Table des matières

Chapitre 3

Relations et opérations

Après les notions d'ensemble et d'application qui ont été introduites aux chapitres précédents, il est question ici d'aborder deux notions complémentaires et fondamentales pour aborder les structures algébriques, les relations d'équivalence sur un ensemble et les opérations internes sur un ensemble E (on dit plutôt loi de composition interne sur E). Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble E permet de considérer comme équivalents (pour la relation en question) des élements de cet ensemble. Si l'on ≪ regroupe ≫ les éléments équivalents entre eux, apparait alors un nouvel ensemble $E/\mathcal{R}$ (appelé (ensemble) quotient de E par $\mathcal{R}$). C'est ainsi que $\mathbb{Z}$ peut être construit à partir de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, que $\mathbb{Q}$ peut être construit à partir de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, etc. Les exemples sont très nombreux.
Par ailleurs, si E est muni d'une opération $*$ (comme par exemple $\mathbb{Z}$ muni de sa multiplication) on peut commencer par étudier les propriétés vérifiées par cette opération, en d'autres termes étudier la ≪ structure ≫ de $(E, *)$. Enfin, nous verrons que si E est muni d'une relation d'équivalence ≪ compatible ≫ avec une opération $*$ définie sur E alors l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ ≪ hérite ≫ de cette opération et est donc muni lui aussi d'une opération. C'est ainsi par exemple que l'on obtient rapidement que le reste de la division euclidienne de 7^{2013} par 3 est 1 c'est-à-dire :

$$7^{2013} \equiv 1[3].$$

Ces notions ne sont pas fondamentalement difficiles et ce cours propose une approche progressive de ces dernières. Le travail du lecteur est de comprendre les définitions abstraites des notions grâce aux nombreux exemples, et surtout d'être capable de les manipuler dans les différents contextes proposés dans les exercices.

1 Relation binaire

Dans toute la suite E est un ensemble non vide quelconque. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E (ou dans E) est une propriété qui concerne les couples (a, b) d'éléments de E en d'autres termes qui concerne les éléments (a, b) de $E \times E$. Plus précisément, l'élément a de E sera en relation avec l'élément b ou ne le sera pas. Dans le premier cas on notera $a \mathcal{R} b$ dans le second $a \not\mathcal{R} b$. Avant de donner une définition formalisée, présentons quelques exemples très simples.

• Prenons ici $E = \mathbb{N}$ et $\mathcal{R}$ la relation ≪ a est inférieur ou égal à b ≫ .Alors $2 \mathcal{R} 5$ et $5 \not\mathcal{R} 2$. Le couple $(2, 5)$ vérifie la propriété $\mathcal{R}$ alors que $(5, 2)$ ne la vérifie pas. Cette relation est bien entendu notée aussi par $\leq$ au lieu du symbole générique $\mathcal{R}$. Pour tout a élément de E, $a \mathcal{R} a$.

On a aussi une relation « transitive » c'est-à-dire que :

$$\forall (a,b,c) \in E^3,\ (a \mathcal{R} b \text{ et } b \mathcal{R} c) \Rightarrow a \mathcal{R} c.$$

• Si E est l'ensemble des droites d'un plan, la propriété « a est perpendiculaire à b » est une relation sur E. On la note aussi $\perp$. Ici, pour tout $a \in E$, $a \not\mathcal{R}\ a$. Cette relation n'est pas transitive mais est « symétrique » dans le sens que

$$\forall (a,b) \in E^2,\ a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a.$$

• Soient à présent $E = \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété « $a-b$ est multiple de n » est une relation sur $\mathbb{Z}$ appelée la relation de congruence modulo n. Si $a \mathcal{R} b$ on écrit alors $a \equiv b\ [n]$, (lire a est congru à b modulo n). Par exemple $7 \equiv 1\ [3]$ puisque $7-1 = 2.3$ et $-13 \equiv 2\ [3]$ puisque $-13-2 = -5.3$.

