MACS2
Institut Galilée

Projets déterministes
Année 2013-2014

PROJET n$^{\mathrm{O}}$ 2

Caroline Japhet

Eléments Finis P_1 - Equation de réaction-diffusion 2D

On considère un domaine $\Omega \in \mathbf{R}^2$ polygonal convexe. On cherche à résoudre le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{dans } \Omega, \\ u = u_D & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_{\boldsymbol{n}} u = g_N & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \tag{1}$$

où Γ désigne la frontière du domaine Ω telle que $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, avec $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\boldsymbol{n}$ désigne le vecteur normal sortant à Γ, $f \in L^2(\Omega)$, $u_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, et $g_N \in L^2(\Gamma_N)$ sont données.

1. Formulation variationnelle :
On rappelle la formulation variationnelle associée à (1) :

$$\text{Trouver } u \in V, \quad \text{tel que } \; a(u,v) = \ell(v), \; \forall v \in W, \tag{2}$$

où $V = \{v \in H^1(\Omega);\; v = u_D \text{ sur } \Gamma_D\}$, $W = H^1_0(\Omega)$,
$a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + c \int_\Omega uv dx, \; \forall u,v \in V$, et $\ell(v) = \displaystyle\int_\Omega f v dx, \; \forall v \in V$.
On rappelle que ce problème admet une unique solution par application du théorème de Lax-Milgram sous une des conditions suivantes

- $c > 0$,
- $mes(\Gamma_D) \neq 0$.

2. Discrétisation :
On se donne une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω. On se donne donc les points $(\mathbf{q}^i)_{1 \le i \le n_q} \in \Omega$ et les triangles $(T_k)_{1 \le k \le n_t}$ qui ont pour sommets des points de la famille $(\mathbf{q}^i)_{1 \le i \le n_q}$ et qui forment une partition du domaine Ω

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n_t} T_k, \quad T_k \cap T_\ell = \emptyset \text{ si } k \neq \ell.$$

Les entiers n_q et n_t désignent respectivement le nombre de sommets et le nombre de triangles du maillage. Le paramètre h défini par $h = \max\limits_{1 \le k \le n_t} \mathrm{diam}(T_k)$ est le pas du maillage.

On introduit ensuite l'espace d'éléments finis de Lagrange de degré 1 :

$$X^1_h(\Omega) = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v_{h|T_k} \in \mathbb{P}^1(T_k), \; k = 0, \ldots, n_t\},$$

où $\mathbb{P}^1(T)$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1 sur T. On introduit aussi $V_h = V \cap X^1_h$, $W_h = W \cap X^1_h$.

On approche alors le problème (2) par le problème variationnel discret suivant :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h, \quad \text{tel que } \; \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx + c \int_\Omega u_h v_h dx, = \int_\Omega f_h v_h dx, \; \forall v_h \in W_h, \tag{3}$$

où $f_h \in X^1_h$ et vérifie $f_h(\mathbf{q}^i) = f(\mathbf{q}^i), \; \forall i = 1, ..., n_q$. On montre que ce problème est bien posé, toujours par application du théorème de Lax-Milgram et sous une des conditions listées plus haut. Sous certaines conditions de régularité sur les maillages considérés, on montre que pour une suite de maillages tels que le pas h tend vers 0, la solution approchée du problème (3) tend vers la solution du problème (2), que ce soit en norme L^2 ou en norme H^1.

Afin décrire le problème (3) sous la forme d'un système linéaire, on introduit maintenant une base de $X_h^1(\Omega)$ définie par

$$\phi_i \in X_h^1(\Omega), \qquad \phi_i(\mathbf{q}^j) = \delta_{ij}, \ \forall i, j \in \{1, ..., n_q\}.$$

En décomposant les fonctions u_h, v_h et f_h apparaissant dans la formulation variationnelle discrète (3) sur la base des ϕ_i, en déduire le système linéaire dont le vecteur $u_h = (u_{h,1}, ..., u_{h,n_q})^t$ est solution, de la forme :

$$\mathbb{A}_h u_h = b_h, \tag{4}$$

avec $A_h = \mathcal{R} + c\mathcal{M}$, où les matrices de masse $\mathcal{M}$ et de rigidité $\mathcal{R}$ sont définies par :

$$\mathcal{M}_{i,j} = \int_\Omega \phi_i \phi_j, \quad \mathcal{R}_{i,j} = \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j, \quad \forall i, j \in 1, ..., n_q.$$

Le second membre $\mathcal{F}$ intervenant dans le calcul de b_h est défini par : $\mathcal{F}_i = \int_\Omega f_h \phi_i dx = (\mathcal{M}\tilde{f})_i, \quad \forall i = 1, ..., n_q$, où $\tilde{f} = (f(\mathbf{q}^1), ..., f(\mathbf{q}^{n_q}))^t$. Noter que, par abus de langage, la notation u_h est utilisée à la fois pour désigner une fonction de X_h^1 et un vecteur de $\mathbf{R}^{n_q}$.

