

# Topos et sites étales

David HÉBERT

Groupe de travail  
Cohomologie étale

Jeudi 13 novembre 2008

Soit  $\underline{X} = (X, \tau)$  un espace topologique. On définit une catégorie  $\tilde{X}$

$$Ob(\tilde{X}) = \tau$$

$$Hom_{\tilde{X}}(U, V) = \begin{cases} U \hookrightarrow V & \text{si } U \subset V \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $\underline{X} = (X, \tau)$  un espace topologique. On définit une catégorie  $\tilde{X}$

$$Ob(\tilde{X}) = \tau$$

$$Hom_{\tilde{X}}(U, V) = \begin{cases} U \hookrightarrow V & \text{si } U \subset V \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $\underline{X} = (X, \tau)$  un espace topologique. On définit une catégorie  $\tilde{X}$

$$Ob(\tilde{X}) = \tau$$

$$Hom_{\tilde{X}}(U, V) = \begin{cases} U \hookrightarrow V & \text{si } U \subset V \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un foncteur contravariant de  $\tilde{X}$  dans  $\mathcal{A}b$  ou  $\mathcal{E}ns$  est appelé un *préfaisceau sur  $X$* .

Si pour tout ouvert  $U$  de  $X$  et tout recouvrement  $\{U_i\}_i$  de  $U$  la suite

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & F(U) & \longrightarrow & \prod_i F(U_i) & \rightrightarrows & \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j) \\
 & & s \mapsto & & (s|_{U_i})_i & & \\
 & & & & & & (s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})
 \end{array}$$

est exacte, on parlera de *faisceau sur  $X$* .

Un foncteur contravariant de  $\tilde{X}$  dans  $\mathcal{A}b$  ou  $\mathcal{E}ns$  est appelé un *préfaisceau sur  $X$* .

Si pour tout ouvert  $U$  de  $X$  et tout recouvrement  $\{U_i\}_i$  de  $U$  la suite

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & F(U) & \longrightarrow & \prod_i F(U_i) & \rightrightarrows & \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j) \\
 & & s \downarrow & & (s|_{U_i})_i & & \\
 & & & & (s_i)_i & \longrightarrow & (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})
 \end{array}$$

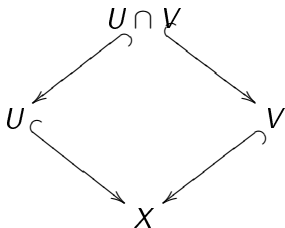
est exacte, on parlera de *faisceau sur  $X$* .

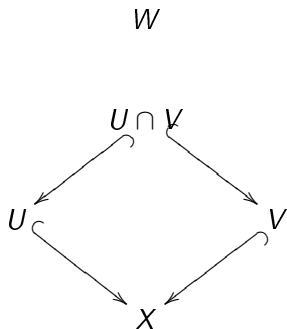
- 1 Construction de faisceaux
  - Produit fibré.
  - Recouvrement.
  - Faisceaufication.
  
- 2 Schéma et faisceau étale.
  - Schématisation.
  - Comparaison de topologies.
  - Topos.
  - Fibres.

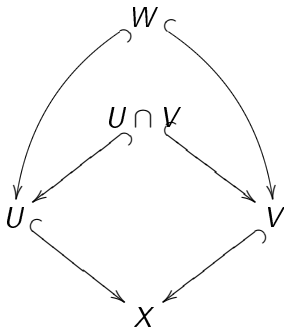


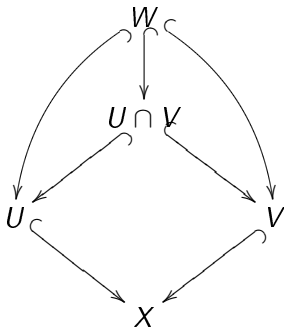
$$U \cap V$$

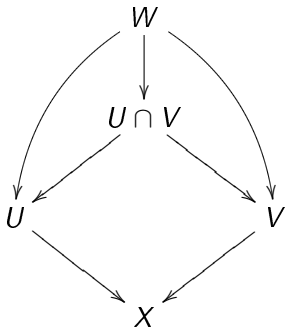


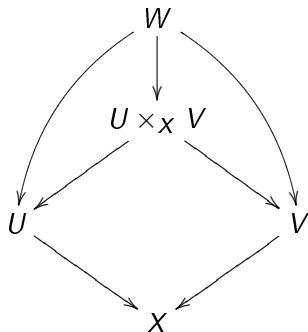


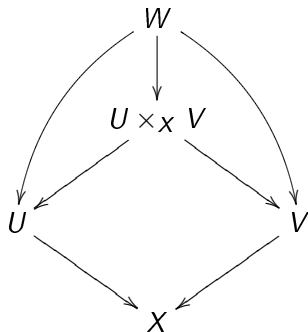












$$U \times_X V := \{(u, v) \in U \times V \mid u_X(u) = v_X(v) \in X\}$$

Soient  $U$  un ouvert de  $\underline{X}$  et  $\{U_i \subset U\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $U$ .

