Marches aléatoires en milieu aléatoire sur des arbres

Gabriel Faraud

30 octobre 2009

Table des matières

Nous introduisons quelques modèles courants de marches aléatoires en milieu aléatoire, et de présenter un aperçu des résultats qui ont été démontrés dans ces divers cas. On s'intéressera ensuite plus particulièrement au cas de MAMAs sur des arbres, pour présenter un critère de transience élémentaire, avant de présenter un certain nombre de voies de recherches à explorer sur le sujet .

Introduction : Les marches aléatoires en milieu aléatoire ont été introduites en 1967 par Chernov et Temkin afin de modéliser simplement la réplication de l'ADN. Depuis de nombreux modèles ont été étudiés, mais d'une manière générale, il s'agit de faire évoluer une chaîne de Markov sur un espace donné [1], suivant des probabilités de transition tirées elles-mêmes au hasard. Ce type de processus est intéressant pour améliorer des modèles utilisant des marches aléatoires classiques, et les adapter dans des cas où l'environnement est difficile à décrire ; mais on verra également que ce type de processus est parfois plus simple à étudier que d'autres processus de même loi....

1 marches aléatoires en milieu aléatoire sur $\mathbb{Z}$

1.1 Présentation

On définit l'espace des environnements

$$\Omega = [0,1]^{\mathbb{Z}},$$

et pour tout $\omega \in \Omega$, on introduit la chaîne de Markov (X_n, P^ω) définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \begin{cases} P^\omega(X_{n+1} = x+1 | X_n = x) = \omega(x) \\ P^\omega(X_{n+1} = x-1 | X_n = x) = 1-\omega(x) \end{cases} .$$

La loi P^ω est appelée loi "Quenched" de la MAMA.

Si l'on introduit une loi μ sur Ω, on peut aussi considérer la loi "Annealed", définie par

$$\mathbb{P} = \int_\Omega P^\omega d\mu(\omega).$$

Dans tous le reste de l'article, on considérera que les ω sont tirés indépendamment avec la même loi, c'est à dire que

$$\mu = \nu^{\otimes \mathbb{Z}}$$

Remarques : -La loi $\mathbb{P}$ définit en général un processus non Markovien : informellement si l'on sait que dans le passé la chaîne a beaucoup utilisé le saut $x \to x+1$, on peut en déduire que $\omega(x)$ a des chances d'être élevé, le processus annealed a donc tendance à repasser aux mêmes endroits.

-On fait souvent l'hypothèse que

1.2 Critère de récurrence

Dans le cas de $\mathbb{Z}$, on a des résultats très précis concernant le comportement asymptotique des MAMAs. Nous allons tout d'abord introduire un critère de récurrence/transience :

Théorème 1.1 (Solomon 1975) *-Si* $E_\mu[log(\frac{1-\omega}{\omega})] < 0,$ *alors* $\mathbb{P}$ *p.s,* $X_n \to +\infty$
-Si $E_\mu[log(\frac{1-\omega}{\omega})] > 0,$ *alors* $\mathbb{P}$ *p.s,* $X_n \to -\infty$
-Si $E_\mu[log(\frac{1-\omega}{\omega})] = 0,$ *alors* $\mathbb{P}$ *p.s,* $\limsup X_n = +\infty$ *et* $\liminf X_n = -\infty$ *[Sol75]*

1. on verra dans ce mémoire les cas de $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}^n$, et enfin le cas des arbres

Idée de la preuve : On cherche une fonction f_ω harmonique, c'est à dire telle que sous P_ω, $f_\omega(X_n)$ soit une martingale. Un calcul simple donne :

$$\begin{cases} f_\omega(x) = -1 - \sum_{1\leq k\leq x-1} \frac{1-\omega(1)}{\omega(1)} \cdots \frac{1-\omega(k)}{\omega(k)} & \forall x \geq 1 \\ f_\omega(x) = \sum_{0\leq k\leq |x|} \frac{\omega(0)}{1-\omega(0)} \cdots \frac{\omega(-k)}{1-\omega(-k)} & \forall x \leq -1 \end{cases}.$$

La fonction f_ω étant imposée dès lors que l'on a ffixé sa valeur en 0 et 1. On étudie ensuite le comportement en $+\infty$ et $-\infty$ de f_ω, qui dépend du signe de $E_\mu[log(\frac{1-\omega}{\omega})]$, ce qui permet de conclure en utilisant des résultats de convergence de martingales.