Nous détaillons maintenant les cinq étapes principales de la résolution approchée du problème :

1. construction du maillage
2. assemblage des matrices du système linéaire
3. prise en compte des conditions aux limites
4. résolution du système linéaire
5. affichage des résultats

La résolution de l'ensemble de ces étapes donnera lieu à l'écriture d'un code informatique en Matlab. Il vous est demandé de séparer clairement les différents points dans des fonctions distinctes, comme en 1d. Certains points nécessiteront également l'utilisation de logiciels libres disponibles sur le web, qu'il vous faudra donc télécharger et installer si besoin, et prendre en main.

3. Construction du maillage :

Construire une triangulation du domaine n'est pas une chose facile. Heureusement, il existe des logiciels libres, disponibles sur le web, qui permettent de générer des maillages. Dans ce cours, vous serez amenés à utiliser l'un d'entre eux, le logiciel FreeFem++. Noter qu'il vous sera parfois demandé de résoudre des problèmes sur un domaine non polygonal (par exemple un disque) et qu'il faudra alors garder à l'esprit que Ω est approché par un domaine polygonal Ω_h. Dans ce cas les intégrales dans (3) deviennent des intégrales sur Ω_h, et à l'erreur numérique liée à l'approximation par éléments finis du problème continu (2) s'ajoute dans ce cas une erreur géométrique liée au fait que le problème (3) est posé sur Ω_h qui n'est pas identique au domaine d'origine.

3.1. Le logiciel FreeFem++ :

Ce logiciel est écrit en langage C++ et a été développé à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6). C'est bien plus qu'un simple "mailleur" puisqu'il est destiné à résoudre l'ensemble du problème : entrée des données, maillage du domaine, choix des espaces d'éléments finis considérés, assemblage des matrices, résolution du système, affichage des résultats... Nous serons donc amené à utiliser ce logiciel à plusieurs reprises : maillage d'un domaine, validation de votre travail par comparaison, utilisation pour résoudre des problèmes complexes. Une documentation très détaillée, contenant de très nombreux exemples, est disponible sur le site. Noter qu'il existe des executables directement disponibles pour Mac OS et Windows. L'installation sous Linux se fait normalement sans difficulté. La description du problème se fait par l'intermédiaire de l'écriture d'un fichier ".edp" dans lequel on spécifie les frontières du domaine, le pas de discrétisation sur les bords du domaine (qui influencera le pas h du maillage interne), le choix de l'espace d'éléments finis et la formulation variationelle du problème (voir les nombreux exemples de fichiers ".edp" fournis dans la documentation). Pour la partie maillage, toutes les informations sont contenues dans le même fichier, qui porte traditionnellement l'extension ".msh".

3.2. Stockage des données liées au maillage :
Afin de stocker, puis d'utiliser, pour résoudre le problème posé, les données sur le maillage fournies par ces logiciels dans leurs fichiers de sortie respectifs, on pourra construire une structure MESH, dans laquelle on stockera les informations suivantes :

- le nombre de sommets et de triangles du maillage
- pour chaque sommet, ses coordonnées
- pour chaque triangle, le numéro de ses trois sommets
- pour chaque sommet, si il est à l'intérieur ou sur le bord du domaine, et quelle condition aux limites doit être appliquée
- pour chaque triangle, son aire

Les informations concernant les arêtes du maillage seront utiles pour implémenter d'autres types de conditions aux limites (Neumann non homogène ou Robin).

4. Assemblage du système linéaire :
Il faut maintenant construire les matrices du système linéaire (4). On écrira, comme en 1d, un algorithme utilisant une boucle sur les triangles et le caractère local des fonctions de base ainsi que les informations stockées dans la structure MESH, dans lequel on sera amené à calculer les quantités élémentaires

$$\int_{T_k} \nabla\phi_i^k \cdot \nabla\phi_j^k, \quad \int_{T_k} \phi_i^k \cdot \phi_j^k, \quad \forall i,j = 1,2,3,$$

où les fonctions $(\phi_i^k)_{i=1,2,3}$ désignent (dans une numérotation locale) les fonctions de base associées aux trois sommets du triangle T_k. Ces nombres serviront ensuite à modifier de manière incrémentale les coefficients des matrices $\mathcal{R}$ et$\mathcal{M}$, en utilisant cette fois la numérotation globale stockée dans la structure MESH.

5. Prise en compte des conditions aux limites :
Il ne faudra pas oublier de modifier le système linéaire obtenu pour tenir compte des conditions aux limites imposées. On utilisera à nouveau pour cela les informations contenues dans la structure MESH, ce qui permettra de connaître les points/arêtes où il sera nécessaire d'appliquer les différents types de conditions aux limites. Pour les conditions aux limites de type Dirichlet, on pourra utiliser la méthode vue en 1d (mise à zéro des coefficients non-diagonaux).

6. Résolution du système linéaire :
Cette étape peut être résolue par la trancription en Matlab d'un algorithme de résolution de système linéaire (de type Gauss ou gradient conjugué). Une autre possibilité est d'utiliser "\" Matlab (qui utilise la librairie LAPACK)

7. Affichage des résultats et courbes d'erreur :
On utilisera les outils de visualisation 2d fournis. Il faudra tracer les courbes d'erreur obtenues en considérant une suite de maillage de pas h décroissant et en comparant la solution numérique à une solution analytique connue, et ce pour diverses fonctions (plus ou moins régulières) diverses géométries (carrés, polygônes, disques, troués ou non).