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 – *Soit E un ensemble non vide. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une propriété $\mathcal{R}$ relative aux éléments de $E \times E$ (c'est-à-dire aux couples d'éléments de E).*

• Pour signifier que a est en relation avec b (c'est-à-dire que $\mathcal{R}$ est vrai pour (a,b)), on écrit (et lit) $a \mathcal{R} b$ au lieu de $\mathcal{R}(a,b)$ vrai.

• Pour une relation $\mathcal{R}$ donnée, l'ensemble des couples de E qui sont en relation est un sous-ensemble de E^2 que l'on notera $\mathcal{C}_E$. On a donc

$$\mathcal{C}_E = \{(a,b) \in E^2,\ a \mathcal{R} b\}.$$

Les relations binaires sont classées en fonction de leur propriétés

Définition 1.1.2 – *Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite*
- *réflexive si* $\forall a \in E,\ a \mathcal{R} a$,
- *symétrique si* $\forall (a,b) \in E^2,\ a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$,
- *antisymétrique si* $\forall (a,b) \in E^2,\ (a \mathcal{R} b \text{ et } b \mathcal{R} a) \Rightarrow a = b$,
- *transitive si* $\forall (a,b,c) \in E^3,\ (a \mathcal{R} b \text{ et } b \mathcal{R} c) \Rightarrow a \mathcal{R} c$.

Exemple 1.1.3 -

• La relation d'égalité « est égal à » est l'unique relation à la fois symétrique et antisymétrique qui existe. En effet, si $a \mathcal{R} b$ alors par symétrie $b \mathcal{R} a$ et donc $a = b$ par antisymétrie.

• La relation « est perpendiculaire à » sur l'ensemble des droites d'un plan est seulement symétrique. La relation « est parallèle à » sur l'ensemble des droites d'un plan est réflexive, symétrique et transitive.

• La relation d'inclusion sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des sous-ensembles de E ($A\ \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B$) est réflexive, antisymétrique et transitive puisque :
- $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset A$,
- $\forall (A,B) \in \Big(\mathcal{P}(E)\Big)^2,\ A \subset B \text{ et } B \subset A \Rightarrow A = B$,
- $\forall (A,B,C) \in \Big(\mathcal{P}(E)\Big)^3,\ A \subset B \text{ et } B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

• Pour $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, la relation sur E définie par : $(p, q) \; \mathcal{R} \; (p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q$, est réflexive, symétrique et transitive.

• Soit une application $f : E \to F$. La relation sur E définie par : $x_1 \; \mathcal{R} \; x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$, est réflexive, symétrique et transitive.

Exercice 1.1.4 -
1) Démontrer les propriétés de ces deux derniers exemples.
2) Préciser les propriétés de la relation sur $\mathcal{P}(E)$: $A \; \mathcal{R} \; B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.

1.2 Relation d'ordre

Définition 1.2.1 - *Une relation binaire sur un ensemble E est une relation dite d'ordre sur E si cette relation est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Par exemple la relation « est inférieur ou égal à » (notée $\leq$) sur l'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est une relation d'ordre (de même pour $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$). Un autre exemple est celui de la relation d'inclusion sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des sous-ensembles de E : $(A \;\; \mathcal{R} \; B \Leftrightarrow A \subset B)$.

• Un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ est appelé un ensemble ordonné, on note alors $(E, \mathcal{R})$ pour signifier que l'on considère cet ensemble avec la relation d'ordre $\mathcal{R}$. Par exemple $(\mathbb{Z}, \leq)$ et $(\mathcal{P}(E), \subset)$ sont des ensembles ordonnés.

• Un ensemble ordonné $(E, \mathcal{R})$ est dit totalement ordonné si deux éléments quelconques a et b de E sont *comparables* c'est à dire si :

$$a \; \mathcal{R} \; b \text{ ou } b \; \mathcal{R} \; a.$$

Par exemple $(\mathbb{Z}, \leq)$ est totalement ordonné. Par contre $(\mathcal{P}(E), \subset)$ ne l'est pas si E est un ensemble ayant plus d'un élément (car deux éléments distincts x et y de E donnent deux sous-ensembles $\{x\}$ et $\{y\}$ de E qui sont non comparables).