1.3 Vitesse asymptotique

Après ce critère de récurrence/transience, nous présentons sans preuve deux résultats concernant le comportement asymptotique des MAMAs sur $\mathbb{Z}$.

Théorème 1.2 (Solomon 1975) *On note* $\rho = \frac{1-\omega(0)}{\omega(0)}$.
-Si $E_\mu[\rho] < 1$, *alors* $\frac{X_n}{n} \to \frac{1-E[\rho]}{1+E[\rho]}$ $\mathbb{P}-p.s.$
-Si $E_\mu[1/\rho] < 1$, *alors* $\frac{X_n}{n} \to \frac{1-E[1/\rho]}{1+E[1/\rho]}$ $\mathbb{P}-p.s.$
-Si $1/E_\mu[\rho] \leq 1 \leq E_\mu[1/\rho]$, *alors* $\frac{X_n}{n} \to 0$ $\mathbb{P}-p.s.$

Preuve : Voir [Sol75].

On peut enfin caractériser plus précisément le comportement dans le cas récurrent :

Théorème 1.3 (Sinai 1982) *on suppose* $E_\mu[log(\frac{1-\omega}{\omega})] = 0$, *et* $E_\mu[(log(\frac{1-\omega}{\omega}))^2] < \infty$, *alors,* $\frac{X_n}{(\log(n))^2}$ *converge en loi vers une loi non dégénérée.*

Preuve : Voir [Sin82]. La principale idée de la preuve est de constater que la fonction

$$f'_\omega(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{x} e^{W(k)} & \forall x \geq 0 \\ -\sum_{k=0}^{-(x-1)} e^{W(-k)} & \forall x < 0 \end{cases}$$

est harmonique, où

$$W_i = \begin{cases} \sum_{k=0}^{x-1} \log(\rho(k)) & \forall x \geq 0 \\ -\sum_{k=0}^{-x} \log(\rho(-k)) & \forall x < 0 \end{cases} {}^2,$$

Et de constater que $\mathbb{P}-p.s.$, $W(\lceil kt \rceil)/\sqrt{k}$ converge vers le mouvement brownien.

Cette liste non exhaustive donne une idée de ce que l'on peut calculer concernant les MAMAs unidimensionnelles, nous allons maintenant nous intéresser au cas multidimensionnel, où, comme on va le voir, beaucoup moins de résultats existent.

2. W est appelé le potentiel

2 Le cas multidimensionnel

2.1 le modèle

On appelle maintenant environnement la donnée de $(\omega(x, x+e))_{x\in\mathbb{Z}^d,|e|=1}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{Z}^d, \sum_{|e|=1} \omega(x, x+e) = 1$, et on va considérer que les vecteurs $(\omega(x, x+e))_{|e|=1}$ sont i.i.d. de loi μ. On construit comme précédemment la collection de chaînes de Markov (X_n, P^ω) définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, |e| = 1, P^\omega(X_{n+1} = x+e|X_n = x) = \omega(x, x+e)$$

et on construit comme précédemment la probabilité annealed $\mathbb{P}_0$. On peut définir comme précédemment la notion de transience :

Théorème 2.1

$$\mathbb{P}_0(X_n \textit{ visite tous les sites de } \mathbb{Z}^d \textit{ infiniment souvent}) = \\ \mathbb{P}_0(X_n \textit{ visite } x_0 \textit{ infiniment souvent}) = 0 \textit{ ou } 1, \forall x_0 \in \mathbb{Z}^d. \quad (1)$$

Cependant, on ne dispose pas, sans faire d'hypothèse plus précise, de critère de transience. On peut néanmoins, sous des hypothèse contraignantes, obtenir un critère de transience, et même une loi des grands nombres. Pour ces résultats voir [Kal81] et [SZ99].

