Opérades, algèbres sur une opérade et algèbres pré-Lie

Muriel Livernet
LAGA–Université Paris 13

Soutenance d'Habilitation à diriger les recherches – 28 juin 2007

Contexte historique–Les années 60-70

- L'opérade des n-petits cubes et le principe de reconnaissance des espaces de lacets n-itérés (Boardmann-Vogt, May)
- Les structures A_∞ et le polytope de Stasheff
- Les structures E_∞ et les opérations de Steenrod (May)
- Une structure de Gerstenhaber sur $HH^*(A, A)$
- Divers résultats sur les déformations d'algèbres

Contexte historique–Depuis les années 90

Article fondateur: dualité de Koszul pour les opérades quadratiques, Ginzburg et Kapranov

- Interprétation des modèles de Quillen et de Sullivan en homotopie rationnelle
- Etude des types d'algèbres de manière systématique permettant
  - Homologie opéradique
  - Résolution d'opérades: type à homotopie près– théorème de formalité de Kontsevich; théorie de la déformation.
- Structures E_∞
  - Travaux de Mandell
  - Opérations de Steenrod
  - Conjecture de Deligne
- Structure BV– Crochet de Chas-Sullivan

Contexte historique–Depuis les années 90

Article fondateur: dualité de Koszul pour les opérades quadratiques, Ginzburg et Kapranov

$\Rightarrow$ Interprétation des modèles de Quillen et de Sullivan en homotopie rationnelle

$\Rightarrow$ Etude des types d'algèbres de manière systématique permettant

- Homologie opéradique
- Résolution d'opérades: type à homotopie près– théorème de formalité de Kontsevich; théorie de la déformation.

- Structures E_∞
    - Travaux de Mandell
    - $\Rightarrow$ Opérations de Steenrod
    - Conjecture de Deligne

$\Rightarrow$ Structure BV– Crochet de Chas-Sullivan

Contexte historique–Depuis les années 2000

Lien avec les algèbres de Hopf et les théorèmes de rigidité.

- Théorie de la renormalisation de Connes et Kreimer
- Théorèmes de type Leray
- Théorèmes de type Cartier-Milnor-Moore
- Rigidité d'algèbres de Hopf combinatoires

Contexte historique–Depuis les années 2000

Lien avec les algèbres de Hopf et les théorèmes de rigidité.

- $\Rightarrow$ Théorie de la renormalisation de Connes et Kreimer
- $\Rightarrow$ Théorèmes de type Leray
- Théorèmes de type Cartier-Milnor-Moore
- $\Rightarrow$ Rigidité d'algèbres de Hopf combinatoires

Opérades

Opérades, motivations et exemples

Définition

Dans une catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, une *opérade* est une famille d'objets $\mathcal{P}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ avec

- action de S_n sur $\mathcal{P}(n)$,
- $1 \in \mathcal{P}(1)$,
- compositions pour $1 \leq i \leq n$,

$$\circ_i : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(n+m-1)$$

satisfaisant des axiomes d'associativité, d'équivariance par rapport à S_n et d'unité.

La catégorie $\mathcal{C}$ peut être: les ensembles, les espaces topologiques, les espaces vectoriels (gradués ou différentiels gradués).

Exemple 1 : le groupe symétrique

$\mathcal{P}(n) = S_n$ avec multiplication.

$$\sigma = (2,3,1,4) \qquad \tau = (2,3,1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Exemple 1 : le groupe symétrique

$\mathcal{P}(n) = S_n$ avec multiplication.

$$\sigma = (2, \boxed{3}, 1, 4) \qquad \tau = (2, 3, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\sigma \circ_2 \tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (2, 4, 5, 3, 1, 6)$$

Exemple 1 : le groupe symétrique

$\mathcal{P}(n) = S_n$ avec multiplication. $\Rightarrow$ Axiome d'équivariance s'écrit

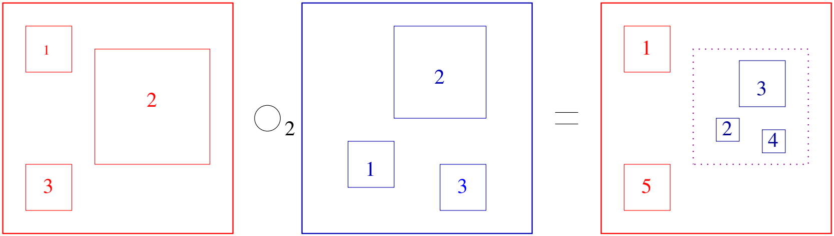
$$(p \cdot \sigma) \circ_i (q \cdot \tau) = (p \circ_{\sigma(i)} q) \cdot (\sigma \circ_i \tau).$$

$$\sigma = (2, \boxed{3}, 1, 4) \qquad \tau = (2, 3, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\sigma \circ_2 \tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (2, 4, 5, 3, 1, 6)$$

