

**Algèbre M1**  
**Correction du devoir. n°1**

Soit  $A$  un intègre et  $S$  un sous ensemble de  $A$  satisfaisant les conditions suivantes:

- i)  $1_A \in S$ ;
- ii)  $0 \notin S$ ;
- iii) Pour tous  $x, y \in S$ ,  $xy \in S$ .

On définit sur  $A \times S$  la relation  $(a, s)\mathcal{R}(b, t)$  si et seulement si  $at = bs$ .

(1) Montrer que la relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

Il suffit de vérifier que la relation est

Réflexive:  $(a, s)\mathcal{R}(a, s)$  car  $as = as$

Symétrique: car  $at = bs \iff bs = at$

Transitive: car si  $(a, s)\mathcal{R}(b, t)$  et  $(b, t)\mathcal{R}(c, v)$  alors  $at = bs$  et  $bv = ct$  donc  $atv = bsv = cts$  implique  $(av - cs)t = 0$ .

Comme  $t \in S$  est différent de 0 et  $A$  est intègre on a  $av = cs$ .

(2) Montrer que les opérations "+" et "." sur  $A[S^{-1}] := (A \times S)/\mathcal{R}$  données par

$$\overline{(a, s)} + \overline{(b, t)} = \overline{(at + bs, st)}$$

$$\overline{(a, s)} \cdot \overline{(b, t)} = \overline{(ab, st)}$$

sont bien définies et confèrent à  $A[S^{-1}]$  une structure d'anneau intègre. Décrire l'élément neutre et l'unité pour ses opérations.

On remarque tout d'abord que si  $s, t \in S$  alors  $st \in S$  donc on peut considérer les classes de  $(at + bs, st)$  et  $(ab, st)$ .

Il faut montrer que ces opérations sont indépendantes de la classe choisie. Supposons que  $(a, s)\mathcal{R}(a', s')$  et  $(b, t)\mathcal{R}(b', t')$

- Il faut montrer que  $(at + bs, st)\mathcal{R}(a't' + b's', s't')$ , c'est-à-dire que  $(at + bs)s't' = (a't' + b's')st$ . Mais  $(at + bs)s't' = ats't' + bss't' = a'stt' + btss' = (a't' + b's')st$ .

- Il faut montrer que  $(ab, st)\mathcal{R}(a'b', s't')$ , c'est-à-dire que  $abs't' = a'b'st$ . Mais  $abs't' = a'sb't$ .

Il faut montrer que l'opération + est associative:

$$\begin{aligned} \overline{((a, s) + (b, t))} + \overline{(c, v)} &= \overline{(at + bs, st)} + \overline{(c, v)} = \overline{((at + bs)v + c(st), (st)v)} \\ &= \overline{(atv + (bv + ct)s, s(tv))} \\ &= \overline{(a, s)} + \overline{(bv + ct, tv)} = \\ &= \overline{(a, s)} + \overline{((b, t) + (c, v))} \end{aligned}$$

Il faut montrer que l'opération + admet un élément neutre qui est  $\overline{(0, 1)}$  (on a bien  $1 \in S$  donc cette classe est bien définie).

$$\overline{(a, s)} + \overline{(0, 1)} = \overline{(a, s)}.$$

et l'opération + est clairement commutative donc on a aussi  $\overline{(0, 1)} + \overline{(a, s)} = \overline{(a, s)}$ .

Il faut montrer que tout élément admet un symétrique qui est  $\overline{(-a, s)}$ :

$$\overline{(a, s)} + \overline{(-a, s)} = \overline{(as - as, s^2)} = \overline{(0, s^2)} = \overline{(0, 1)}$$

Donc + est une loi de groupe abélien.

Il faut montrer que  $\cdot$  est associative (clair), qu'elle admet un élément neutre  $\overline{(1, 1)}$  (clair) et qu'elle est distributive par rapport à l'addition:

$$\begin{aligned} \overline{(a, s) + (b, t)} \cdot \overline{(c, v)} &= \overline{(at + bs, st)} \cdot \overline{(c, v)} = \overline{((at + bs)c, (st)v)} \\ &= \overline{(act + bcs)v, stvv)} \\ &= \overline{(ac, sv)} + \overline{(bc, tv)} = \\ &= \overline{(a, s)} \cdot \overline{(c, v)} + \overline{(b, t)} \cdot \overline{(c, v)} \end{aligned}$$

Donc on a bien un anneau. Il faut encore montrer que cet anneau est intègre:

si  $\overline{(a, s)} \cdot \overline{(b, t)} = \overline{(ab, st)} = \overline{(0, 1)}$ , alors  $ab = 0$ . Comme  $A$  est intègre, soit  $a = 0$  et  $\overline{(a, s)} = \overline{(0, 1)}$  soit  $b = 0$  et  $\overline{(b, t)} = \overline{(0, 1)}$ . Donc  $A[S^{-1}]$  est intègre.

(3) Montrer que l'application  $A \rightarrow A[S^{-1}]$  qui à  $a$  associe  $\overline{(a, 1)}$  est un morphisme d'anneaux. Est-il injectif ?

On note  $\phi$  cette application. Alors

$$\begin{aligned} \phi(a + b) &= \overline{(a + b, 1)} = \overline{(a, 1)} + \overline{(b, 1)} = \phi(a) + \phi(b) \\ \phi(1) &= \overline{(1, 1)} \\ \phi(ab) &= \overline{(ab, 1)} = \overline{(a, 1)} \cdot \overline{(b, 1)} = \phi(a) \cdot \phi(b) \end{aligned}$$

montre que  $\phi$  est un morphisme d'anneaux. Et  $a$  est dans le noyau de  $\phi$  si et seulement si  $\overline{(a, 1)} = \overline{(0, 1)}$  si et seulement si  $a = 0$ . Donc ce morphisme est injectif.

(4) Montrer que  $S = A \setminus \{0\}$  vérifie les bonnes hypothèses et que  $A[S^{-1}]$  est un corps.

$S$  ne contient pas 0 et contient 1 et comme  $A$  est intègre, si  $x, y \in S$  alors  $xy \neq 0$  donc  $xy \in S$ .

Donc  $A[S^{-1}]$  est un intègre. De plus, si  $\overline{(a, b)} \neq \overline{(0, 1)}$  (équivalent à  $a \neq 0$ ) alors  $\overline{(b, a)}$  est son inverse. En effet,

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(b, a)} = \overline{(ab, ab)} = \overline{(1, 1)}.$$

Donc tout élément non nul admet un inverse et  $A[S^{-1}]$  est un corps.