3 Marches aléatoires en milieu aléatoire sur des arbres

3.1 le modèle

On note $\mathbb{T}$ un arbre infini, sur lequel on ne fait a priori pas d'hypothèses, e sa racine, on note $|x-y|$ la longueur du plus court chemin de x à y (avec la convention $|x| = |x-e|$). Pour chaque noeud x de $\mathbb{T}$, on note $\overleftarrow{x}$ son père, on note également $\mathbb{T}_n$ l'ensemble des noeuds à distance n de la racine, et $M_n = |\mathbb{T}_n|$, on note enfin $x < y$ si x est un ancêtre de y. On se donne une famille de variables aléatoires $(\omega(x, y))_{x,y\in\mathbb{T}}$, vérifiant $\forall x \in \mathbb{T}, \sum_{y\in\mathbb{T}} \omega(x, y) = 1$. On note de plus

$$A(x) = \frac{\omega(\overleftarrow{x}, x)}{\omega(\overleftarrow{\overleftarrow{x}}, \overleftarrow{x})}.$$

On va supposer d'autre part que les vecteurs $\omega(x, .)$ sont iid, ainsi que les $A(x)_{x\in\mathbb{T},|x|>2}$. On va enfin faire l'hypothèse (ellipticité) qu'$\exists\varepsilon_0 > 0$ tq

$$\begin{cases} \omega(x, y) > \varepsilon_0 & |x-y| = 1 \\ \omega(x, y) = 0 & |x-y| \neq 1 \end{cases}.$$

Pour la pertinence de ces hypothèses voir [LP92]. On va ensuite, comme précédemment, définir la collection de chaînes de Markov (X_n, P^ω) définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, P^\omega(X_{n+1} = y|X_n = x) = \omega(x, y).$$

Pour énoncer le premier résultat concernant ces marches aléatoires dans toute leur généralité, il faut définir certaines notions concernant les arbres :

Définition 3.1 1. *On appelle* cutset *un ensemble fini π de noeuds tel que tout chemin de e à l'infini intersecte π, et qui ne contienne aucune paire x, y telle que x soit un ancêtre de y. On note Π l'ensemble des* cutsets

2. *Le* nombre de branchement *d'un arbre est défini par la formule :*

$$br\mathbb{T} = \inf(\lambda > 0; \inf_{\pi\in\Pi} \sum_{\sigma\in\Pi} \lambda^{-|\sigma|})$$

Remarque : Ces définitions apparemment formelles correspondent en fait à des notions assez intuitives : un *cutset* est un ensemble qui sépare la racine de l'infini, et qui est "minimal" pour cette propriété, tandis que le nombre de branchement correspond le plus souvent à la vitesse de croissance moyenne de l'arbre (par exemple b pour un arbre $b-regulier$, E[nombre d'enfants] pour un arbre de Galton-Watson presque sûrement...)

On peut alors énoncer un critère de récurrence, dû à [LP92] :

Théorème 3.1 *On suppose que $0 < A < \infty$ p.s., et on pose $p = \inf_{0\leq x\leq 1} E[A^x]$, alors :*

1. *si $pbr\mathbb{T} > 1$, alors la MAMA est presque sûrement transiente.*
2. *si $pbr\mathbb{T} < 1$, alors la MAMA est presque sûrement récurrente*
3. *si $p\,\overline{\lim}\, M_n^{1/n} < 1$, alors la MAMA est presque sûrement récurrente positive.*

Remarque : en prenant $A = cte$ on retrouve le résultat pour des marches aléatoires normales.

On a un version de ce résultat sur des arbres de Galton-Watson :

Théorème 3.2 *On suppose maintenant que $\mathbb{T}$ est un arbre de Galton-Watson, la loi du nombre d'enfants étant donnée par une variable aléatoire N, et on suppose $m = E[N] > 1$. Alors On suppose que $0 < A < \infty$ p.s., et on pose $p = \inf_{0\leq x\leq 1} E[A^x]$, alors, conditionnellement à la survie (i.e. à $\mathbb{T}$ infini) :*

1. *si $pm > 1$, alors la MAMA est presque sûrement transiente.*
2. *si $pm \leq 1$, alors la MAMA est presque sûrement récurrente*
3. *si $pm < 1$, alors la MAMA est presque sûrement récurrente positive.*

La preuve de ces résultat utilise une correspondance entre les marches aléatoires et des réseaux électriques, qu'il est impossible de décrire ici. Nous allons donc présenter une relation importante entre les marches aléatoires sur les arbres et un processus connu sous le nom de cascade multiplicative de Mandelbrot. Cette correspondance a été mise en valeur pour la première fois par [MP02]