**Changement de base.** Pour tout  $V$  ouvert de  $\underline{X}$  tel que  $V \subset U$ , on a  $\{U_i \cap V \subset V\}_i$  recouvre  $V$

**Re-recouvrement** Si  $\{U_{i,j} \subset U_i\}_{j \in J}$  est un recouvrement de  $U_i$  alors  $\{U_{i,j} \subset U\}_{i \in I, j \in J}$  est un recouvrement de  $U$ .

**Identité** L'ouvert  $U$  recouvre  $U$ .

Soient  $U$  un objet d'une catégorie  $\mathcal{C}$  et  $\{U_i \subset U\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $U$ .

**Changement de base.** Pour tout  $V$  ouvert de  $\underline{X}$  tel que  $V \subset U$ , on a  $\{U_i \cap V \subset V\}_i$  recouvre  $V$

**Re-recouvrement** Si  $\{U_{i,j} \subset U_i\}_{j \in J}$  est un recouvrement de  $U_i$  alors  $\{U_{i,j} \subset U\}_{i \in I, j \in J}$  est un recouvrement de  $U$ .

**Identité** L'ouvert  $U$  recouvre  $U$ .

Soient  $U$  un objet d'une catégorie  $\mathcal{C}$  et  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $U$ .

**Changement de base.** Pour tout  $V$  ouvert de  $X$  tel que  $V \subset U$ , on a  $\{U_i \cap V \subset V\}_i$  recouvre  $V$

**Re-recouvrement** Si  $\{U_{i,j} \subset U_i\}_{j \in J}$  est un recouvrement de  $U_i$  alors  $\{U_{i,j} \subset U\}_{i \in I, j \in J}$  est un recouvrement de  $U$ .

**Identité** L'ouvert  $U$  recouvre  $U$ .

Soient  $U$  un objet d'une catégorie  $\mathcal{C}$  et  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $U$ .

**Changement de base.** Pour tout  $V$  objet de  $\mathcal{C}$  et tout morphisme  $V \rightarrow U$  de  $\mathcal{C}$

$$\{U_i \times_U V \rightarrow V\}_{i \in I}$$

est un recouvrement de  $V$

**Re-recouvrement** Si  $\{U_{i,j} \subset U_i\}_{j \in J}$  est un recouvrement de  $U_i$   
alors  $\{U_{i,j} \subset U\}_{i \in I, j \in J}$  est un recouvrement de  $U$ .

**Identité** L'ouvert  $U$  recouvre  $U$ .

Soient  $U$  un objet d'une catégorie  $\mathcal{C}$  et  $\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $U$ .

**Produit fibré.** Les produits fibrés existent.

**Changement de base.** Pour tout  $V$  objet de  $\mathcal{C}$  et tout morphisme  $V \longrightarrow U$  de  $\mathcal{C}$

$$\{U_i \times_U V \longrightarrow V\}_{i \in I}$$

est un recouvrement de  $V$

**Re-recouvrement** Si  $\{U_{i,j} \subset U_i\}_{j \in J}$  est un recouvrement de  $U_i$  alors  $\{U_{i,j} \subset U\}_{i \in I, j \in J}$  est un recouvrement de  $U$ .

**Identité** L'ouvert  $U$  recouvre  $U$ .

Soient  $U$  un objet d'une catégorie  $\mathcal{C}$  et  $\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $U$ .

**Produit fibré.** Les produits fibrés existent.

**Changement de base.** Pour tout  $V$  objet de  $\mathcal{C}$  et tout morphisme  $V \longrightarrow U$  de  $\mathcal{C}$

$$\{U_i \times_U V \longrightarrow V\}_{i \in I}$$

est un recouvrement de  $V$

**Re-recouvrement** Si  $\{U_{i,j} \longrightarrow U_i\}_{j \in J}$  est un recouvrement de  $U_i$  alors  $\{U_{i,j} \subset U\}_{i \in I, j \in J}$  est un recouvrement de  $U$ .

**Identité** L'ouvert  $U$  recouvre  $U$ .

Soient  $U$  un objet d'une catégorie  $\mathcal{C}$  et  $\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $U$ .

**Produit fibré.** Les produits fibrés existent.

**Changement de base.** Pour tout  $V$  objet de  $\mathcal{C}$  et tout morphisme  $V \longrightarrow U$  de  $\mathcal{C}$

$$\{U_i \times_U V \longrightarrow V\}_{i \in I}$$

est un recouvrement de  $V$

**Re-recouvrement** Si  $\{U_{i,j} \longrightarrow U_i\}_{j \in J}$  est un recouvrement de  $U_i$  alors  $\{U_{i,j} \longrightarrow U\}_{i \in I, j \in J}$  est un recouvrement de  $U$ .

**Identité** L'ouvert  $U$  recouvre  $U$ .

Soient  $U$  un objet d'une catégorie  $\mathcal{C}$  et  $\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $U$ .

**Produit fibré.** Les produits fibrés existent.

**Changement de base.** Pour tout  $V$  objet de  $\mathcal{C}$  et tout morphisme  $V \longrightarrow U$  de  $\mathcal{C}$

$$\{U_i \times_U V \longrightarrow V\}_{i \in I}$$

est un recouvrement de  $V$

**Re-recouvrement** Si  $\{U_{i,j} \longrightarrow U_i\}_{j \in J}$  est un recouvrement de  $U_i$  alors  $\{U_{i,j} \longrightarrow U\}_{i \in I, j \in J}$  est un recouvrement de  $U$ .

