\ 0, & n>0 \end{cases}$.

Cette question est étale-locale sur S'.

⇝ OPS : $\mathcal{G} = \underline{G}$ est constant.

(par contre : on a perdu la propriété de S' sur S !)

$$R^n j'_* j'^* \mathcal{G} = R^n j'_* \underline{G} \underset{\text{base lisse}}{\overset{\text{changement de}}{=}} g^* R^n j_* \underline{G}.$$

S' est lisse sur A, donc normal.

[Frédéric 2, Lemme 3.13] : $R^0 j_* \underline{G} = \underline{G}$

Frac A sép.^{mt} clos : $R^n j_* \underline{G} = 0$ si $n>0$.

CQFD

<u>Corollaire :</u> (à comparer avec [Brad, Cor. 7.3.)

Soient $k \subset K$ deux corps sép.^{mt} clos, X/k quasi-comp.,

$\mathcal{F} \in S(X_{\text{ét}})_{L\text{-tor}}$, car $k \notin L$,

alors $H^q_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q_{\text{ét}}(X \otimes_k K, \mathcal{F})$, $\forall q$.

<u>Démonstration :</u> OPS : k, K alg.^{mt} clos.

Alors, $K = \varinjlim_i A_i$, avec des k-algèbres lisses A_i …

CQFD