• Enfin, un même ensemble peut être muni de plusieurs relations d'ordre. Si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont deux relations d'ordre sur E, on dit que $\mathcal{R}_2$ est plus fine que $\mathcal{R}_1$ lorsque :

$$\forall (a, b) \in E^2, a \; \mathcal{R}_1 \; b \implies a \; \mathcal{R}_2 \; b.$$

Exercice 1.2.2 -
L'objet de cet exercice est d'étudier les deux relations sur $E = \mathbb{R}^2$ définies par :

$$\begin{aligned} &(x, y) \; \mathcal{R}_1 \; (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y', \\ &(x, y) \; \mathcal{R}_2 \; (x', y') \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y'). \end{aligned}$$

A) Eude de $\mathcal{R}_1$

A-1 Dans un repère du plan P, représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{C}_{(2,1)} = \{M(x', y') \in P, \; (2, 1) \; \mathcal{R}_1 \; (x', y')\}$.

A-2 Montrer que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

A-3 Les deux couples $(2,3)$ et $(1,4)$ sont-ils comparables par $\mathcal{R}_1$? Soient (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$, expliciter le fait que ces deux éléments ne soient pas comparables, c'est-à-dire que la proposition ci-dessous soit vraie:

$$\text{non}\Big((x,y)\ \mathcal{R}_1\ (x',y') \text{ ou } (x',y')\ \mathcal{R}_1\ (x,y)\Big)$$

Dans un repère du plan, représenter graphiquement l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que les deux couples $(2,1)$ et (x,y) ne sont pas comparables.

B) Eude de $\mathcal{R}_2$

B-1 Dans un repère du plan P, représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{C'}_{(2,1)} = \{M(x',y') \in P,\ (2,1)\ \mathcal{R}_2\ (x',y')\}$.

B-2 Montrer que $\mathcal{R}_2$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

B-3 Montrer que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}_2)$ est un ensemble totalement ordonné.

B-4 Montrer que la relation d'ordre $\mathcal{R}_2$ est plus fine que la relation d'ordre $\mathcal{R}_1$.

1.3 Relation d'équivalence

Les relations dites d'équivalence sont fondamentales. C'est un ≪ outil≫ qui crée de nouveaux objets mathématiques. Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble E permet de *coller ensemble* les éléments en relation entres eux et d'obtenir ainsi un nouvel ensemble $E/\mathcal{R}$, l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$.

Définition 1.3.1 *Une relation d'équivalence sur un ensemble E est une relation binaire sur E qui est réflexive, symétrique et transitive.*

Exemple 1.3.2 - Donnons quelques exemples en vrac :

-1- La relation d'égalité ≪ est égal à ≫ sur un ensemble E.
-2- La relation ≪ est parallèle a ≫ sur l'ensemble des droites d'un plan.
-3- La relation ≪ x et y ont des parties entières égales ≫ sur l'ensemble $\mathbb{R}$.
-4- Pour E un ensemble non vide et F un sous-ensemble de E, La relation sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des sous-ensembles de E définie par : $(A\ \ \mathcal{R}\ B \Leftrightarrow A \cap F = B \cap F)$.
-5- La relation sur $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par : $(a,b)\ \mathcal{R}\ (a',b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$.
-6- La relation sur $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ définie par : $(p,q)\ \mathcal{R}\ (p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q$.
-7- Pour E l'ensemble des suites de nombres rationnels, $E = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u_n \in \mathbb{Q}\}$, la relation sur E définie par : $u\ \mathcal{R}\ v \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
-8- Pour une application $f : E \to F$, la relation sur E définie par : $x_1\ \mathcal{R}\ x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Exercice 1.3.3 - La relation sur $\mathbb{Z}$ de congruence modulo n.
Soit $E = \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. La propriété ≪ $a - b$ est multiple de n ≫ est une relation sur $\mathbb{Z}$ appelée la relation de congruence modulo n. On écrit $a \equiv b[n]$ ou encore $a \equiv b \bmod (n)$ (lire a est congru à b modulo n) pour signifier que $a\ \mathcal{R}\ b$. On a donc :

$$a \equiv b[n] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a - b = kn.$$

