Les conjectures de Weil

David HÉBERT

Groupe de travail
Cohomologie étale

Jeudi 05 février 2009

Soit X une variété projective lisse sur $k = \mathbb{F}_q$.

$$X := \{P \in \mathbb{P}^n(k) | \forall\, i \quad f_i(P) = 0\}$$

où les (f_i) sont des polynômes homogènes de $k[X_0, ..., X_n]$.

$$X(\mathbb{K}) := \{P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) | \forall\, i \quad f_i(P) = 0\}.$$

On s'intéresse à la cardinalité de $X(\mathbb{F}_{q^m})$.

$$N_m = Card(X(\mathbb{F}_{q^m})).$$

Soit X une variété projective lisse sur $k = \mathbb{F}_q$.

$$X := \{P \in \mathbb{P}^n(k) | \forall\ i \quad f_i(P) = 0\}$$

où les (f_i) sont des polynômes homogènes de $k[X_0, ..., X_n]$.

$$X(\mathbb{K}) := \{P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) | \forall\ i \quad f_i(P) = 0\}.$$

On s'intéresse à la cardinalité de $X(\mathbb{F}_{q^m})$.

$$N_m = Card(X(\mathbb{F}_{q^m})).$$

Soit X une variété projective lisse sur $k = \mathbb{F}_q$.

$$X := \{P \in \mathbb{P}^n(k) | \forall\ i \quad f_i(P) = 0\}$$

où les (f_i) sont des polynômes homogènes de $k[X_0, ..., X_n]$.

$$X(\mathbb{K}) := \{P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) | \forall\ i \quad f_i(P) = 0\}.$$

On s'intéresse à la cardinalité de $X(\mathbb{F}_{q^m})$.

$$N_m = Card(X(\mathbb{F}_{q^m})).$$

Fonction Zeta.

$$Z(X,T) := exp\left(\sum_{m=1}^{+\infty} N_m \frac{T^m}{m}\right).$$

Conjectures de Weil.

Rationnalité. Il existe des polynômes $P_i \in \mathbb{Z}[T]$ tels que

$$Z(X,T) = \frac{P_1(T)P_3(T)...P_{2n+1}(T)}{P_0(T)P_1(T)...P_{2n}(T)}.$$

De plus $P_0(T) = 1 - T$ et $P_{2n}(T) = 1 - q^n T$.

Equation fonctionnelle. $Z\left(X, \frac{1}{q^n T}\right) = \pm q^{\frac{n\chi}{2}} T^\chi Z(X,T)$.

Analogue de l'hypothèse de Riemann. Les conjugués des racines de P_i sont de module $q^{-\frac{i}{2}}$

Nombre de Betti. ...

Fonction Zeta.

$$Z(X,T) := exp\left(\sum_{m=1}^{+\infty} N_m \frac{T^m}{m}\right).$$

Conjectures de Weil.

Rationnalité. Il existe des polynômes $P_i \in \mathbb{Z}[T]$ tels que

$$Z(X,T) = \frac{P_1(T)P_3(T)...P_{2n+1}(T)}{P_0(T)P_1(T)...P_{2n}(T)}.$$

De plus $P_0(T) = 1 - T$ et $P_{2n}(T) = 1 - q^n T$.

Equation fonctionnelle. $Z\left(X, \frac{1}{q^n T}\right) = \pm q^{\frac{n\chi}{2}} T^{\chi} Z(X,T)$.

Analogue de l'hypothèse de Riemann. Les conjugués des racines de P_i sont de module $q^{-\frac{i}{2}}$

Nombre de Betti. ...

Fonction Zeta.

$$Z(X,T) := exp\left(\sum_{m=1}^{+\infty} N_m \frac{T^m}{m}\right).$$

Conjectures de Weil.

Rationnalité. Il existe des polynômes $P_i \in \mathbb{Z}[T]$ tels que

$$Z(X,T) = \frac{P_1(T)P_3(T)\ldots P_{2n+1}(T)}{P_0(T)P_1(T)\ldots P_{2n}(T)}.$$

De plus $P_0(T) = 1 - T$ et $P_{2n}(T) = 1 - q^n T$.

Equation fonctionnelle. $Z\left(X, \frac{1}{q^n T}\right) = \pm q^{\frac{n\chi}{2}} T^{\chi} Z(X,T)$.

Analogue de l'hypothèse de Riemann. Les conjugués des racines de P_i sont de module $q^{-\frac{i}{2}}$

Nombre de Betti. ...

