Groupe de travail «cohomologie étale»

———————————

FORMALISME DES SIX FONCTEURS ET CONJECTURES DE WEIL

F. DÉGLISE

———————————

Table des matières

1. Conjectures de Weil

1.1. **Fonctions zêta.** Soit X un schéma de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. On note $X_{(0)}$ l'ensemble des points fermés de X. Si x est un tel point, on note $N(x)$ le cardinal du corps résiduel $\kappa(x)$ de x.

Definition 1.1. Avec les notations ci-dessus, on définit la fonction zêta de Hasse-Weil comme la fonction complexe[1]

$$\zeta_X(s) = \prod_{x\in X_{(0)}} \frac{1}{1-N(x)^{-s}}$$

Pour $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, on obtient la fonction zêta de Riemann. Si F est un corps de nombres dont l'anneau des entiers est $\mathcal{O}_F$, dans le cas $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$, on obtient la fonction zêta de Dedekind de F.

1.2. Les conjectures de Weil se placent dans le cas où X est de caractéristique p, définie sur le corps $\mathbb{F}_q$ où q est une puissance de p. Dans ce cas là, on peut simplifier la fonction zêta comme suit.

Pour tout $x \in X_{(0)}$, on pose $\delta_x = [\kappa(x) : \mathbb{F}_q]$, et on introduit la fonction :

$$Z(X,t) = \prod_{x\in X_{(0)}} \frac{1}{1-t^{\delta_x}}$$

On vérifie aussitôt que :

$$\zeta_X(s) = Z(X, q^{-s})$$

———————

Date: Octobre 2008.

[1] Cette fonction converge pour $\Re(s)$ assez grand car X est de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

C'est cette dernière fonction que Weil a considérée dans l'énoncé de ses conjectures. Une propriété remarquable de cette dernière est la formule suivante :

$$\frac{d}{dt}\log Z(X,t)=\sum_{r>0}N_r.t^{r-1}$$

où N_r est le nombre de points fermés de X à valeurs dans $\mathbb{F}_{q^r}$. On la déduit en effet aisément du fait que

$$N_r=\sum_{x\in X_{(0)},\delta_x|r}\delta_x.$$

La fonction zêta de X contient donc une information arithmétique très importante de $X/\mathbb{F}_q$.

1.2. **Nombres de Betti.** Considérons le cas d'un schéma V de caractéristique 0, disons de type fini sur un corps de nombre F. On dispose alors de la cohomologie de Betti rationelle

$$H^*_B(V):=H^*_{sing}(V(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$$

définit comme la cohomologie singulière rationelle de l'espace des points complexes de V.

Lorsque X est projectif lisse, $H^*_B(V)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué de dimension finie. On définit les *nombres de Betti* de V comme la suite indexée par $i\in\mathbb{N}$ des nombres

$$b_i(V):=\dim_{\mathbb{Q}}(H^i_B(V)).$$

De plus, on définit la *caractéristique d'Euler Poincaré* de X comme l'entier

$$\chi(V):=\sum_{i\geq 0}(-1)^i.b_i(V).$$

Ainsi, lorsque V est une courbe de genre g, $\chi(V)=2-2g$.
Rappelons que $\chi(V)$ peut être caractérisé par la théorie de l'intersection. Soit $CH(V\times_F V)$ le groupe des cycles de $V\times_F V$ modulo équivalence rationelle. Utilisant la structure produit sur ce groupe et considérant le cycle $[\Delta]$ définit par la diagonale de V/F, on obtient la relation

$$[\Delta].[\Delta]=\chi(V).[\Delta].$$

Autrement dit, $\chi(V)$ est la multiplicité d'auto-intersection de Δ.

1.3. **Enoncé des conjectures.** Dans l'article [Wei49], après avoir étudié précisément le cas des hypersurfaces de Fermat, A. Weil énonce les conjectures suivantes sur la fonction Z attachée à X.

1.3. Considérons un $\mathbb{F}_q$-schéma X projectif lisse de dimension pure n.

(i) $Z(X,t)$ est une fonction rationelle en t.