3.2 Martingale de Mandelbrot.

3.2.1 Définition

Pour limiter les notations nous donnons ici une définition simplifiée de la martingale de Mandelbrot. Pour une définition plus complète voir [MP02, Man74] Soit $\mathbb{T}$ un arbre de Galton Watson, et $A(x)$ une famille de variables aléatoires *i.i.d.* indexée par les noeuds de l'arbre [3]

3. Cette définition n'est pas tout à fait claire, les "x" étant aléatoires, mais on peut considérer $\mathbb{T}$ comme un sous-arbre aléatoire d'un arbre (non localement fini) fixé. Pour plus de précision voir [Nev86]

Définition 3.2 *La cascade de Mandelbrot est le processus défini par*

$$Y_n = \sum_{x \in \mathbb{T}_n} \prod_{0<z\leq x} A(z).$$

On peut énoncer une première propriété de ce processus

Proposition 3.1 *On note $\alpha = mE[A]$, on suppose $0 < \alpha < \infty$, alors Y_n/α^n est une martingale, qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire Y dont la distribution est solution de l'équation*

$$Y \underset{\text{loi}}{=} \sum_{1}^{N} A_i Y_i,$$

où les Y_i sont des copies indépendantes de Y, de plus $0 < Y < \infty, p.s.$.

Nous ne détaillons pas la preuve de ce résultat, qui ne présente aucune difficulté.

3.2.2 Mesures invariantes

Pour faire apparaître le lien entre la martingale de Mandelbrot et les M.A.M.A.s sur les arbres nous allons nous intéresser aux mesures invariantes (pour P_ω).

Proposition 3.2 *Soit π une mesure invariante, alors*

$$\pi(x) = \frac{\Pi(e)\omega(e, x^{(1)})}{\omega(x, \overleftarrow{x})A(x^{(1)})} \prod_{0<z\leq x} A(z),$$

où $x^{(1)}$ est le premier élément sur le plus court chemin de e à x. Et par un corollaire évident,

$$\exists c, c' : c \prod_{0<z\leq x} A(z) \leq \pi(x) \leq c' \prod_{0<z\leq x} A(z).$$

preuve : Par induction en utilisant $\omega(x, \overleftarrow{x})\pi(x) = \omega(\overleftarrow{x}, x)\pi(\overleftarrow{x})$.

Références

[Kal81] S.A. Kalikow. Generalized random walks in a random environment. *Annals of Proba.*, 9 :753–768, 1981.

[KKS75] H. Kesten, M.V. Kozlov, and F. Spitzer. A limit law one dimensional random walk in a random environment. *Compositio. Math.*, 30 :145–168, 1975.

[Liu00] Q.S. Liu. On generalized multiplicative cascades. *Stoch. Proc. Appl.*, 86 :263–286, 2000.

[Liu01] Q.S. Liu. Asymptotics properties and absolute continuity of laws stable by random weighted mean. *Stoch. Proc. Appl.*, 95 :125–136, 2001.

[LP92] R. Lyons and R. Pemantle. Random walks in a random environment and first-passage percolation and trees. *Annals of Proba.*, 20 :125–136, 1992.

[LP05] R. Lyons and Y. Peres. *Probability on trees and networks.* http ://mypage.iu.edu/ rdlyons/prbtree/prbtree.html, 2005.

[Man74] B. Mandelbrot. multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 278 :289–292, 1974.

[MP02] M.V. Menshikov and D. Petritis. On random walks in random environment in trees and their relationship with multiplicative chaos. In *Mathematics and computer science II (Versailles, 2002)*, pages 415–422. Birkhaüser, Basel, 2002.

[Nev86] J. Neveu. Arbres et processus de galton-watson. *Ann. Inst. H.Poincaré*, 22 :199–207, 1986.

[Sin82] Ya.G. Sinai. The limit behaviour of a one dimensional random walk in a random environment. *Theory Prob. Appl.*, 27 :247–258, 1982.

[Sol75] F. Solomon. Random walks in a random environment. *Annals of Proba.*, 3 :1–31, 1975.

[SZ99] A.S. Sznitman and M.P.W. Zerner. A law of large numbers for random walks in a random environment. *Annals of Proba.*, 27 :1851–1869, 1999.