L'ensemble des multiples entiers de n est aussi noté $n\mathbb{Z}$. On a donc $n\mathbb{Z} = \{kn, k \in \mathbb{Z}\}$. En utilisant cette notation la relation sur $\mathbb{Z}$ de congruence modulo n s'écrit :

$$a \equiv b[n] \iff a - b \in n\mathbb{Z}.$$

Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence

Remarque 1.3.4 - **Vocabulaire** - Une relation d'équivalence étant symétrique, si $a \mathcal{R} b$ on a aussi $b \mathcal{R}$ on dit alors simplement que a et b sont en relation. Par exemple on dit que deux droites sont parallèles ou que deux entiers sont congrus modulo n.
Si $a \mathcal{R} b$, les vocabulaires ≪ a est équivalent à b pour la relation $\mathcal{R}$ ≫ ou ≪ a et b sont équivalents pour la relation $\mathcal{R}$ ≫ ou encore ≪ a et b sont équivalents modulo $\mathcal{R}$ ≫ sont aussi utilisés dans le cas général.

Donnons à présent comment les éléments équivalents sont regroupés.

Définition 1.3.5 *Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et soit $x \in E$. On appelle classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$, le sous ensemble de E des éléments de E équivalent à x. On le note en général $\mathcal{C}_x$ (ou $\overline{x}$ ou encore $\dot{x}$), ainsi :*

$$\mathcal{C}_x = \{y \in E, y \mathcal{R} x\}$$

La relation étant réflexive, on a pour tout $x \in E,\ x \mathcal{R} x$. La classe d'équivalence de x, $\mathcal{C}_x$ contient au moins x et est donc en particulier non vide.

Exemple 1.3.6 Donnons à présent quelques exemples de classe d'équivalence pris parmi les exemples de relation donnés en (1.3.2).
- Pour -1-, la classe d'un élément x de E est réduite au singleton $\{x\}$.
- Avec -2-, la classe d'équivalence d'une droite X est l'ensemble des droites du plan parallèles à cette droite X. Une telle classe d'équivalence s'appelle une *direction de droite*.
- Avec -3-, la classe d'équivalence d'un réel x est l'intervalle $[E(x), E(x)+1[$ où $E(x)$ est ici la partie entière de x.
- En -4-, la classe d'équivalence d'un sous ensemble X de E est l'ensemble des sous-ensemble Y de E tels que $X \cap F = Y \cap F$.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_X &= \{Y \in \mathcal{P}(E), X \cap F = Y \cap F\} \\ &= \{(X \cap F) \cup Z, Z \in \mathcal{P}(E \setminus F)\} \end{aligned}$$

- Avec -5-, la classe d'équivalence de $(0, x)$ est :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{(0,x)} &= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, a + x = b\} \\ &= \{(a, a+x), a \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

- Enfin pour -8-, la classe d'équivalence de $x \in E$ est l'ensemble des éléments de E ayant la même image que x par f :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_x &= \{x' \in E, f(x') = f(x)\} \\ &= \{\{x' \in E, x' \in f^{-1}(f(x))\} \\ &= f^{-1}(f(x)) \end{aligned}$$

Exercice 1.3.7 - **Une classe de congruence modulo** n.
1) Pour $x \in \mathbb{Z}$, déterminer la classe d'équivalence de x pour la relation de congruence modulo n, $n \in \mathbb{N}^*$, (notée dans ce cas $\overline{x}$ que l'on nomme aussi *classe de congruence*).
2) Montrer que si $r, (r \in \mathbb{N})$ est le reste de la division euclidienne de x par n alors

$$\overline{x} = \overline{r}.$$

Pour poursuivre nous allons à présent donner **un exemple générique** de relation d'équivalence sur un ensemble E. Cet exemple résume à lui seul la configuration des classes d'équivalence modulo une relation comme nous le verrons par la suite. IL faut commencer par définir ce que l'on entend par une *partition de E*.