Fonction Zeta.

$$Z(X,T) := exp\left(\sum_{m=1}^{+\infty} N_m \frac{T^m}{m}\right).$$

Conjectures de Weil.

Rationnalité. Il existe des polynômes $P_i \in \mathbb{Z}[T]$ tels que

$$Z(X,T) = \frac{P_1(T)P_3(T)...P_{2n+1}(T)}{P_0(T)P_1(T)...P_{2n}(T)}.$$

De plus $P_0(T) = 1 - T$ et $P_{2n}(T) = 1 - q^n T$.

Equation fonctionnelle. $Z\left(X, \frac{1}{q^n T}\right) = \pm q^{\frac{n\chi}{2}} T^{\chi} Z(X,T).$

Analogue de l'hypothèse de Riemann. Les conjugués des racines de P_i sont de module $q^{-\frac{i}{2}}$

Nombre de Betti. ...

Fonction Zeta.

$$Z(X,T) := exp\left(\sum_{m=1}^{+\infty} N_m \frac{T^m}{m}\right).$$

Conjectures de Weil.

Rationnalité. Il existe des polynômes $P_i \in \mathbb{Z}[T]$ tels que

$$Z(X,T) = \frac{P_1(T)P_3(T)...P_{2n+1}(T)}{P_0(T)P_1(T)...P_{2n}(T)}.$$

De plus $P_0(T) = 1 - T$ et $P_{2n}(T) = 1 - q^n T$.

Equation fonctionnelle. $Z\left(X, \frac{1}{q^n T}\right) = \pm q^{\frac{n\chi}{2}} T^{\chi} Z(X,T).$

Analogue de l'hypothèse de Riemann. Les conjugués des racines de P_i sont de module $q^{-\frac{i}{2}}$

Nombre de Betti. ...

Cohomologies de Weil : Dualité de Poincaré.

Soit n la dimension de la varieté X.

(i). Pour tout entier i qui n'est pas compris entre 0 et $2n$

$$H^i(X, \mathbb{K}) = 0.$$

(ii). Il existe un isomorphisme

$$H^{2n}(X, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$$

appelé *isomorphisme d'orientation*.

(iii). Pour tout entier i entre 0 et $2n$ le produit de $H^*(X, \mathbb{K})$ induit des applications bilinéaires non dégénérées

$$Q_X^i : H^i(X, \mathbb{K}) \times H^{2n-i}(X, \mathbb{K}) \longrightarrow H^{2n}(X, \mathbb{K}).$$

De plus ces transformations sont fonctorielles en X.

Cohomologie de Weil : Formulle de Künneth.

Si X et Y sont deux variétés on a un isomorphisme

$$H^*(X,\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} H^*(Y,\mathbb{K}) \simeq H^*(X \times Y,\mathbb{K}).$$

Cohomologies de Weil : Application de cycles.

Pour toute variété X, il existe des morphismes de groupes

$$\gamma_X : C^p(X) \longrightarrow H^{2p}(X,\mathbb{K})$$

qui vérifient

Fonctorialité. Ces transformations sont fonctorielles en X.

Multiplicativité. Pour toutes variétés X et Y et tout cycles Z et W de respectivement X et Y

$$\gamma_{X\times Y}(Z \times W) = \gamma_X(Z) \otimes \gamma_Y(W).$$

Non trivialité. Si P est un point alors γ_P est l'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{K}$.

Cohomologie de Weil : Formulle de Künneth.

Si X et Y sont deux variétés on a un isomorphisme

$$H^*(X,\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} H^*(Y,\mathbb{K}) \simeq H^*(X \times Y,\mathbb{K}).$$

Cohomologies de Weil : Application de cycles.

Pour toute variété X, il existe des morphismes de groupes

$$\gamma_X : C^p(X) \longrightarrow H^{2p}(X,\mathbb{K})$$

qui vérifient

Fonctorialité. Ces transformations sont fonctorielles en X.

Multiplicativité. Pour toutes variétés X et Y et tout cycles Z et W de respectivement X et Y

$$\gamma_{X\times Y}(Z \times W) = \gamma_X(Z) \otimes \gamma_Y(W).$$

Non trivialité. Si P est un point alors γ_P est l'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{K}$.

Formule des traces.

Soient $H^*(\bullet, \mathbb{K})$ une cohomologie de Weil, X une variété projective lisse de dimension n sur $\mathbb{F}_q$ et $Fro : \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$ l'endomorphisme de Frobéniüs : $Fro(x) = x^q$. Alors pour tout entier $m > 0$

$$N_m = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \, Tr(H^i(Fro^m, \mathbb{K})).$$

Lemme 1.