**Identité** L'objet  $U$  recouvre  $U$  via le morphisme identité.

## Définition

Un morphisme de sites  $F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  parfois appelé *fonction continue* est un foncteur (covariant)  $G : \text{Cat}(\mathcal{T}') \longrightarrow \text{Cat}(\mathcal{T})$  tel que

- (i). Si  $\{U'_\alpha \xrightarrow{t_\alpha} U'\}_{\alpha \in A}$  un élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T}')$  alors  $\{G(U'_\alpha) \xrightarrow{G(t_\alpha)} G(U')\}_{\alpha \in A}$  est un élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T})$
- (ii). Si  $\{U'_\alpha \xrightarrow{t_\alpha} U'\}_{\alpha \in A}$  un élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T}')$  et  $V' \longrightarrow U'$  un morphisme de  $\text{Cat}(\mathcal{T}')$  alors

$$\forall \alpha \in A, \quad G(V' \times_{U'} U'_\alpha) \simeq G(V') \times_{G(U')} G(U'_\alpha)$$

On note  $G = F^{-1}$ .

## Définition

Un morphisme de sites  $F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  parfois appelé *fonction continue* est un foncteur (covariant)  $G : \text{Cat}(\mathcal{T}') \longrightarrow \text{Cat}(\mathcal{T})$  tel que

- (i). Si  $\{U'_\alpha \xrightarrow{\iota_\alpha} U'\}_{\alpha \in A}$  un élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T}')$  alors  $\{G(U'_\alpha) \xrightarrow{G(\iota_\alpha)} G(U')\}_{\alpha \in A}$  est un élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T})$
- (ii). Si  $\{U'_\alpha \xrightarrow{\iota_\alpha} U'\}_{\alpha \in A}$  un élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T}')$  et  $V' \longrightarrow U'$  un morphisme de  $\text{Cat}(\mathcal{T}')$  alors

$$\forall \alpha \in A, \quad G(V' \times_{U'} U'_\alpha) \simeq G(V') \times_{G(U')} G(U'_\alpha)$$

On note  $G = F^{-1}$ .

## Définition

Un morphisme de sites  $F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$  parfois appelé *fonction continue* est un foncteur (covariant)  $G : \text{Cat}(\mathcal{T}') \longrightarrow \text{Cat}(\mathcal{T})$  tel que

- (i). Si  $\{U'_\alpha \xrightarrow{\iota_\alpha} U'\}_{\alpha \in A}$  un élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T}')$  alors  $\{G(U'_\alpha) \xrightarrow{G(\iota_\alpha)} G(U')\}_{\alpha \in A}$  est un élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T})$
- (ii). Si  $\{U'_\alpha \xrightarrow{\iota_\alpha} U'\}_{\alpha \in A}$  un élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T}')$  et  $V' \longrightarrow U'$  un morphisme de  $\text{Cat}(\mathcal{T}')$  alors

$$\forall \alpha \in A, \quad G(V' \times_{U'} U'_\alpha) \simeq G(V') \times_{G(U')} G(U'_\alpha)$$

On note  $G = F^{-1}$ .

## Faisceau

Soient  $\mathcal{T}$  une topologie de Grothendieck et  $\mathcal{C}$  une catégorie. Un *préfaisceau* sur  $\mathcal{T}$  à valeur dans  $\mathcal{C}$  est un foncteur contravariant

$$F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Un *faisceau* sur  $\mathcal{T}$  à valeur dans  $\mathcal{C}$  est un préfaisceau tel que pour tout  $\{U_\alpha \longrightarrow U\}_{\alpha \in A}$  élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T})$  la suite

$$F(U) \longrightarrow \prod_{\alpha} F(U_{\alpha}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} F(U_{\alpha} \times_U U_{\beta}).$$

est exacte.

## Faisceau

Soient  $\mathcal{T}$  une topologie de Grothendieck et  $\mathcal{C}$  une catégorie. Un *préfaisceau* sur  $\mathcal{T}$  à valeur dans  $\mathcal{C}$  est un foncteur contravariant

$$F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Un *faisceau* sur  $\mathcal{T}$  à valeur dans  $\mathcal{C}$  est un préfaisceau tel que pour tout  $\{U_\alpha \longrightarrow U\}_{\alpha \in A}$  élément de  $\text{Cov}(\mathcal{T})$  la suite

$$F(U) \longrightarrow \prod_{\alpha} F(U_{\alpha}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} F(U_{\alpha} \times_U U_{\beta}).$$

est exacte.

## Proposition

La catégorie  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  est une catégorie abélienne.

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} = \text{Hom}(\mathcal{T}^{\circ}, \text{Ab})$$

## Proposition

La catégorie  $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$  est une catégorie abélienne.