(ii) Soit E la multiplicité d'auto-intersection de la diagonale de $X/\mathbb{F}_q$. Alors,

$$Z\big(X,q^{-n}.t^{-1}\big)=\pm q^{nE/2}t^E Z(X,t).$$

(iii) Il existe des polynômes $P_i(t)\in\mathbb{Z}[t]$ pour $i=0,...,2n$ tels que

(a)
$$Z(X,t)=\frac{P_1(t)...P_{2n-1}(t)}{P_0(t)...P_{2n}(t)}.$$

(b) $P_0(t)=1-t$.

(c) $P_{2n}(t)=1-q^nt$.

(d) $\forall i\in[1,2n-1]$, les racines complexes de $P_i(t)$ sont toutes de valeur absolue $q^{i/2}$.

(iv) Avec les hypothèses de (iv), posons $d_i(X) = \deg(P_i(t))$. Alors,

$$E = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i . d_i(X).$$

Si de plus X est obtenu par réduction d'un schéma projectif lisse V sur un corps de nombre F – en une place de F au-dessus de p – alors, $d_i(X) = b_i(V)$.

Considérons le cas où X est une courbe projective lisse de genre g. Il semble[2] que Friedrich Karl Schmidt avait déjà démontré en 1929 les points (i) et (ii) ainsi que l'écriture

$$Z(X,t) = \frac{P_1(t)}{(1-t)(1-q^n.t)},$$

où $P_1(t)$ est un polynôme de degré $2g$. Hasse a démontré le point (iii) pour $g = 1$ et Weil a démontré le cas général des courbes ([**?**]).

Dans l'article original [Wei49], il n'est pas question de cohomologie autrement que par l'intermédiaire des nombres de Betti. De même, l'interprétation du point (iii)(a) en termes d'une formule des points fixes de Lefschetz appliquée à l'endomorphisme de Frobenius de X n'apparait pas. Dans les commentaires de ses oeuvres complètes toutefois, Weil explique qu'il a été conduit à la conjecture (ii) en appliquant la formule des points fixes de Lefschetz à

> « une application génériquement surjective de degré d d'une variété V [*sur un corps de nombre*] de dimension n, lisse et complète, dans elle-même »

et que les parties (iii) et (iv) ont été suggérées par des calculs de Dolbeault sur les nombres de Betti des hypersurfaces de $\mathbb{P}^n$ définies par une équation de Fermat généralisée ($\sum_i a_i.xi^n = 0$, n entier fixé).

1.4. **Cohomologie de Weil.** Il n'y a qu'un pas à faire, à partir des conjectures de Weil, pour chercher à définir une théorie cohomologique pour les k-schémas, k arbitraire, modelée sur la cohomologie de Betti[3]

Fixons donc une corps de base k, et un corps de coefficients K de caractéristique 0. Soit $\mathscr{P}(k)$ la catégorie des k-schémas projectifs lisses, et $Vec_K^{\mathbb{Z}}$ la catégorie des espaces vectoriels gradués, muni de son produit tensoriel d'espace vectoriel gradués.

Definition 1.4. Une cohomologie de Weil pure sur k est un foncteur

$$H : \mathscr{P}(k)^{op} \to Vec_K^{\mathbb{Z}}$$

satisfaisant les axiomes (i) à (iv) suivants :

(i) *Dimension.*– Pour tout X, $H^*(X)$ est positivement gradué.

(ii) *Orientabilité.*– $\dim_K(\mathbb{P}^1_k) = 1$.

(iii) *Formule de Künneth.*– Pour tous schémas projectifs lisse X et Y,

$$H(X \times_k Y) = H(X) \hat{\otimes}_K H(Y).$$

De plus, $H(\mathrm{Spec}(k)) = K$ concentré en degré 0 (élément neutre de $\hat{\otimes}_K$) – autrement dit, H est un foncteur monoïdal (au sens strict).

(iv) *Dualité I.*– Pour tout X, le K-espace vectoriel $H(X)$ est isomorphe à son bidual. – autrement dit, c'est un K-espace vectoriel de dimension finie.

[2] D'après l'article « fonction zêta »de l'Encyclopedia Universalis, édition 1997.

[3] Il semble que Weil n'ai jamais fait ce pas, du moins par écrit. A ma connaissance, le premier a chercher à réaliser cela est J.P.Serre, avec sa cohomologie à coefficients dans les vecteurs de Witt.

Etant donnés V est un K-espace vectoriel gradué, et $r \in \mathbb{Z}$ un entier, on définit le tordu à la Tate de V par la formule

$$V(r) = V \hat{\otimes}_K H^2(\mathbb{P}^1_k)^{\hat{\otimes}_K, -r}$$

bien définie comte tenu de l'axiome (i).

