

Algèbre M1
Devoir maison novembre 2011

Dans tout le problème, on considère le corps \mathbb{F}_{16} décrit de la manière suivante

$$\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[X]/(X^4 + X^3 + 1)$$

et on note ω la classe de X dans \mathbb{F}_{16} .

1. (a) Montrer que ω engendre le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_{16}^* = \mathbb{F}_{16} \setminus \{0\}$.
(b) Démontrer que $\omega, \omega^2, \omega^4$ et ω^8 sont les racines du polynôme $X^4 + X^3 + 1$.
(c) Démontrer que la famille $(\omega, \omega^2, \omega^4, \omega^8)$ est une base de \mathbb{F}_{16} sur \mathbb{F}_2 .
2. (a) Soit $a \in \mathbb{F}_{16}$. Résoudre dans \mathbb{F}_{16} l'équation $x^5 = a$, en discutant éventuellement selon les valeurs de a .
(b) Démontrer qu'il existe quatre éléments $\gamma \in \mathbb{F}_{16}$ tels que, pour chacun d'eux, la famille $(\gamma, \gamma^2, \gamma^4, \gamma^8)$ est une base de \mathbb{F}_{16} sur \mathbb{F}_2 telle que le produit de deux de ses éléments appartient à la base ou est égal à 1.