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} = \text{Hom}(\mathcal{T}^{\circ}, \mathcal{A}b)$$

## Théorème

Le foncteur canonique d'oubli  $\iota : \mathcal{F}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{I}}$  admet un adjoint à gauche

$$\sharp : \mathcal{P}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{I}}.$$

$$P^+(U) = \lim_{\rightarrow} \text{Ker} \left( \prod_{\alpha} P(U_{\alpha}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} P(U_{\alpha} \times_U U_{\beta}) \right)$$

$$P^{\sharp} := (P^+)^+.$$

## Théorème

Le foncteur canonique d'oubli  $\iota : \mathcal{F}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{I}}$  admet un adjoint à gauche

$$\sharp : \mathcal{P}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{I}}.$$

$$P^+(U) = \lim_{\rightarrow} \text{Ker} \left( \prod_{\alpha} P(U_{\alpha}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} P(U_{\alpha} \times_U U_{\beta}) \right)$$

$$P^{\sharp} := (P^+)^+.$$

## Théorème

Le foncteur canonique d'oubli  $\iota : \mathcal{F}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{I}}$  admet un adjoint à gauche

$$\sharp : \mathcal{P}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{I}}.$$

$$P^+(U) = \lim_{\rightarrow} \text{Ker} \left( \prod_{\alpha} P(U_{\alpha}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} P(U_{\alpha} \times_U U_{\beta}) \right)$$

$$P^{\sharp} := (P^+)^+.$$

## Corollaire

La catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  est une catégorie de Grothendieck. Elle possède donc suffisamment d'injectifs.

$$H^i(X, F) := R^i\Gamma(X, \bullet)(F).$$

## Corollaire

La catégorie  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  est une catégorie de Grothendieck. Elle possède donc suffisamment d'injectifs.

$$H^i(X, F) := R^i\Gamma(X, \bullet)(F).$$

## Définition

Un morphisme  $f : X \longrightarrow Y$  est étale s'il est localement de présentation finie et si pour tout ouvert affine  $V$  de  $Y$  et tout ouvert affine  $U$  de  $f^{-1}(V)$  le morphisme d'anneaux induit par le morphisme de schémas  $U \longrightarrow V$  est étale.

## Théorème

Pour tout schéma  $S$ , le produit fibré existe dans  $\mathcal{S}ch(S)$ .

$$Spec(B) \times_{Spec(A)} Spec(C) \simeq Spec(B \otimes_A C)$$

## Théorème

Pour tout schéma  $S$ , le produit fibré existe dans  $\mathcal{S}ch(S)$ .

$$Spec(B) \times_{Spec(A)} Spec(C) \simeq Spec(B \otimes_A C)$$

## Définition

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. On dira que  $X$  est *plat* sur  $Y$  (ou que  $f$  est plat) si pour tout ouvert affine  $V$  de  $Y$  et tout ouvert affine  $U$  de  $f^{-1}(V)$ , le morphisme d'anneaux induit par  $U \rightarrow V$  est plat.

Un morphisme sera dit *fidèlement plat*, s'il est plat et surjectif.

## Définition

Soit  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\forall P \in X, \quad (\Omega_{X/Y})_P := \Omega_{\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{O}_{Y,f(P)}}$$

## Définition

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. On dira que  $X$  est *plat* sur  $Y$  (ou que  $f$  est plat) si pour tout ouvert affine  $V$  de  $Y$  et tout ouvert affine  $U$  de  $f^{-1}(V)$ , le morphisme d'anneaux induit par  $U \rightarrow V$  est plat.

Un morphisme sera dit *fidèlement plat*, s'il est plat et surjectif.

## Définition

Soit  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\forall P \in X, \quad (\Omega_{X/Y})_P := \Omega_{\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{O}_{Y,f(P)}}$$

## Définition

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. On dira que  $X$  est *plat* sur  $Y$  (ou que  $f$  est plat) si pour tout ouvert affine  $V$  de  $Y$  et tout ouvert affine  $U$  de  $f^{-1}(V)$ , le morphisme d'anneaux induit par  $U \rightarrow V$  est plat.

Un morphisme sera dit *fidèlement plat*, s'il est plat et surjectif.

## Définition

Soit  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\forall P \in X, \quad (\Omega_{X/Y})_P := \Omega_{\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{O}_{Y,f(P)}}.$$

## Théorème

Soit  $f : X \longrightarrow Y$ .

- (a). Le morphisme  $f$  est net si et seulement si  $\Omega_{X/Y} = 0$ .
- (b). Le morphisme  $f$  est étale si et seulement s'il est plat et net.

## Théorème

Soient  $S$  un schéma et  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{S}ch(S)$  fermée pour le produit fibré. On se donne une classe de morphismes de  $S$ -schémas notée  $E$  telle que les axiomes suivants soient satisfaits :

- Axiome 1.** Si  $Y \rightarrow X \in E$  et  $Z \rightarrow X$  est un morphisme de  $S$ -schémas de  $\mathcal{C}$  alors  $Y \times_X Z \rightarrow Z \in E$ .
- Axiome 2.** Si  $Y \rightarrow X \in E$  et  $Z \rightarrow Y \in E$  alors  $Z \rightarrow Y \rightarrow X \in E$ .
- Axiome 3.** On a  $Y \xrightarrow{\sim} X \in E$ .

Alors en prenant pour recouvrement d'un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  toutes les familles de morphismes de  $E$  de but  $X$  surjectives on définit un système de recouvrement et muni de ce système,  $\mathcal{C}$  est une topologie de Grothendieck. On la note  $(\mathcal{C}/S)_E$ .