(v) *Dualité II.–* Pour tout k-schéma projectif lisse géométriquement connexe de dimension d, il existe un isomorphisme canonique,

$$\mathrm{Hom}_K(H^*(X), K) \simeq H^{*-2d}(X)(-d)$$

de K-espaces vectoriels gradués, tel que pour tous X, Y projectifs lisses géométriquement connexes, $\epsilon_{X \times_k Y} = \epsilon_X \hat{\otimes}_K \epsilon_Y$. via les isomorphimes naturels qui résultent de (ii) et (iii).

On en déduit un *croché de dualité* dit *de Poincaré* :

$$H^r(X) \otimes H^{2d-r}(X)(d) \xrightarrow{\langle .,. \rangle_X} K$$

(vi) *Classe de cycles.–* Pour tout k-schéma X dans $\mathscr{P}(k)$, il existe un application *classe de cycle*

$$\gamma : CH^r(X) \to H^{2r}(X)(r)$$

telle que :

(a) $\gamma \circ f^* = f^* \circ \gamma$.

(b) pour tous cycles α, β, $\gamma(\alpha \otimes_k \beta) = \gamma(\alpha) \hat{\otimes}_K \gamma(\beta)$ dans $H^*(X \times_k X) = H^*(X) \hat{\otimes}_K H^*(X)$.

(c) Si X est géométriquement connexe de dimension d, pour tout $\alpha \in CH^{2d}(X)$, $\langle 1, \gamma(\alpha) \rangle_X = \deg(\alpha)$.

1.5. Supposons $k = \mathbb{F}_q$, et considérons une cohomologie de Weil H. Soit X un k-schéma projectif lisse géométriquement connexe de dimension n, et $F : X \to X$ l'endomorphisme de Frobenius de X définit localement sur l'anneau de coordonnées A de X par la formule $A \to A, x \mapsto x^q$. Le morphisme F définit donc un endomorphisme K-linéaire homogène de $H(X)$. Soit N_r le cardinal des points fermés de X fixés par F^n – de sorte que cette notation coincide avec celle de la section 1.1. Alors, les axiomes (i) à (iv) impliquent la *formule de Lefschetz* dans le cas de l'endomorphisme de Frobenius :

$$N_r = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i . tr_K\big(F^r|_{H^i(X)}\big)$$

où tr_K désigne la trace de F^r agissant sur $H^i(X)$.
On en déduit formellement le calcul suivant :

$$Z(X, t) = \prod_{i=0}^{2n} det\big(1 - F.t, H^i(X)\big)^{(-1)^{i+1}}$$

ce qui est la conjecture de Weil (i), et la première partie de la conjecture (iii) sauf que les polynômes sont a priori à coefficients dans K. Par ailleurs, la conjecture (ii) concernant l'équation fonctionelle résulte de la dualité de Poincaré. Enfin, le degré de $det(1 - F.t, H^i(X))$ est exactement l'entier $b_i^H(X) = \dim_K(H^i(X))$. [4]

1.6. On peut noter que les axiomes de dualité (iv) et (v) sont impliqués par l'axiome suivant :

[4] L'invariance *par spécialisation* de ces nombres soulève nécessairement la question de la « compatibilité » des cohomologies de Weil par spécialisation. La notion de « structure de spécialisation » entre deux cohomologies de Weil demande donc a être définie...

(vii) *Morphismes de Gysin* : Pour tout morphisme projectif $f : Y \to X$ dans $\mathscr{P}(k)$ équidimensionnel de dimension d, il existe un *morphisme de Gysin*

$$f_! : H^*(Y) \to H^*(X)(-d)$$

homogène de degré $-2d$, vérifiant de plus les propriétés suivantes :

(a) Pour $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$, $f_! g_! = (fg)_!$.

(b) Pour $f : Y \to X$, et $f' : Y' \to X'$, $f_! \otimes_K f'_! = (f \times_k f')_!$.

(c) Pour tout carré cartésien dans $\mathscr{P}(k)$

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{p'} & Y \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X' & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

tel que f et f' sont projectifs et équidimensionnels de même dimension, $p^* f_! = f'_! p'^*$.