Exemple 2 : l'opérade des petits carrés



Exemple 3 : l'opérade des endomorphismes

Définition

X objet de $\mathcal{C}$, $\mathrm{End}_X(n) = \mathrm{Map}(X^{\otimes n}, X)$.
La composition $f \circ_i g$ se fait par insertion de g à la place i.

Typiquement, pour $f, g \in \mathrm{End}_X(2)$,

$$(f \circ_2 g)(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, g(x_2, x_3)).$$

Algèbres sur une opérade

Définition

Une *algèbre sur une opérade* $\mathcal{P}$ est un objet A de $\mathcal{C}$ muni d'opérations d'évaluations

$$ev_n : \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \to A$$
$$\Leftrightarrow \text{ morphisme d'opérades } \ \mathcal{P} \to \mathrm{End}_A$$

- Principe de reconnaissance: si X est une algèbre sur l'opérade des petits carrés C_2 alors X a le type d'homotopie d'un espace de lacet double.
- Si X est une algèbre sur $(S_n)_{n \geq 1}$ alors X est un monoïde.

Opérades dans la catégorie des espaces vectoriels

Equivalence entre type d'algèbres et opérades.

Type d'algèbre	Opérade	Composition
Associative	$\mathcal{A}s(n) = k[S_n]$	$\sigma \circ_i \tau$
Associative et Commutative	$\mathcal{C}\mathrm{om}(n) = k$	$e_n \circ_i e_m = e_{n+m-1}$
Gerstenhaber $\cdot$, $[-,-]$ de degré 1 $[x, y \cdot z] = \pm[x,y] \cdot z \pm y \cdot [x,z]$	graduée $\mathcal{G}ers =$	

Opérades dans la catégorie des espaces vectoriels

Equivalence entre type d'algèbres et opérades.

Type d'algèbre	Opérade	Composition
Associative	$\mathcal{A}s(n) = k[S_n]$	$\sigma \circ_i \tau$
Associative et Commutative	$\mathcal{C}om(n) = k$	$e_n \circ_i e_m = e_{n+m-1}$
Gerstenhaber $\cdot$, $[-,-]$ de degré 1 $[x, y \cdot z] = \pm[x,y] \cdot z \pm y \cdot [x,z]$	graduée $\mathcal{G}ers =$ $H_*(C_2)$	

Théorème (F. Cohen)

L'opérade $\mathcal{G}ers$ est l'opérade $H_*(C_2)$.

Conjecture de Deligne

Opérades	algèbres	exemples
C_2	espaces de lacets doubles	
$H_*(C_2)$	algèbres de gerstenhaber	$HH^*(A, A)$
$C_*(C_2)$		$C^*(A, A)?$

Opérations Sur $C^*(A, A) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes^*}, A)$

- Le $\cup$-produit

$$(f \cup g)(a_1, \dots, a_{n+m}) = f(a_1, \dots, a_n)g(a_{n+1}, \dots, a_{n+m})$$

- Les opérations braces

$$f\{g_1, \dots, g_p\} = \sum f(id, g_1, id, \dots, id, g_p, id)$$

Opérations particulière $f\{g\}$ pré-Lie ou $\cup_1$

Conjecture de Deligne

Théorème (McClure, Smith, Berger, Fresse, Kontsevich, Soibelmann, Tamarkin)

Il existe une opérade $\mathcal{E}$ résolution de $\mathcal{C}\mathrm{om}$, munie d'une filtration telle que $F_2(\mathcal{E})$ quasi isomorphe à $C_*(C_2)$ et telle que $C^*(A,A)$ est une algèbre sur cette opérade.