## Théorème

Soient  $S$  un schéma et  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{S}ch(S)$  fermée pour le produit fibré. On se donne une classe de morphismes de  $S$ -schémas notée  $E$  telle que les axiomes suivants soient satisfaits :

- Axiome 1.** Si  $Y \rightarrow X \in E$  et  $Z \rightarrow X$  est un morphisme de  $S$ -schémas de  $\mathcal{C}$  alors  $Y \times_X Z \rightarrow Z \in E$ .
- Axiome 2.** Si  $Y \rightarrow X \in E$  et  $Z \rightarrow Y \in E$  alors  $Z \rightarrow Y \rightarrow X \in E$ .
- Axiome 3.** On a  $Y \xrightarrow{\sim} X \in E$ .

Alors en prenant pour recouvrement d'un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  toutes les familles de morphismes de  $E$  de but  $X$  surjectives on définit un système de recouvrement et muni de ce système,  $\mathcal{C}$  est une topologie de Grothendieck. On la note  $(\mathcal{C}/S)_E$ .

## Théorème

Soient  $S$  un schéma et  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{S}ch(S)$  fermée pour le produit fibré. On se donne une classe de morphismes de  $S$ -schémas notée  $E$  telle que les axiomes suivants soient satisfaits :

- Axiome 1.** Si  $Y \rightarrow X \in E$  et  $Z \rightarrow X$  est un morphisme de  $S$ -schémas de  $\mathcal{C}$  alors  $Y \times_X Z \rightarrow Z \in E$ .
- Axiome 2.** Si  $Y \rightarrow X \in E$  et  $Z \rightarrow Y \in E$  alors  $Z \rightarrow Y \rightarrow X \in E$ .
- Axiome 3.** On a  $Y \xrightarrow{\sim} X \in E$ .

Alors en prenant pour recouvrement d'un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  toutes les familles de morphismes de  $E$  de but  $X$  surjectives on définit un système de recouvrement et muni de ce système,  $\mathcal{C}$  est une topologie de Grothendieck. On la note  $(\mathcal{C}/S)_E$ .

## Théorème

Soient  $S$  un schéma et  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{S}ch(S)$  fermée pour le produit fibré. On se donne une classe de morphismes de  $S$ -schémas notée  $E$  telle que les axiomes suivants soient satisfaits :

- Axiome 1.** Si  $Y \rightarrow X \in E$  et  $Z \rightarrow X$  est un morphisme de  $S$ -schémas de  $\mathcal{C}$  alors  $Y \times_X Z \rightarrow Z \in E$ .
- Axiome 2.** Si  $Y \rightarrow X \in E$  et  $Z \rightarrow Y \in E$  alors  $Z \rightarrow Y \rightarrow X \in E$ .
- Axiome 3.** On a  $Y \xrightarrow{\sim} X \in E$ .

Alors en prenant pour recouvrement d'un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  toutes les familles de morphismes de  $E$  de but  $X$  surjectives on définit un système de recouvrement et muni de ce système,  $\mathcal{C}$  est une topologie de Grothendieck. On la note  $(\mathcal{C}/S)_E$ .

## Théorème

Soient  $S$  un schéma et  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{S}ch(S)$  fermée pour le produit fibré. On se donne une classe de morphismes de  $S$ -schémas notée  $E$  telle que les axiomes suivants soient satisfaits :

- Axiome 1.** Si  $Y \rightarrow X \in E$  et  $Z \rightarrow X$  est un morphisme de  $S$ -schémas de  $\mathcal{C}$  alors  $Y \times_X Z \rightarrow Z \in E$ .
- Axiome 2.** Si  $Y \rightarrow X \in E$  et  $Z \rightarrow Y \in E$  alors  $Z \rightarrow Y \rightarrow X \in E$ .
- Axiome 3.** On a  $Y \xrightarrow{\sim} X \in E$ .

Alors en prenant pour recouvrement d'un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  toutes les familles de morphismes de  $E$  de but  $X$  surjectives on définit un système de recouvrement et muni de ce système,  $\mathcal{C}$  est une topologie de Grothendieck. On la note  $(\mathcal{C}/S)_E$ .

## Définition

Si l'on prend pour  $E$  les morphismes étales (resp. les morphismes plats, resp. les immersions ouvertes) on définit une topologie sur  $Sch(S)$ . On la note  $Sch(S)_{\text{ét}}$  (resp.  $Sch(S)_{\text{pl}}$ , resp.  $Sch(S)_{\text{zar}}$ ) et on l'appelle le *gros site étale* (resp. *plat*, resp. *zariskien*).

## Lemme

Toute immersion ouverte est étale.

## Définition

Si l'on prend pour  $E$  les morphismes étales (resp. les morphismes plats, resp. les immersions ouvertes) on définit une topologie sur  $Sch(S)$ . On la note  $Sch(S)_{\text{ét}}$  (resp.  $Sch(S)_{\text{pl}}$ , resp.  $Sch(S)_{\text{zar}}$ ) et on l'appelle le *gros site étale* (resp. *plat*, resp. *zariskien*).

## Lemme

Toute immersion ouverte est étale.

## Définition

Soient  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  deux topologies de Grothendieck. On dit que  $\mathcal{T}$  est *plus fine* que  $\mathcal{T}'$ , et on note

$$\mathcal{T} \leq \mathcal{T}',$$

si tout recouvrement de  $\mathcal{T}'$  est un recouvrement pour  $\mathcal{T}$ .

