

Épreuve du 19 janvier 2011

Durée de l'épreuve : 3 heures

Les documents, calculatrices, téléphones portables et autres appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Les réponses aux questions devront être justifiées.

Le problème et chacun des deux exercices sont indépendants

Exercices

1. *i)* Déterminer le corps de décomposition L du polynôme $h(X) := (X^2 - 2)(X^2 - 3)$. Quel est le degré de L sur \mathbb{Q} ?

ii) Quels sont les conjugués dans L de l'élément $\gamma := \sqrt{2} + \sqrt{3}$? En déduire que $L = \mathbb{Q}(\gamma)$.

2. *i)* On considère le nombre réel positif $\beta := \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$. Montrer que β est une racine d'un polynôme $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 4 que l'on explicitera.

ii) Le polynôme $f(X)$ est-il irréductible ? Dans le cas contraire, décomposer $f(X)$ en un produit de facteurs irréductibles. Calculer le degré $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$.

iii) Calculez les racines de chacun des facteurs irréductibles de $f(X)$.

iv) En déduire une description plus simple du nombre réel β .

Problème

Pour tout nombre réel négatif x , on désigne dans ce qui suit par $x^{1/2}$ sa racine carrée complexe de partie imaginaire positive.

1. On considère le polynôme $f(X) = X^4 - 2X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que $f(X)$ est irréductible et que ses racines complexes sont

$$\alpha_1 = (1 + \sqrt{3})^{1/2}$$

$$\alpha_3 = -(1 + \sqrt{3})^{1/2}$$

$$\alpha_2 = (1 - \sqrt{3})^{1/2}$$

$$\alpha_4 = -(1 - \sqrt{3})^{1/2}.$$

2. On pose $K_i := \mathbb{Q}(\alpha_i)$ pour $i = 1, 2$. Montrer que α_2 n'appartient pas à K_1 . Les extensions K_1 et K_2 sont-elles galoisiennes ?
3. Calculer $[K_i : \mathbb{Q}]$ pour $i = 1, 2$. On pose $F = K_1 \cap K_2$. Montrer soigneusement que $F = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
4. On pose $L = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$. Montrer que l'extension L/\mathbb{Q} est galoisienne. Quel est l'ordre du groupe $G := \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$? Le groupe G est-il abélien ?
5. Déterminer le polynôme minimal $g(X)$ de α_2 sur le corps K_1 .
6. On pose $H := \text{Gal}(L/F)$. Quel est l'ordre du groupe H ? Montrer que H possède au moins deux sous-groupes d'ordre 2.
7. On rappelle que le groupe diédral D_4 (= groupe d'isométries du carré) est à isomorphisme près le seul groupe non abélien d'ordre 8 possédant plusieurs éléments distincts d'ordre 2. Montrer que le groupe G est isomorphe à D_4 .
8. Montrer qu'il existe un \mathbb{Q} -isomorphisme $s : K_1 \rightarrow K_2$ puis que s se prolonge en un \mathbb{Q} -automorphisme σ de L qui permute circulairement les quatre éléments α_i .