En effet, si X est un k-schéma projectif purement de dimension d, $p : X \to \mathrm{Spec}(k)$ le morphisme structural et $\delta : X \to X \times_k X$ le morphisme diagonal, on obtient des accouplements

$$\begin{aligned} \mu_X : H^*(X) \otimes H^*(X)(-d) = H^*(X \times_k X)(-d) &\xrightarrow{\delta^*} H^*(X)(-d) \\ &\xrightarrow{p_!} H^*(\mathrm{Spec}(k)) = K \\ \eta_X : K = H^*(\mathrm{Spec}(k)) &\xrightarrow{p^*} H^*(X) \\ &\xrightarrow{\delta_!} H^*(X \times_k X)(-d) = H^*(X)(-d) \otimes H^*(X) \end{aligned}$$

homogènes de degrés $-2d$ vérifiant les relations $(\mu \otimes 1) \circ (1 \otimes \eta) = 1$ et $(1 \otimes 1) \circ (\eta \otimes 1) = 1$. Ceci implique formellement que l'espace vectoriel gradué $H^{*-2d}(X)(-d)$ est un dual fort de $H^*(X)$.

1.7. Réciproquement, (iv)+(v) impliquent l'existence de $f_!$, ainsi que les propriétés (vii)(a) et (vii)(b), mais pas la propriété (vii)(c).

Notons aussi que l'axiome (iv)(c) est avec ces notations équivalent à la propriété $f_! \circ \gamma = \gamma \circ f_!$, où $f_! : CH^*(Y) \to CH^*(X)$ est le pushout habituel en théorie des cycles.

Il en résulte que l'axiome (vii)(c) est toujours vrai si l'on se restreint à l'image de la transformation naturelle γ – c'est-à-dire les *classes de cohomologie algébriques*[5].

2. Le formalisme de la cohomologie étale

Le but initial de Grothendieck a été de définir une cohomologie de Weil, sur un corps de caractéristique p, à valeur dans le corps de coefficients $\mathbb{Q}_l$ des entiers rationels l-adique pour $l \neq p$.

En même temps que cette cohomologie particulière est définie, Grothendieck développe une notion de « systèmes de coefficients », ou encore « systèmes locaux », qui l'accompagne, de telle sorte que la cohomologie étale l-adique soit la cohomologie à coefficients constants[6].

Les propriétés vérifiées par ces systèmes de coefficients ont été axiomatisées sous le nom de « formalisme des six foncteurs ». Comme on le verra, elle porte la trace des axiomes d'une cohomologie de Weil.

---

[5]En pratique, l'axiome (vii) dans toute sa généraliré est toujours vrai.

[6]La nécessité d'introduire des systèmes de coefficients permettant de généraliser une théorie cohomologique telle la cohomologie singulière apparait de manière évidente lorsque l'on considère la suite spectrale de Serre associée à une fibration : le terme E_2 se calcule naturellement comme une cohomologie à coefficients dans le système local formé par la cohomologie des fibres.

2.1. **Six foncteurs.** Soit S un schéma noethérien excellent, $\mathscr{S}ch_S$ la catégorie des S-schémas de type fini. Une catégorie de coefficients sur la catégorie $\mathscr{S}ch_S$ est l'ensemble de données suivant :

(i) Pour tout S-schéma X, une catégorie triangulée $\mathscr{T}_S$ monoïdale, symmétrique et fermée : on dispose d'un produit tensoriel $. \otimes_S .$ et d'un Hom interne $\underline{\mathrm{Hom}}_S$ définit par la relation :
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}_S}(K \otimes_S L, M) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}_S}(K, \underline{\mathrm{Hom}}_S(L, M)).$$

(ii) Pour tout morphisme $f : Y \to X$ de S-schémas, une paire de foncteurs adjoints
$$f^* : \mathscr{T}_X \leftrightarrows \mathscr{T}_Y : f_*$$
telle que :
  (a) f^* est monoidal.
  (b) Pour tous morphismes de schémas $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} X$, un isomorphisme naturel
  $$Ex^{*,*} : g^* f^* \simeq (fg)^*$$
  satisfaisant une relation de compatibilité (relation de cocycle) dans le cas d'une composée de trois morphismes de schémas.