## Théorème

$$\mathcal{S}ch(S)_{\text{pl}} \leq \mathcal{S}ch(S)_{\text{ét}} \leq \mathcal{S}ch(S)_{\text{zar}}.$$

## Définition

Soient  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  deux topologies de Grothendieck. On dit que  $\mathcal{T}$  est *plus fine* que  $\mathcal{T}'$ , et on note

$$\mathcal{T} \leq \mathcal{T}',$$

si tout recouvrement de  $\mathcal{T}'$  est un recouvrement pour  $\mathcal{T}$ .

## Théorème

$$\text{Sch}(S)_{\text{pl}} \leq \text{Sch}(S)_{\text{ét}} \leq \text{Sch}(S)_{\text{zar}}.$$

## Théorème

Soit  $S$  un schéma. Considérons la sous-catégorie pleine de  $Sch(S)$  où les objets sont des  $S$ -schémas  $X$  tel que  $X \rightarrow S$  soit étale. Notons  $S_{\text{ét}}$  le site associé à cette catégorie muni de la topologie discrète (*i.e.* tous les morphismes). Alors :

$$Sch(S)_{\text{ét}} \leq S_{\text{ét}} \leq Sch(S)_{\text{zar}}.$$

On appelle  $S_{\text{ét}}$  le *petit site étale*.

## Corollaire

$$Sch(S)_{\text{pl}} \leq Sch(S)_{\text{ét}} \leq S_{\text{ét}} \leq Sch(S)_{\text{zar}} \leq S_{\text{zar}}.$$

## Théorème

Soit  $S$  un schéma. Considérons la sous-catégorie pleine de  $Sch(S)$  où les objets sont des  $S$ -schémas  $X$  tel que  $X \rightarrow S$  soit étale. Notons  $S_{\text{ét}}$  le site associé à cette catégorie muni de la topologie discrète (*i.e.* tous les morphismes). Alors :

$$Sch(S)_{\text{ét}} \leq S_{\text{ét}} \leq Sch(S)_{\text{zar}}.$$

On appelle  $S_{\text{ét}}$  le *petit site étale*.

## Corollaire

$$Sch(S)_{\text{pl}} \leq Sch(S)_{\text{ét}} \leq S_{\text{ét}} \leq Sch(S)_{\text{zar}} \leq S_{\text{zar}}.$$

## Théorème

Soit  $S$  un schéma. Considérons la sous-catégorie pleine de  $Sch(S)$  où les objets sont des  $S$ -schémas  $X$  tel que  $X \rightarrow S$  soit étale. Notons  $S_{\text{ét}}$  le site associé à cette catégorie muni de la topologie discrète (*i.e.* tous les morphismes). Alors :

$$Sch(S)_{\text{ét}} \leq S_{\text{ét}} \leq Sch(S)_{\text{zar}}.$$

On appelle  $S_{\text{ét}}$  le *petit site étale*.

## Corollaire

$$Sch(S)_{\text{pl}} \leq Sch(S)_{\text{ét}} \leq S_{\text{ét}} \leq Sch(S)_{\text{zar}} \leq S_{\text{zar}}.$$

## Théorème

Soient  $S$  un schéma et  $P$  un préfaisceau sur le site  $S_{\text{ét}}$  (resp.  $\mathcal{S}ch(S)_{\text{pl}}$ ) à valeur dans  $\mathcal{A}b$  ou  $\mathcal{E}ns$ . Alors  $P$  est un faisceau sur le site  $S_{\text{ét}}$  (resp.  $\mathcal{S}ch(S)_{\text{pl}}$ ) si et seulement s'il satisfait les deux assertions suivantes :

- (a). Le foncteur  $P$  est un faisceau pour la topologie de Zariski  $S_{\text{zar}}$ .
- (b). Pour tout morphisme étale (resp. plat)  $X \rightarrow Y$  de  $S$ -schémas *affines* la suite

$$P(Y) \longrightarrow P(X) \rightrightarrows P(X \times_Y X)$$

est exacte.

## Définition

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. S'il existe une topologie de Grothendieck  $\mathcal{T}$  et une équivalence de catégorie entre  $\mathcal{C}$  et la catégorie des faisceaux sur  $\mathcal{T}$  (à valeur dans  $\mathcal{E}ns$ ), on dit que  $\mathcal{C}$  est un *topos*.

## Lemme

La catégorie  $\mathcal{E}ns$  est un topos.

## Définition

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. S'il existe une topologie de Grothendieck  $\mathcal{T}$  et une équivalence de catégorie entre  $\mathcal{C}$  et la catégorie des faisceaux sur  $\mathcal{T}$  (à valeur dans  $\mathcal{E}ns$ ), on dit que  $\mathcal{C}$  est un *topos*.

## Lemme

La catégorie  $\mathcal{E}ns$  est un topos.

## Définition

Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux topos. Un *morphisme de topos*  $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  est la donnée de

- Deux foncteurs

$$f_* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \quad f^* : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C},$$

où  $f^*$  est exacte à gauche.

- Un isomorphisme  $\varphi$  d'adjonction : pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{D}$  et tout objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$

$$\varphi_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f^*(X), Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, f_*(Y))$$

On appelle  $f_*$  *foncteur image directe* et  $f^*$  *foncteur image inverse*.