Définition 1.3.8 – *Soit I un ensemble et $(E_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I de sous-ensembles non vides de E. On dit que la famille $(E_i)_{i\in I}$ forme une partition de E si les sous-ensembles de cette famille sont deux à deux disjoints et si leur union est E, soit :*

$$\forall (i,j) \in I^2, i \neq i \Longrightarrow E_i \cap E_J = \emptyset, \quad \text{et} \quad \bigcup_{i\in I} E_i = E$$

Pour une partition de E donnée, il exite une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont exactement les éléments de la partition c'est-à-dire les sous-ensembles E_i de la partition. Cette relation est définie sur E par

$$a \mathcal{R} b \iff \exists\, i \in I \text{ tel que } a \in E_i \text{ et } b \in E_i.$$

Cette relation sur E est clairement d'équivalence. Par ailleurs pour a un élément de E, alors il exite un unique $j \in I$ tel que $a \in E_j$ puisque la famille $(E_i)_{i\in I}$ est une partition de E. Les éléments de cet E_j sont exactement ceux qui sont en relation avec a, et ainsi cet E_j est la classe d'équivalence $\mathcal{C}_a$ de a. Pour b un autre élément de E , il exite de même un unique $k \in I$ tel que $b \in E_k$ et E_k est la classe d'équivalence $\mathcal{C}_b$ de b.
Maintenant, soit $j \neq k$, a et b ne sont pas en relation et $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b = \emptyset$, soit $j = k$, a et b sont en relation et $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_b$. C'est cette situation que l'on retrouve pour toute relation d'équivalence.

Théorème 1.3.9 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Pour tous x et y éléments de E :*
$-\, i)\quad x \mathcal{R} y \iff \mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$
$-ii)\quad x \not\mathcal{R} y \iff \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y = \emptyset.$

Preuve Commençons par montrer $i)$ et débutons la preuve par le sens réciproque. Si $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$ alors comme $x \in \mathcal{C}_x$ on a $x \in \mathcal{C}_y$ et donc $x \mathcal{R} y$. Montrons à présent le sens direct de $i)$ c'est-à-dire montrons que

$$x \mathcal{R} y \Rightarrow (\mathcal{C}_x \subset \mathcal{C}_y \text{ et } \mathcal{C}_y \subset \mathcal{C}_x).$$

Montrons $\mathcal{C}_x \subset \mathcal{C}_y$. Pour tout $z \in \mathcal{C}_x$ alors $z \mathcal{R} x$ mais on a $x \mathcal{R} y$ donc par transitivité on a $z \mathcal{R} y$ soit $z \in \mathcal{C}_y$ et donc $\mathcal{C}_x \subset \mathcal{C}_y$. L'inclusion réciproque $\mathcal{C}_y \subset \mathcal{C}_x$ se montre de la même manière (ou est immédiate par symétrie). Montrons à présent $ii)$. La contraposée de $ii)$ est :

$$\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset \iff x \mathcal{R} y.$$

Il suffit donc de montrer cette équivalence pour montrer $ii)$. Si $z \in \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y$ alors ($z \mathcal{R} x$ et $z \mathcal{R} y$) alors par symétrie sur la première relation ($x \mathcal{R} z$ et $z \mathcal{R} y$) et la transitivité donne alors que $x \mathcal{R} y$. Réciproquement, si $x \mathcal{R} y$ alors d'après $i)$, $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y$ et ainsi $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset$ (puisque $\mathcal{C}_x$ est non vide). Ce qui termine la preuve de (1.3.9).