Opérations Sur $C^*(A,A) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes^*}, A)$

- Le $\cup$-produit

$$(f \cup g)(a_1, \ldots, a_{n+m}) = f(a_1, \ldots, a_n)g(a_{n+1}, \ldots, a_{n+m})$$

- Les opérations braces

$$f\{g_1, \ldots, g_p\} = \sum f(id, g_1, id, \ldots, id, g_p, id)$$

Opérations de Steenrod

Théorème (Mandell)

Le type d'homotopie d'un espace topologique est "reconnu" par une structure E_∞ sur les cochaines de l'espace

$\Rightarrow$ $\cup_i : C^n(X) \otimes C^m(X) \to C^{n+m-i}(X)$

$\Rightarrow$ Opérations de Steenrod

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Sq}^i : & H^n(X, \mathbb{F}_2) & \to & H^{n+i}(X, \mathbb{F}_2) \\ & [x] & \mapsto & \mathrm{Sq}^i([x]) = [x \cup_{n-i} x] \end{array}$$

Théorème (Chataur-L.)

Construction d'une opérade appelée opérade d'Adem-Cartan, "minimale" contenant les $\cup_i$-produits et les relations de Cartan et d'Adem uniquement.

Algèbres pré-Lie

Algèbres pré-Lie

Définition

Une algèbre pré-Lie L est un espace vectoriel muni d'un produit qui satisfait la relation

$$x \circ (y \circ z) - (x \circ y) \circ z = x \circ (z \circ y) - (x \circ z) \circ y.$$

Exemple

$\mathcal{P}$ une opérade, $\mathcal{P}_* = \oplus_n \mathcal{P}(n)$ avec $p \circ q = \sum_{i=1}^{n} \pm p \circ_i q$. Comme $C^*(A, A)$.

Champs de vecteurs

Proposition

L une algèbre pré-Lie. Alors $[x, y] = x \circ y - y \circ x$ *est un crochet de Lie.*

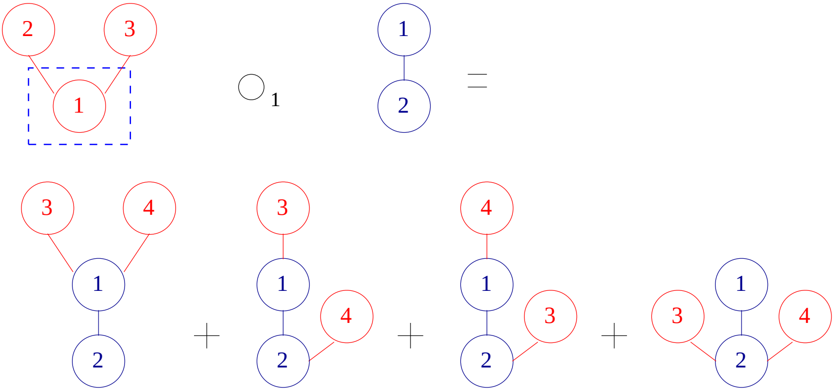
Exemple

Sur $\mathbb{R}^n$ produit pré-Lie de champs de vecteurs donné par

$$X \circ Y = \sum_i X^i \frac{\partial Y}{\partial x_i}.$$

Le crochet est le crochet de Lie classique.

Opérade des arbres enracinés



Arbres enracinés et algèbres pré-Lie

Théorème (Chapoton-L.)

Les algèbres sur cette opérade sont les algèbres pré-Lie

Corollaire

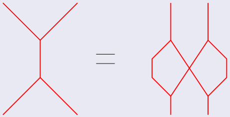
L'algèbre pré-Lie libre sur un générateur est l'espace vectoriel engendré par les arbres enracinés avec pour produit

$$S \circ T = \sum_{s \in Vert(S)} \begin{array}{c} \boxed{T} \\ {}_{s}\big| \\ \boxed{S} \end{array}$$

$\Rightarrow$ On retrouve l'algèbre de Lie obtenue en théorie de la renormalisation.

Théorèmes de rigidité

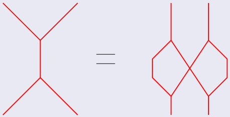
Théorème (Leray)



Les algèbres de Hopf commutatives et cocommutatives sont libres.

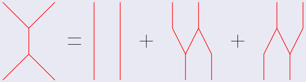
Théorèmes de rigidité

Théorème (Leray)



Les algèbres de Hopf commutatives et cocommutatives sont libres.

Théorème (Loday-Ronco)



Les algèbres de Hopf unitaires infinitésimales sont libres

Les algèbres NAP

Algèbre NAP

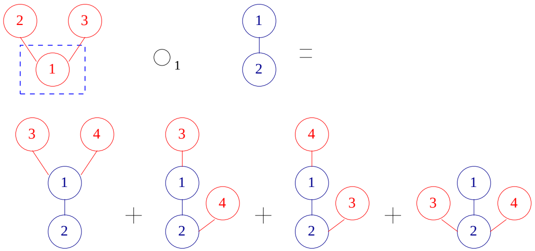
C'est un espace vectoriel muni d'un produit tel que

$$(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot y$$

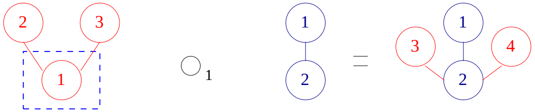
L'opérade NAP est aussi basée sur les arbres enracinés, MAIS la composition est différente.