## Théorème

Supposons que

- (a). Pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{C}'$ ,  $Y \times_{S'} S$  est un objet de  $\mathcal{C}$ .
- (b). Pour tout morphisme  $U \rightarrow Y$  de  $E'$  le morphisme  $U \times_{S'} S \rightarrow Y \times_{S'} S$  est dans  $E$ .

Alors  $f$  induit un morphisme de sites

$$f_{E,E'} : (\mathcal{C}/S)_E \longrightarrow (\mathcal{C}'/S')_{E'}.$$

## Théorème

Si on prend  $S = S'$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$  et  $f = Id_S$  alors  $f_{E,E'}$  définit un morphisme de sites si et seulement si  $(\mathcal{C}/S)_E \leq (\mathcal{C}/S)_{E'}$ .

## Corollaire

Soit  $S$  un schéma. Via le morphisme identité on a

$$Sch(S)_{\text{pl}} \longrightarrow Sch(S)_{\text{ét}} \longrightarrow Sch(S)_{\text{zar}}.$$

$$S_{\text{ét}} \longrightarrow S_{\text{zar}}.$$

## Théorème

Si on prend  $S = S'$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$  et  $f = Id_S$  alors  $f_{E,E'}$  définit un morphisme de sites si et seulement si  $(\mathcal{C}/S)_E \leq (\mathcal{C}/S)_{E'}$ .

## Corollaire

Soit  $S$  un schéma. Via le morphisme identité on a

$$Sch(S)_{\text{pl}} \longrightarrow Sch(S)_{\text{ét}} \longrightarrow Sch(S)_{\text{zar}}.$$

$$S_{\text{ét}} \longrightarrow S_{\text{zar}}.$$

## Théorème

On a un foncteur

$$\begin{aligned}(f_{E,E'})_P : \mathcal{P}_{(C/S)_E} &\longrightarrow \mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}} \\ P &\longmapsto P \circ (f_{E,E'})^{-1}\end{aligned}$$

Ce foncteur admet un adjoint à gauche

$$(f_{E,E'})^P : \mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}} \longrightarrow \mathcal{P}_{(C/S)_E}.$$

## lemme

Si  $F$  est un faisceau sur  $(\mathcal{C}/S)_E$  alors  $(f_{E,E'})_p(F)$  est un faisceau sur  $(\mathcal{C}'/S')_{E'}$ .

## Corollaire

Si le foncteur image inverse (de préfaisceau) est exacte à gauche, alors  $f$  induit un morphisme de topos :

$$f^{top} : \mathcal{F}_{(\mathcal{C}/S)_E} \longrightarrow \mathcal{F}_{(\mathcal{C}'/S')_{E'}}$$

où pour tout faisceau  $F$  sur  $(\mathcal{C}/S)_E$   $(f^{top})_*(F) = (f_{E,E'})_p(F)$  et  $(f^{top})^*(F) = \left( (f_{E,E'})^p(F) \right)^\sharp$  le faisceau associé au préfaisceau  $(f_{E,E'})^p(F)$ .

## lemme

Si  $F$  est un faisceau sur  $(\mathcal{C}/S)_E$  alors  $(f_{E,E'})_p(F)$  est un faisceau sur  $(\mathcal{C}'/S')_{E'}$ .

## Corollaire

Si le foncteur image inverse (de préfaisceau) est exacte à gauche, alors  $f$  induit un morphisme de topos :

$$f^{top} : \mathcal{F}_{(\mathcal{C}/S)_E} \longrightarrow \mathcal{F}_{(\mathcal{C}'/S')_{E'}}$$

où pour tout faisceau  $F$  sur  $(\mathcal{C}/S)_E$   $(f^{top})_*(F) = (f_{E,E'})_p(F)$  et  $(f^{top})^*(F) = \left( (f_{E,E'})^p(F) \right)^\sharp$  le faisceau associé au préfaisceau  $(f_{E,E'})^p(F)$ .