Remarquons que l'on a pour tout x et y éléments de E

$$\mathcal{C}_x \neq \mathcal{C}_y \iff \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y = \emptyset$$

Ainsi, deux classes d'équivalence distinctintes sont disjointes et les classes d'équivalences ont pour réunion E. D'autre part, $x \mathcal{R} y$ si et seulement si ils appartiennent à la même classe d'équivalence. Ce qui est exactement la situation du dernier exemple donné à partir d'une partition de E. On a donc,

Proposition 1.1 *Soit $\mathcal{R}$ un relation d'équivalence sur E. L'ensemble des classes d'équivalence de E modulo $\mathcal{R}$ forme une partition de E.*

Exemple 1.3.10 - Les classes de congruence modulo n. Pour la relation de congruence modulo n définie dans $\mathbb{Z}$, on obtient donc pour deux entiers relatifs x et y, soit :

$$x \equiv y \bmod (n) \Longleftrightarrow \overline{x} = \overline{y}.$$
$$x \not\equiv y \bmod (n) \Longleftrightarrow \overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset.$$

Si r, $(r \in \mathbb{N})$, est le reste de la division euclidienne de x par n alors on a obtenu en (1.3.7) que $\overline{x} = \overline{r}$. La relation de congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$ possède donc n classes d'équivalence distinctes données par les classes d'équivalences de restes possibles d'une division euclidienne par n :

$$\begin{aligned} \overline{0} =& \{kn,\ k \in \mathbb{Z}\} \\ \overline{1} =& \{1 + kn,\ k \in \mathbb{Z}\} \\ \cdots =& \cdots\cdots \\ \overline{n-2} =& \{(n-2) + kn,\ k \in \mathbb{Z}\} \\ \overline{n-1} =& \{(n-1) + kn,\ k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

En tant que sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, la famille constituée de ces n sous-ensemble forme donc une partition de $\mathbb{Z}$. Cela dit, on peut considérer ces classes d'équivalences comme les éléments d'un nouvel ensemble (sous ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$). Ce nouvel ensemble est appelé l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo n. Il est noté $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ (lire « Z sur nZ »), ainsi :

$$\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{\overline{0}\ ,\ \overline{1},\ \cdots\ ,\ \overline{n-2}\ ,\ \overline{n-1}\}$$

Par ailleurs on possède une application, notée en général π,

$$\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \quad x \longmapsto \pi(x) = \overline{x}$$

qui à tout entier relatif x associe sa classe d'équivalence modulo n. L'application π est une surjection, appelée la *surjection canonique* associée à la relation. Par exemple pour n = 7, la surjection canonique $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$, donne $\pi(15) = \overline{15} = \overline{1}$ et $\pi^{-1}(\overline{1}) = \overline{1}$ puisque

$$\overline{1} = \{\cdots, -27, -20, 1, 8, 15, 22, 29, \cdots\}$$

La section suivante généralise cette situation.

1.4 Ensemble quotient

Définition 1.4.1 - Ensemble quotient.
Soit $\mathcal{R}$ un relation d'équivalence sur E . On appelle ensemble quotient de E par la relation $\mathcal{R}$, que l'on note $E/_{\mathcal{R}}$, l'ensemble, sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$, dont les éléments sont les classes d'équivalence de E modulo $\mathcal{R}$. L'application π,

$$\pi : E \longrightarrow E/_{\mathcal{R}}, \quad x \longmapsto \pi(x) = \mathcal{C}_x$$

qui à un élément x de E associe sa classe d'équivalence est appelée la surjection canonique associée à la relation $\mathcal{R}$.

Pour tout élément x de E, il faut remarquer que $\pi^{-1}(\mathcal{C}_x) = \mathcal{C}_x$ c'est-à-dire $\mathcal{C}_x = \pi^{-1}(\pi(x))$. En effet, pour un x fixé de E, on a alors pour tout y de E,

$$\pi(y) = \pi(x) \Leftrightarrow \mathcal{C}_y = \mathcal{C}_x \Leftrightarrow y \in \mathcal{C}_x$$