En termes abstraits, ces deux propriétés sont correctement exprimés en disant qu'on dispose d'un 2-foncteur contravariant
$$\mathscr{T}^* : \mathscr{S}ch_S \to \mathscr{T}ri^{\otimes}$$
à valeur dans la catégorie des catégories triangulées monoïdales symétriques fermées – on a alors $(\mathscr{T}^*)_X = \mathscr{T}_X$ et $\mathscr{T}^*(f) = f^*$. En ces termes, il ne faut alors pas oublier l'existence du foncteur adjoint f_* ; formellement, celui-ci définit alors un 2-foncteur covariant $\mathscr{T}_* : \mathscr{S}ch_S \to \mathscr{T}ri$ à valeur dans la catégorie des catégories triangulées, c'est-à-dire un isomorphisme naturel de la forme :
$$Ex_{*,*} : f_* g_* \to (fg)_*.$$

(iii) Pour tout morphisme séparé $f : Y \to X$ de S-schémas, une paire de foncteurs adjoints
$$f_! : \mathscr{T}_Y \leftrightarrows \mathscr{T}_X : f^!$$
correspond à une structure de 2-foncteur covariant
$$\mathscr{T}_! : \mathscr{S}ch_S \to \mathscr{T}ri.$$

(iv) Pour tout carré cartésien de S-schémas
$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{p'} & Y \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X' & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$
tel que f est séparé, il existe un isomorphisme naturel
$$Ex_!^* : p^* f_! \to f'_! p'^*.$$
On en déduit par adjonction un isomorphisme naturel :
$$Ex_*^! : f'_* p'^! \to p^! f_*.$$

(v) Pour tout morphisme séparé $f : Y \to X$, il existe un isomorphisme
$$f_!(K \otimes_Y f^* L) \to f_!(K) \otimes_X L$$
naturel en K et L.

Les transformations naturelles qui apparaissent dans ces axiomes, $Ex^{*,*}$, $Ex_{*,*}$, $Ex^{!,!}$, $Ex_{!,!}$, $Ex_!^*$ et $Ex_*^!$ sont appelés génériquement des *morphismes d'échange.*

D'une manière générale, on demande encore la condition de cohérence suivante :

> Deux composés de morphismes d'échanges ayant même foncteur source et même foncteur but sont égales.

Pour être complet enfin, il faut ajouter les transformations naturelles

$$f^*(K \otimes_X L) \to f^*(K) \otimes_Y f^*(L)$$
$$f_!(K \otimes_Y f^*L) \to f_!(K) \otimes_X L$$

dans la liste des morphismes d'échange et demander l'analogue de la condition de cohérence ci-dessus pour les morphismes d'échanges entre foncteurs à plusieurs variables.

Example 2.1. Soit l un entier inversible sur S, $\Lambda = \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$. L'exemple premier qui nous intéressera dans ce groupe de travail est celui où $\mathscr{T}_X = D(X_t, \Lambda)$ est la catégorie des complexes de faisceaux étales de Λ-module. On s'intéressera aussi, suivant Grothendieck à la sous-catégorie triangulée formée des complexes dont la cohomologie est constructible – c'est aussi la plus petite sous-catégorie triangulée de la catégorie de tous les faisceaux étale de Λ-modules contenant les faisceaux représentables par un X-schéma étale. Un des problèmes cruciaux de la théorie de Grothendieck est la stabilité de cette catégorie constructible par les six opérations. Une solution complète à ce problème n'a été apportée que récemment par les travaux de O. Gabber.

2.2. Avant de passer aux théorèmes fondamentaux de la théorie, explicitons la cohomologie cachée dans ce formalisme : pour tout schéma X, on pose :

$$H^n(X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}_X}(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_X[n]).$$

Puisque pour tout morphisme $f : Y \to X$, $f^*(\mathbb{1}_X) = \mathbb{1}_Y$, ces groupes sont contravariants en X.

Soit $p : X \to S$ la projection canonique. Par adjonction, on en déduit :

$$H^n(X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}_S}(\mathbb{1}, p_*p^*\mathbb{1}[n]).$$

Plus généralement, à tout objet K de $\mathscr{T}_S$ est associé quatre types de groupes abéliens gradués :

$$H^n(X, K) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}_S}(\mathbb{1}, p_*p^*K[n]) \qquad H_n(X, K) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}_S}(\mathbb{1}, p_!p^!K[-n])$$
$$H^n_c(X, K) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}_S}(\mathbb{1}, p_!p^*K[n]) \qquad H^{BM}_n(X, K) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}_S}(\mathbb{1}, p_*p^!K[-n])$$

2.2. **Changement de base propre.** *Propreté.–* Pour tout morphisme séparé $f : Y \to X$, il existe une transformation naturelle

$$\alpha_f : f_! \to f_*$$

compatible aux morphismes d'échange, qui est un isomorphisme si f est propre.