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C/S)_E}} \left( (f^{\mathrm{top}})^*(F), F' \right) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C/S)_E}} \left( (f_{E,E'})^P(F)^\sharp, F' \right) \\
 &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C/S)_E}} \left( (f_{E,E'})^P(F), \iota_E(F') \right) \\
 &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, (f_{E,E'})_P(\iota_E(F')) \right) \\
 &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, \iota_{E'}((f_{E,E'})_P(F')) \right) \\
 &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F^\sharp, (f_{E,E'})_P(F') \right) \\
 &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, (f^{\mathrm{top}})_*(F') \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C/S)_E}} \left( (f^{\mathrm{top}})^*(F), F' \right) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C/S)_E}} \left( (f_{E,E'})^P(F)^\sharp, F' \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C/S)_E}} \left( (f_{E,E'})^P(F), \iota_E(F') \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, (f_{E,E'})_P(\iota_E(F')) \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, \iota_{E'}((f_{E,E'})_P(F')) \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F^\sharp, (f_{E,E'})_P(F') \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, (f^{\mathrm{top}})_*(F') \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C/S)_E}} \left( (f^{\mathrm{top}})^*(F), F' \right) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C/S)_E}} \left( (f_{E,E'})^P(F)^\sharp, F' \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C/S)_E}} \left( (f_{E,E'})^P(F), \iota_E(F') \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, (f_{E,E'})_P(\iota_E(F')) \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, \iota_{E'}((f_{E,E'})_P(F')) \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F^\sharp, (f_{E,E'})_P(F') \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, (f^{\mathrm{top}})_*(F') \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C/S)_E}} \left( (f^{\mathrm{top}})^*(F), F' \right) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C/S)_E}} \left( (f_{E,E'})^P(F)^\sharp, F' \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C/S)_E}} \left( (f_{E,E'})^P(F), \iota_E(F') \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, (f_{E,E'})_\rho(\iota_E(F')) \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, \iota_{E'}((f_{E,E'})_\rho(F')) \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F^\sharp, (f_{E,E'})_\rho(F') \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, (f^{\mathrm{top}})_*(F') \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C/S)_E}} \left( (f^{\mathrm{top}})^*(F), F' \right) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C/S)_E}} \left( (f_{E,E'})^P(F)^\sharp, F' \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C/S)_E}} \left( (f_{E,E'})^P(F), \iota_E(F') \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, (f_{E,E'})_P(\iota_E(F')) \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, \iota_{E'}((f_{E,E'})_P(F')) \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F^\sharp, (f_{E,E'})_P(F') \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, (f^{\mathrm{top}})_*(F') \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C/S)_E}} \left( (f^{\mathrm{top}})^*(F), F' \right) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C/S)_E}} \left( (f_{E,E'})^P(F)^\sharp, F' \right) \\
 &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C/S)_E}} \left( (f_{E,E'})^P(F), \iota_E(F') \right) \\
 &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, (f_{E,E'})_P(\iota_E(F')) \right) \\
 &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, \iota_{E'}((f_{E,E'})_P(F')) \right) \\
 &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F^\sharp, (f_{E,E'})_P(F') \right) \\
 &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, (f^{\mathrm{top}})_*(F') \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C/S)_E}} \left( (f^{\mathrm{top}})^*(F), F' \right) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C/S)_E}} \left( (f_{E,E'})^P(F)^\sharp, F' \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C/S)_E}} \left( (f_{E,E'})^P(F), \iota_E(F') \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, (f_{E,E'})_P(\iota_E(F')) \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, \iota_{E'}((f_{E,E'})_P(F')) \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F^\sharp, (f_{E,E'})_P(F') \right) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(C'/S')_{E'}}} \left( F, (f^{\mathrm{top}})_*(F') \right). \end{aligned}$$

## Théorème

$$f^{top} : \widetilde{S}_{\text{ét}} \longrightarrow \widetilde{S}'_{\text{ét}}$$

## Définition

Soit  $S$  un schéma. Un *point géométrique* de  $S$  est un  $S$ -schéma qui est le spectre d'un corps séparablement clos.

## Définition

Soit  $S$  un schéma et  $\xi$  un point géométrique. Notons  $u : \xi \rightarrow S$  son morphisme de  $S$ -structure.

On appelle *foncteur fibre géométrique relatif à  $\xi$* , le foncteur

$$\bullet_{\xi} : \widetilde{S}_{\text{ét}} \xrightarrow{u^*} \widetilde{\xi}_{\text{ét}} \xrightarrow{\Gamma(\xi, \bullet)} \mathcal{E}ns.$$

On note  $F_{\xi}$  l'image d'un faisceau étale  $F$  par ce foncteur et  $f_{\xi}$  l'image d'un morphisme.

## Définition

Soit  $S$  un schéma. Un *point géométrique* de  $S$  est un  $S$ -schéma qui est le spectre d'un corps séparablement clos.

## Définition

Soit  $S$  un schéma et  $\xi$  un point géométrique. Notons  $u : \xi \rightarrow S$  son morphisme de  $S$ -structure.

On appelle *foncteur fibre géométrique relatif à  $\xi$* , le foncteur

$$\bullet_{\xi} : \widetilde{\mathcal{S}}_{\text{ét}} \xrightarrow{u^*} \widetilde{\mathcal{S}}_{\text{ét}} \xrightarrow{\Gamma(\xi, \bullet)} \mathcal{E}ns.$$

On note  $F_{\xi}$  l'image d'un faisceau étale  $F$  par ce foncteur et  $f_{\xi}$  l'image d'un morphisme.

## Théorème

Soient  $S$  un schéma,  $F$  un faisceau (resp.  $P$  un préfaisceau) sur  $S_{\text{ét}}$  et  $\xi$  un point géométrique de  $S$ . Alors

$$F_{\xi} = \varinjlim F(X) \quad (\text{resp. } (P^{\sharp})_{\xi} = \varinjlim P(X)),$$

où la limite est prise sur les couples  $(X, \xi \xrightarrow{f} X)$  avec  $X$  un  $S$ -schéma étale et  $f$  un morphisme de  $S$ -schémas.

## Corollaire

Soient  $S$  un schéma et  $f : F \rightarrow G$  un morphisme de faisceaux étales sur  $S$ . Alors  $f$  est un isomorphisme si et seulement si c'est le cas pour tous les morphismes induits  $u_{\bar{s}} : F_{\bar{s}} \rightarrow G_{\bar{s}}$  où  $s$  est un point ordinaire de  $S$ .