Il est quelquefois délicat d'interpréter l'ensemble quotient $E/_{\mathcal{R}}$. Pour cela on cherche en général un sous-ensemble F de E où deux éléments distincts de F ont des classes d'équivalence distinctes et où toutes les classes d'équivalence sont représentées dans F. En d'autres termes on cherche un sous-ensemble F de E tel que la restriction de π à F soit bijective. Par exemple, pour $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$, le sous-ensemble $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est un bon candidat mais on aurait aussi pu prendre $F = \{-7, 1, 16, 10, 4, 19, 27\}$ dans les deux cas, l'application $h = \pi|_F$ est bijective :

$$h : F \to \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}, \quad x \mapsto h(x) = \overline{x}$$

Exemple 1.4.2 Décrivons un premier exemple simple. Pour $E = \mathbb{R}$, considérons la relation : $x \mathcal{R} y$ si x et y ont des parties entières égales, (1.3.2, ex. -3-). On a déja vu que la classe d'équivalence d'un réel x est l'intervalle $[E(x), E(x)+1[$ où $E(x)$ est la partie entière de x. Ainsi une classe d'équivalence quelconque est de la forme $\mathcal{C}_n = [n, n+1[, n \in \mathbb{Z}$. L'ensemble quotient $\mathbb{R}/_{\mathcal{R}}$ s'identifie à l'ensemble des parties entières possibles c'est-à-dire à $\mathbb{Z}$. L'application $h = \pi|_{\mathbb{Z}}$ (restriction de π à $\mathbb{Z}$) est bijective et nous donne *l'identification* cherchée :

$$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}/_{\mathcal{R}}, \quad n \mapsto \mathcal{C}_n.$$

Exemple 1.4.3 Décrivons un second un exemple toujours pour $E = \mathbb{R}$. Considérons la relation sur $\mathbb{R}$, « avoir des parties décimales égales » . Ainsi formulé cette relation sur $\mathbb{R}$ est clairement une relation d'équivalence. Ceci dit la partie décimale d'un nombre réel x est définie par le nombre $d(x) = x - E(x)$ où $E(x)$ est la partie entière de x. Deux nombres réels x et y ont donc même partie décimale si $d(x) = d(y)$ ce qui équivaut à $x - y = E(x) - E(y)$ et ce qui équivaut à $x - y \in \mathbb{Z}$, (puisque pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $E(y+k) = E(y) + k$). On a donc

$$x \mathcal{R} x' \Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}.$$

Cette relation est aussi appelée la relation sur $\mathbb{R}$ de congruence modulo 1. La classe d'équivalence d'un réel a est donc,

$$\mathcal{C}_a = \{a + k, \ k \in \mathbb{Z}\},$$

ensemble des réels ayant même partie décimale que celle de a. L'ensemble quotient $\mathbb{R}/_{\mathcal{R}}$ s'identifie donc à toutes les parties décimales distinctes possibles. Cet ensemble peut donc être identifié à l'intervalle $[0, 1[$ que l'on formalise avec La bijection h, restriction de π à l'intervalle $[0, 1[$:

$$h : [0, 1[\to \mathbb{R}/_{\mathcal{R}}, \quad t \mapsto \mathcal{C}_t.$$

Exemple 1.4.4 Donnons un dernier exemple avec la relation sur $\mathcal{P}(E)$ définie en (1.3.2), ex. -4-. Deux sous-ensembles X et Y de E sont en relation si $X \cap F = Y \cap F$. Ce sont donc les intersections possibles avec F qui déterminent les classes. Ces intersections possibles sont exactement les sous-ensembles de F. Leur ensemble est $\mathcal{P}(F)$ et

$$h : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)/_{\mathcal{R}}, \quad A \mapsto \mathcal{C}_A.$$

est l'identification cherchée, que le lecteur devra montrer à titre d'exercice.

Exercice 1.4.5 Pour $E = \mathbb{R}^2$, considérons la relation :

$$(x, y)\ \mathcal{R}\ (x', y') \Leftrightarrow x = x'.$$

1) Démontrer que cette relation est une relation d'équivalence.
2) Expliciter la classe d'un couple de réels (a, b) de $\mathbb{R}^2$.
3) Soit l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2/_{\mathcal{R}}, \quad a \mapsto \mathcal{C}_{(a,0)}$. Montrer que h est bijective.

2 Exercices