Exercices de calcul différentiel, feuille 1

Exercice 1. Calculer les dérivées des applications suivantes :
$f : \mathbb{R} \setminus [-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
$g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{\left(\frac{1}{x}\right)}$
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
Pour l'application h, on montrera d'abord qu'elle est bien définie.

Exercice 2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 3. Simplifier l'expression $\text{Arctan}\,(x) + \text{Arctan}\,(1/x)$ pour $x \neq 0$.
Remarque : il y a deux méthodes possibles, chacune est intéressante à regarder.

Exercice 4. Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Peut-on la prolonger par continuité en 0 ? Si oui, est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 5. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x) = \dfrac{1+x^n}{(1+x)^n}$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Pour tout x dans $\mathbb{R}^+$, montrer l'inégalité $(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n)$.
4. Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^+$, on a $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n+y^n)$.

Exercice 6. On considère une application $f : \mathbb{R} \to R$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (a,k) \in \mathbb{R}^2, f(a+k) - f(a) \geq k f(a)$$

1. Montrer que : $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall h \in]-1,1[, h f(x_0) \leq f(x_0+h) - f(x_0)$.
2. Montrer que : $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall h \in]-1,1[, f(x_0+h) - f(x_0) \leq \dfrac{h}{1-h} f(x_0)$.
   Indication : choisir astucieusement a et k, puis travailler sur l'inégalité pour obtenir celle de l'énoncé.
3. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et préciser l'application f'.

Exercice 7. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée mais que f' n'est pas bornée. L'application f est-elle de classe C^1 ?

Exercice 8. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour tout $t < 0$, la dérivée n-ième de f en t s'écrit sous la forme $\frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$, avec P_n un polynôme. Commencer par calculer P_1 et P_2, puis trouver la relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P'_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

Exercice 9. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^+ \to [2, +\infty[$ définie par $f(x) = e^x + e^{-x}$ est une bijection.Vérifier que $(f'(x))^2 = -4 + (f(x))^2$ puis calculer la dérivée de f^{-1}.
Remarque : En fait, $f = 2\mathrm{ch}$.

Exercice 10. *Utilisation du théorème de Rolle*
Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant $f(0) = \lim_{+\infty} f$. Montrer que f' s'annule au moins une fois. (*Indication*: on pourra par exemple distinguer en fonction de l'existence d'un $x_0 > 0$ vérifiant $f(x_0) = f(0)$.)

Exercice 11. *Règle de L'Hôpital*
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour $x \in]a, b]$.
2. Posons $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ et considérons la fonction $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$. En utilisant le théorème de Rolle pour h, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. On suppose que la limite à gauche en b de $\frac{f'}{g'}$ existe, et est finie, disons ℓ. Montrer alors que
$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \ell.$$

4. Application : Calculer la limite à gauche en 1 de $\dfrac{\operatorname{Arccos} x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 12. *Théorème de Darboux*
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide et soit $a < b$ deux éléments de I. On suppose $f'(a) < f'(b)$ et on considère $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. On considère l'application g définie sur I par $g(x) = f(x) - \lambda x$.

1. Prouver qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = \inf\limits_{x \in [a,b]} g(x)$.
2. Montrer que $c \neq a$ et $c \neq b$.
3. En déduire un théorème de Darboux : Si une fonction numérique f est dérivable sur I, l'image de I par f' est un intervalle.

Application : Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, possédant deux maximums locaux en x_1 et x_2 (où $x_1 < x_2$). Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $]x_1, x_2[$.

Exercice 13. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq k$.

1. Si $k = 0$, que peut-on dire sur $\lim\limits_{+\infty} f$? Illustrer les différents cas possibles par des exemples.

   Pour toute la suite, on s'intéresse au cas $k > 0$, et on veut montrer $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
2. Ecrire avec des quantificateurs la négation de $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
3. Utiliser l'égalité des accroissements finis sur l'intervalle $[0, A]$ (avec un A bien choisi) pour trouver une contradiction entre $\lim\limits_{+\infty} f \neq +\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq k$.
4. Quelle autre méthode aurait-on pu utiliser ?

Exercice 14. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a $\ln(1+x) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.
(De nombreuses méthodes sont possibles.)

Exercice 15. Dans l'application du théorème des accroissement finis à l'application f donnée par $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (avec $\alpha \neq 0$) sur l'intervalle $[a,b]$, préciser le nombre c obtenu dans $]a,b[$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire ?

Exercice 16. Soit f une application C^1 d'un intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est lipschitzienne (c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que pour tous x et y de $[a,b]$, $|f(a) - f(b)| \leq k|a-b|$).
Est-ce encore vrai si le domaine de f est $]a,b]$?

Exercice 17. Démontrer que pour tout x dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi} x$.

Exercice 18. Démontrer que pour tout x dans $]1,+\infty[$, on a $\ln(\ln(x)) \leq \dfrac{x}{e} - 1$.

Exercice 19. Soit $0 < x < y$. Démontrer

$$\frac{1}{\sqrt{y}} < 2\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{y-x} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 20. *Utilisation de l'égalité des accroissements finis*
Soit f une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ telle que $f'(x)$ tend vers un réel ℓ quand x tend vers l'infini. Le but de cet exercice est de montrer que $\frac{f(x)}{x}$ tend vers ℓ également quand x tend vers l'infini.

1. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x > M$, on a $\ell - \frac{\varepsilon}{2} < f'(x) < \ell + \frac{\varepsilon}{2}$. Ce réel M est fixé pour la suite de l'exercice.
2. Ecrire l'égalité des accroissements finis entre M et un réel x.
3. En utilisant les questions précédentes, en déduire une double inégalité encadrant $\frac{f(x)}{x}$ pour tout $x > M$.
4. En déduire qu'il existe un réel A tel que : $x > A \Rightarrow \ell - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \ell + \varepsilon$.
5. Conclure.