Appliquant ce calcul de $f_!$ pour f propre, avec le carré cartésien intervenant dans (iv), on obtient le « théorème de changement de base propre »(cf [SGA4, XII, 5.1]).

Notons que ce théorème se traduit encore par l'existence d'une flèche canonique

$$H^n_c(X, K) \to H^n(X, K)$$

qui est un isomorphisme lorsque X/S est propre.

2.3. **Changement de base lisse.** *Pureté relative.*– Pour tout schéma X, il existe un objet inversible noté $\mathbb{1}_X(1)$, appelé twist à la Tate. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, et tout objet K de $\mathscr{T}_X$, on pose $K(d) = K \otimes_X \mathbb{1}_X(d)$. L'opération de twist à la Tate commute aux opérations f^*, f_*, $f_!$, $f^!$.

Pour tout morphisme lisse $f : Y \to X$ de dimension pure d, il existe un isomorphisme de foncteurs

$$\beta_f : \Sigma_f f^* \to f^!(d)[2d].$$

La cohérence de cet isomorphisme est plus difficile à énoncer. De façon concise (et un peu maladroite), on peut le faire comme suit : il existe un 2-foncteur

$$\mathscr{T}^{Tate} : \mathscr{S}ch_S^{lis} \to \mathscr{T}ri$$

de la catégorie des S-shémas munis des morphismes lisses vers la catégorie des catégories triangulées tel que $\mathscr{T}_X^{Tate} = \mathscr{T}_X$, $\mathscr{T}^{Tate}(f) = f^*(d_f)[2d_f]$ et un isomorphisme naturel de 2-foncteurs

$$\beta : \mathscr{T}^! \to \mathscr{T}^{Tate}$$

tel que β_S est l'identité de $\mathscr{T}_S$.

Appliquant maintenant ce calcul de $p^!$ pour $p : X' \to X$ morphisme lisse dans la deuxième formule de (iv), et utilisant la cohérence ci-dessus, on obtient le « théorème de changement de base lisse »(cf [SGA4, XVI, 1.2]).

Par ailleurs, notons le résultat suivant : considérons un diagramme commutatif de schémas

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

tel que f est propre, p et q sont lisses de dimension pure repsective d_p, d_q. Alors, on construit une transformation naturelle :

$$\begin{aligned} q_*q^* = \Sigma_q^{-1} q_*q^! &= p_*f_*f^!p^!(-d_q)[-2d_q] = p_*f_!f^!p^!(-d_q)[-2d_q] \\ &\xrightarrow{ad(f_!,f^!)} p_*p^!(-d_q)[-2d_q] = p_*p^*(d_p-d_q)[2(d_p-d_q)]. \end{aligned}$$

Posant $d = d_q - d_p$, on obtient donc un morphisme

$$f_! : H^*(Y;\mathbb{1}) \to H^{*-2d}(X;\mathbb{1}(-d)).$$

De plus, dans le cas où les schémas sont projectifs lisses sur S, on dispose grâce aux isomorphismes d'échange d'une formule de projection comme en (vii)(c).

2.3. Considérons de nouveau le cas $k = \mathbb{F}_q$. Dès lors, pour $S = \mathrm{Spec}(k)$, ces axiomes sont suffisants pour contruire une cohomologie qui est déjà un bon candidat pour être une cohomologie de Weil. Les étapes qu'il reste à fournir sont les suivantes :

(1) Une cohomologie de Weil est invariante par extension finie des scalaires. Si X est un k-schéma projectif lisse, il faut donc plutôt considérer la cohomologie de $X \times_k \bar{k}$ de X étendue à une cloture algébrique (séparable suffit) de k – on l'appelle la *cohomologie géométrique* de X/k.

(2) Il faut aussi prendre la limite projective des cohomologies à coefficients dans $\mathbb{Z}/l^n.\mathbb{Z}$, pour otenir une cohomologie à coefficients dans les entiers l-adiques. La formule finale est la suivante :

$$H^*_{geom}(X;\mathbb{Q}_l) = \big(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^*(X \times_k \bar{k}; \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})\big) \otimes \mathbb{Q}$$

(3) Il reste à prouver la formule de Künneth pour cette cohomologie, et à construire la classe de cycles.

