Université Paris-XIII
Master Mathématiques, 1ère année, 1er semestre
Année universitaire 2010-2011

Algèbre M1
Devoir sur table, mercredi 8 décembre 2010

Les exercices sont indépendants. On demande de justifier les calculs en expliquant clairement la méthode utilisée.

Exercice 1 –Montrer que le polynôme $P(X) = X^4 + X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$. On note α la classe de X dans $K := \mathbb{F}_3[X]/(P)$.

1. Justifiez que K est un corps et que c'est un $\mathbb{F}_3$-espace vectoriel. Quel est sa dimension en tant qu'espace vectoriel ? Combien le corps K a-t-il d'éléments?
2. Exprimez le produit $(\alpha^3 + 1)(\alpha^3 + \alpha^2 + 1)$ dans la base canonique de K.
3. Exprimez l'inverse de $\alpha^3 + \alpha^2 + 1$ dans la base canonique de K.

Exercice 2 –Soit p un nombre premier.

1. Combien y a-t-il de polynômes unitaires de degré 2 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$? Combien d'entre eux sont réductibles ? Combien sont irréductibles ?
2. En déduire l'existence d'un corps de cardinal p^2.

Exercice 3 – Soit $L = \mathbb{Q}(\sqrt[7]{2})$ (où $\sqrt[7]{2}$ est la racine réelle).

1. Déterminer la valeur du nombre $[L : \mathbb{Q}]$.
2. On considère l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{4}) \subset L$. Montrer que $\sqrt[7]{2}$ est racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{4})$. En déduire que $L = \mathbb{Q}(\sqrt[7]{4})$.
3. Montrer que le polynome $X^7 - 4$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$
4. Par un raisonnement analogue, montrer que $X^7 - 8$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Problème

On rappelle que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$.

1. Calculer $[K : \mathbb{Q}]$.

2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B} = \{1, \sqrt{3}, i, i\sqrt{3}\}$ est une base de K en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

3. Soit $\xi = \xi_{12} = \exp(2\pi i/12)$. Montrer que $\xi^3 \in K$. Montrer que $\xi^4 \in K$, et conclure que $\xi \in K$.

4. Exprimer ξ comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$ des éléments de $\mathcal{B}$.

5. Montrer que $K = \mathbb{Q}(\xi)$.

6. Montrer qu'il existe $\phi \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tel que $\phi(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ et $\phi(i) = -i$.

   Montrer qu'il existe $\psi \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tel que $\psi(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ et $\psi(i) = i$.

7. Montrer que $\psi^2 = \mathrm{id}_K$ et $\phi^2 = \mathrm{id}_K$.

   Décrivez tous les éléments du groupe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Dire quelle est la structure de ce groupe.