

Algèbre M1
Feuille de TD8

Exercice 1 – Déterminer les corps de décomposition des polynômes suivants de $\mathbb{Q}[X]$ ainsi que leur degré.

a) $X^2 + bX + c, b, c \in \mathbb{Z}$ b) $X^6 - 5,$ c) $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1,$

Exercice 2 – On rappelle que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$.

1. Calculer $[K : \mathbb{Q}]$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbf{b} = \{1, \sqrt{3}, i, i\sqrt{3}\}$ est une base de K en tant que \mathbb{Q} -espace vectoriel.
3. Soit $\xi = \xi_{12} = \exp(2\pi i/12)$. Montrer que $\xi^3 \in K$. Montrer que $\xi^4 \in K$, et conclure que $\xi \in K$.
4. Exprimer ξ comme combinaison linéaire à coefficients dans \mathbb{Q} des éléments de \mathbf{b} .
5. Montrer que $K = \mathbb{Q}(\xi)$.
6. Montrer qu'il existe $\phi \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tel que $\phi(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ et $\phi(i) = -i$.
Montrer qu'il existe $\psi \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tel que $\psi(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ et $\psi(i) = i$.
7. Montrer que $\psi^2 = \text{id}_K$ et $\phi^2 = \text{id}_K$.
Montrer que $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \{\text{id}_K, \phi, \psi, \phi \circ \psi\}$.
Donnez la structure de groupe de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Exercice 3 – On rappelle que le polynôme $X^4 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et réductible dans $\mathbb{F}_2[X]$. On va maintenant montrer que pour tout nombre premier p impair le polynôme $X^4 + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ est réductible.

1. Montrer que si p est impair, alors $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$.
2. Soit \mathbb{F}_q un corps de cardinal p^2 . Montrer que $X^4 + 1$ a une racine ζ dans \mathbb{F}_q .
3. En considérant \mathbb{F}_q comme une extension de \mathbb{F}_p , montrer que le polynôme minimal de ζ est de degré au plus 2.
4. Montrer que $X^4 + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ est réductible.