Grothendieck en déduit donc la rationalité de la fonction zêta et la décomposition en produit de polynômes alternés. En considérant la cohomologie à support compact, il démontre ces résultats plus généralement pour une variété algébrique sur $\mathbb{F}_q$, sans hypothèses de lissité ou de projectivité. Comme déjà remarqué, l'équation fonctionelle dans le cas propre et lisse résulte de la dualité. Enfin, l'invariance du nombre de Betti par spécialisation dans le cas de bonne réduction résulte du théorème de changement de base propre et du théorème de comparaison en caractéristique 0 avec la cohomologie de Betti.
C'est Deligne qui termine les démonstrations des conjectures en prouvant le reste de la conjecture (iii).
Un des problèmes constitutif de la cohomologie étale est la nécessité du choix d'un entier l premier à p. Le fait que les nombres de Betti soit indépendant de l est un problème difficile qui ne trouve sa solution dans le cas projectif lisse qu'avec la preuve de Deligne. Si pour un schéma X/k quelconque, on pose $b_i(X,l) = \dim_{\mathbb{Q}_l} H^i_c(X \times_k \bar{k}; \mathbb{Q}_l)$, le fait que ces entiers soient indépendants de l est une conjecture encore ouverte actuellement. La preuve de Deligne

2.4. **Axiome de localité.** *Localité.*– Pour tout immersion fermé $i : Z \to X$, d'immersion ouverte complémentaire j, il existe une transformation naturelle

$$i_*i^* \xrightarrow{\partial_i} j_!j^![1]$$

telle que pour tout objet K de $\mathscr{T}_X$, le triangle

$$j_!j^!K \to K \to i_*i^*K \xrightarrow{\partial_i} j_!j^!K[1]$$

où les deux premiers morphismes sont obtenus pas adjonction, est distingué.

Dès lors, vu que $j^! = j^*$, on obtient que la paire de foncteurs (j^*, i^*) est conservative. On peut aussi en déduire formellement que $i^*i_* = 1$. On est alors dans une situation de recollement.

On peut montrer que l'on dispose également d'un triangle distingué

$$i_!i^!K \to K \to j_*j^*K \xrightarrow{\partial'_i} i_!i^!K[1]$$

2.5. **Théorème de bidualité.** Soit K, D deux objets de $\mathscr{T}_S$. Par adjonction, on en déduit les morphismes suivants :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(K,D) \xrightarrow{1} \underline{\mathrm{Hom}}(K,D)$$

$$K \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(K,D) \to D$$

$$K \xrightarrow{(*)} \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(K,D),D)$$

Bidualité : Pour tout S-schéma X, il existe un objet D de $\mathscr{T}_S$ tel que pour tout objet K de $\mathscr{T}_S$, la flèche (*) est un isomorphisme.

Dès lors, le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_X(.,D)$ définit sur $\mathscr{T}_X$ une auto-équivalence notée D_X. Cette auto-équivalence échange les foncteurs f_* et $f_!$ (resp. f^* et $f^!$), ce qui explique le comportement visiblement dual des deux paires d'adjoints (f^*, f_*) et $(f_!, f^!)$.

2.4. Le théorème de bidualité a été prouvé par Grothendieck (cf [SGA5, 3.4.1]) dans le cas où $S = \mathrm{Spec}(k)$, k un corps de caractéristique 0 (et plus généralement si S est excellent sous l'hypothèse de résolution des singularités forte et dans le cas où le théorème de pureté absolue est vrai pour les S-schémas lisses). Deligne a prouvé ce résultat dans le cas où S est régulier de dimension inférieure ou égale à 1. Gabber a démontré ce résultat lorsque X est excellent et admet une « fonction de dimension ». Pour un schéma régulier excellent, il démontre même que l'unité du produit tensoriel $\mathbb{1}$ est dualisant.

Références

[SGA4] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, volume 269,270,305. Springer, 1972-73.

[SGA5] Alexander Grothendieck. *Cohomologie l-adique et fonctions L*, volume 589. Springer, 1978.

[Wei49] André Weil. Numbers of solutions of equations in finite fields. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 :497–508, 1949.