Composition

Cas pré-Lie

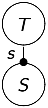


Cas NAP

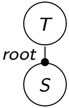


Au niveau des algèbres

Cas pré-Lie

$$S \circ T = \sum_{s \in Vert(S)}$$ 

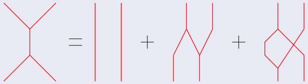
Cas NAP

$$S \cdot T =$$ 

Théorème de rigidité pour les algèbres pré-Lie

Théorème (L.)

Soit H une algèbre pré-Lie et une cogèbre NAP telle que



Alors H est libre et colibre

Opérades et $\mathbb{S}$-modules

$\mathbb{S}$-modules

Définition (Joyal)

Un $\mathbb{S}$-module est une famille d'espaces vectoriels $V = (V(n))_{n\in\mathbb{N}}$ + action de S_n sur $V(n)$.

$$\Longleftrightarrow$$

Foncteur contravariant de **Bij** dans **Vect**.

Exemple

(S_n) avec multiplication à droite

$$\Longleftrightarrow$$

Ordres linéaires sur les ensembles

Produit tensoriel

Espaces vectoriels	$\otimes$
Espaces vectoriels gradués	$(V \otimes W)_n = \oplus_{p+q=n} V_p \otimes W_q$
$\mathbb{S}$-modules	

Produit tensoriel

Espaces vectoriels	$\otimes$
Espaces vectoriels gradués	$(V \otimes W)_n = \oplus_{p+q=n} V_p \otimes W_q$
$\mathbb{S}$-modules	$(V \otimes^{\mathbb{S}} W)(A) = \oplus_{I \sqcup J = A} V(I) \otimes W(J)$

$$(V \otimes^{\mathbb{S}} W)(n) = \oplus_{p+q=n} V(p) \otimes W(q) \otimes_{S_p \times S_q} K[S_n].$$

Un élément s'écrit

$$v \otimes w \otimes (I, J)$$

Le pléthysme

Le pléthysme

P, Q deux $\mathbb{S}$-modules:

$$(P \circ^{\mathbb{S}} Q)(n) = \oplus_{k\geq 0} P(k) \otimes_{S_k} Q^{\otimes^{\mathbb{S}} k}(n)$$

Un $\mathbb{S}$-module P, un espace vectoriel V:

$$P \circ V = \oplus_{k\geq 0} P(k) \otimes_{S_k} V^{\otimes k}$$

Deux espaces vectoriels gradués V, W:

$$V \circ W = \oplus_{k\geq 0} V_k \otimes W^{\otimes k}$$

Le pléthysme

Le pléthysme

P, Q deux $\mathbb{S}$-modules: $(\mathbf{Smod}, \circ^{\mathbb{S}})$ est monoïdale

$$(P \circ^{\mathbb{S}} Q)(n) = \oplus_{k \geq 0} P(k) \otimes_{S_k} Q^{\otimes^{\mathbb{S}} k}(n)$$

Un $\mathbb{S}$-module P, un espace vectoriel V:

$$P \circ V = \oplus_{k \geq 0} P(k) \otimes_{S_k} V^{\otimes k}$$

Deux espaces vectoriels gradués V, W: $(\mathbf{grVect}, \circ)$ est monoïdale

$$V \circ W = \oplus_{k \geq 0} V_k \otimes W^{\otimes k}$$

Un autre language pour les opérades

Définition

Une *opérade* est une monade dans $(\mathbf{Smod}, \circ^{\mathbb{S}})$

$$\mu_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \circ^{\mathbb{S}} \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$

$$\eta_{\mathcal{P}} : I \to \mathcal{P}.$$

Une $\mathcal{P}$-algèbre tordue M est une algèbre sur cette monade dans **Smod**

$$\mathcal{P} \circ^{\mathbb{S}} M \to M$$

Une $\mathcal{P}$-algèbre V est un espace vectoriel avec

$$\mathcal{P} \circ V \to V$$

Une *opérade non symétrique* est une monade dans $(\mathbf{grVect}, \circ)$

Problématique

$$\mathbf{Smod} \underset{\mathcal{O}}{\overset{\mathcal{S}}{\rightleftarrows}} \mathbf{grVect}$$