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Alors

$$exp\left(\sum_{m=1}^{+\infty} Tr(u^m)\frac{T^m}{m}\right) = Det(1 - Tu)^{-1}.$$

Lemme 2.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension (finie) et

$$\beta : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$$

une forme bilinéaire non dégénérée. Supposons qu'il existe

$$\varphi : E \longrightarrow E, \quad \psi : F \longrightarrow F, \quad \lambda \in \mathbb{K}^*$$

tel que pour tout $x \in E$ et $y \in F$

$$\beta(\varphi(x), \psi(y)) = \lambda\beta(x, y).$$

Alors

$$Det(1 - \psi T) = \frac{(-\lambda T)^d}{Det(\varphi)} Det\left(1 - \frac{\varphi}{\lambda T}\right), \qquad Det(\psi) = \frac{\lambda^d}{Det(\varphi)}$$

où $Dim_{\mathbb{K}}(E) = Dim_{\mathbb{K}}(F) = d$.

Définition

On définit le *determinant de Hankel* de rang n et d'ordre k de la suite a la quantité

$$D_n^k(a) = Det\left((a_{n+i+j})_{0 \leqslant i,j \leqslant k}\right).$$

Relation de Sylvester.

Soient n un entier positif et D le determinant de la matrice $(a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout paire d'entier i et j entre 0 et n, D peut être vu comme un polynome en $a_{i,j}$ de degré au plus 1 ; on note $A_{i,j}$ le coeficient dominant de ces polynômes. Soit d le determinant de la matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$, extrait de D en supprimant les lignes et colonnes extrêmales. La relation de Sylvester est

$$Dd = A_{0,0}A_{n,n} - A_{0,n}A_{n,0}.$$

Lemme.

Soit a une suite d'élément de $\mathbb{K}$ non stationnaire, s'il existe k et n_0 tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, $D_n^k(a) = 0$ alors il existe h et n_1 tel que $D_n^h(a) = 0$ pour $n \geqslant n_1$ et $D_n^{h-1}(a) \neq 0$ pour $n \geqslant n_1 + 1$.

Théorème

Pour que la serie formelle $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ soit une fraction rationelle, il faut et il suffit qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n assez grand $D_n^k(a) = 0$.

Lemme.

Soit a une suite d'élément de $\mathbb{K}$ non stationnaire, s'il existe k et n_0 tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, $D_n^k(a) = 0$ alors il existe h et n_1 tel que $D_n^h(a) = 0$ pour $n \geqslant n_1$ et $D_n^{h-1}(a) \neq 0$ pour $n \geqslant n_1 + 1$.

Théorème

Pour que la serie formelle $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ soit une fraction rationelle, il faut et il suffit qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n assez grand $D_n^k(a) = 0$.

Cohomologie étale.

Soit X une variété projective lisse sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, où q est une puissance d'un nombre premier p. On définit une cohomologie sur le corps des nombres l-adique où l est un nombre premier diffrent de p, appelé *cohomologie étale* comme

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l) := \lim_{\leftarrow} H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}).$$

Les cohomologies étales sont des cohomologies de Weil.

Analogue de l'hypothèse de Riemann.

Pour chaque i et chaque $l \neq p$, les valeurs propres de $H^*(Fro, \mathbb{Q}_l)$ sont des nombres algèbriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue

$$q^{\frac{i}{2}}.$$

Soient X et Y deux variétés de dimension respective n et m.

Définition

- On définit pour
  $u = a \otimes b \in H^*(X \times Y) \simeq H^*(X) \otimes_{\mathbb{K}} H^*(Y)$
  $$\begin{array}{rcl} u^* : H^*(X) & \longrightarrow & H^*(Y) \\ c & \longmapsto & \langle Q_X^*(c, a) \rangle b. \end{array}$$
- Pour $a \otimes b \in H^\alpha(X) \otimes_{\mathbb{K}} H^\beta(Y)$ on pose
  $${}^t(a \otimes b) = (-1)^{\alpha\beta} b \otimes a.$$

Théorème

Pour tout $v \in H^{2n+d}(X \times Y)$ et tout $w \in H^{2m-d}(Y \times X)$

$$\langle v.{}^t w \rangle = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \, Tr(w^* v^*_{|_{H^i(X)}}).$$