Problématique

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Op} \arrow[r, shift right, "\mathcal{O}"'] \arrow[d] & \mathbf{OpNS} \arrow[l, shift right, "\mathcal{S}"'] \arrow[d] \\
\mathbf{Smod} \arrow[r, shift right, "\mathcal{O}"'] & \mathbf{grVect} \arrow[l, shift right, "\mathcal{S}"']
\end{tikzcd}$$

Problématique

$$\begin{tikzcd}
\textbf{Op} \arrow[d] \arrow[r, shift right, "\mathcal{O}"'] & \textbf{OpNS} \arrow[d] \arrow[l, shift right, "\mathcal{S}"'] \\
\textbf{Smod} \arrow[r, shift right, "\mathcal{O}"'] & \textbf{grVect} \arrow[l, shift right, "\mathcal{S}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}-\text{alg tordues} \arrow[d] \arrow[r, "\mathcal{O}"'] & ?\,\mathcal{P}-\text{alg}\,? \arrow[d] \\
\textbf{Smod} \arrow[r, "\mathcal{O}"'] & \textbf{grVect}
\end{tikzcd}$$

Problématique

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Op} \arrow[r, shift right, "\mathcal{O}"'] \arrow[d] & \mathbf{OpNS} \arrow[l, shift right, "\mathcal{S}"'] \arrow[d] \\ \mathbf{Smod} \arrow[r, shift right, "\mathcal{O}"'] & \mathbf{grVect} \arrow[l, shift right, "\mathcal{S}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}-\text{alg de Hopf tordues} \arrow[r, "\mathcal{O}"'] \arrow[d] & {\color{red}?}\,\mathcal{P}-\text{alg de Hopf}\,{\color{red}?} \arrow[d] \\ \mathbf{Smod} \arrow[r, "\mathcal{O}"'] & \mathbf{grVect} \end{tikzcd}$$

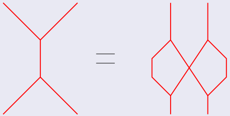
Si $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$ cas connu: Stover, Patras-Reutenauer

Algèbre de Hopf tordue

Définition

C'est une algèbre de Hopf dans la catégorie ($\mathbf{Smod}, \otimes^{\mathbb{S}}$)

- Produit associatif $\mu : A \otimes^{\mathbb{S}} A \longrightarrow A$
- Coproduit coassociatif $\Delta : A \longrightarrow A \otimes^{\mathbb{S}} A$
- Δ est une morphisme d'algèbres associatives tordues



Exemple: le groupe symétrique

$A = (K[S_n])_n$ est une algèbre de Hopf tordue cocommutative pour

- $\mu(\sigma, \tau) = \sigma \times \tau = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$
- $\Delta(\sigma) = \sum_{S \sqcup T = [n]} \sigma|_S \otimes \sigma|_T \otimes (S, T)$

Notation:

$$(1, 4, 7, 2, 3, 6, 5)|_{\{1,3,4,6\}} = \mathrm{st}(1, 7, 2, 6) = (1, 4, 2, 3)$$

Théorème de Stover, Patras-Reutenauer,

Théorème

Une algèbre de Hopf tordue (H, μ, Δ) *donne lieu à deux structures d'algèbres de Hopf*

- $\hat{H} = (H, \bar{\mu}, \hat{\Delta})$: *l'algèbre cosymétrique.*
- $\bar{H} = (H, \hat{\mu}, \bar{\Delta})$: *l'algèbre symétrique.*

Solution de la problématique pour $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}-\text{alg de Hopf tordues} \arrow[r, shift left, "\hat{\mathcal{O}}"] \arrow[r, shift right, "\bar{\mathcal{O}}"'] \arrow[d] & \mathcal{P}-\text{alg de Hopf} \arrow[d] \\
\textbf{Smod} \arrow[r, "\mathcal{O}"'] & \textbf{grVect}
\end{tikzcd}$$

Théorème de Stover, Patras-Reutenauer, L.

Théorème

Une algèbre de Hopf tordue (H, μ, Δ) *donne lieu à deux structures d'algèbres de Hopf*

- $\hat{H} = (H, \bar{\mu}, \hat{\Delta})$*: l'algèbre cosymétrique.*
- $\bar{H} = (H, \hat{\mu}, \bar{\Delta})$*: l'algèbre symétrique.*

Solution de la problématique pour $\mathcal{P}$ de Hopf

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} - \text{alg de Hopf tordues} \arrow[r, "\bar{\mathcal{O}}"'] \arrow[d] & \mathcal{P} - \text{alg de Hopf} \arrow[d] \\
\textbf{Smod} \arrow[r, "\mathcal{O}"'] & \textbf{grVect}
\end{tikzcd}$$

Théorème de Stover, Patras-Reutenauer, L.

Théorème

Une algèbre de Hopf tordue (H, μ, Δ) *donne lieu à deux structures d'algèbres de Hopf*

- $\hat{H} = (H, \bar{\mu}, \hat{\Delta})$: *l'algèbre cosymétrique.*
- $\bar{H} = (H, \hat{\mu}, \bar{\Delta})$: *l'algèbre symétrique.*

Solution de la problématique pour $\mathcal{P}$ de Hopf

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}-\text{alg de Hopf tordues} \arrow[r, shift left, "\mathcal{P}=\mathcal{S}\tilde{\mathcal{P}} \Rightarrow \hat{\mathcal{O}}"] \arrow[r, shift right, "\bar{\mathcal{O}}"'] \arrow[d] & \mathcal{P}-\text{alg de Hopf} \arrow[d] \\
\textbf{Smod} \arrow[r, "\mathcal{O}"'] & \textbf{grVect}
\end{tikzcd}$$

Un résultat de rigidité

Théorème (Stover, Patras-Reutenauer)

Une algèbre de Hopf tordue (H, μ, Δ) *donne lieu à deux structures d'algèbres de Hopf*

- $\hat{H} = (H, \bar{\mu}, \hat{\Delta})$*: l'algèbre cosymétrique.*
- $\bar{H} = (H, \hat{\mu}, \bar{\Delta})$*: l'algèbre symétrique.*

Théorème (L.)

L'algèbre $(H, \bar{\mu}, \bar{\Delta})$ *est une algèbre de Hopf unitaire infinitésimale*

Corollaire (Loday-Ronco)

- *L'algèbre de Hopf cosymétrique* $(H, \bar{\mu}, \hat{\Delta})$ *est libre.*
- *L'algèbre de Hopf symétrique* $(H, \hat{\mu}, \bar{\Delta})$ *est colibre.*

Opérades de Hopf

Définition

C'est une opérade dans la catégorie des cogèbres

$$\delta_n : \mathcal{P}(n) \to \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(n)$$
$$\epsilon_n : \mathcal{P}(n) \to K$$

Théorème (Getzler-Jones, Moerdijk)

Dans ce cas, le produit tensoriel de deux $\mathcal{P}$-algèbres (tordues) est une $\mathcal{P}$-algèbre (tordue).

Définition

Une $\mathcal{P}$-algèbre de Hopf (tordue) M est une $\mathcal{P}$-algèbre (tordue) avec

$$\Delta : M \to M \otimes M (M \otimes^{\mathbb{S}} M)$$

morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres (tordues).

Opérades de Hopf connexes

Définition

$\mathcal{P}$ connexe si

$$\mathcal{P}(0) = K = K \cdot 1_0, \mathcal{P}(1) = K \cdot 1_1.$$

Pour $\mu \in \mathcal{P}(n), S \subset [n]$

$$\mu|_S = \mu(x_1, \ldots, x_n),\ \text{avec}, \begin{cases} x_i = 1_1 & \text{si } i \in S \\ x_i = 1_0 & \text{si } i \notin S \end{cases}, \in \mathcal{P}(|S|).$$

Construction d'une $\mathcal{P}$-algèbre de Hopf

Théorème (Moerdijk, L.-Patras)

$\mathcal{P}$ une opérade de Hopf connexe

$$\begin{array}{cccc} \Delta: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \otimes^{\mathbb{S}} \mathcal{P} \\ & \mu & \longmapsto & \sum_{S \sqcup T = [n]} \mu_{(1)}|_S \otimes \mu_{(2)}|_T \otimes (S, T). \end{array}$$

est l'unique morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres tordues tel que
$\Delta(1_1) = 1_0 \otimes 1_1 + 1_1 \otimes 1_0$.

Exemple

$\mathcal{P} = \mathcal{A}s$, $\delta_n(\sigma) = \sigma \otimes \sigma$ and $\epsilon_n(\sigma) = 1$. Alors

$$\Delta(\sigma) = \sum_{S \sqcup T = [n]} \sigma|_S \otimes \sigma|_T \otimes (S, T)$$

est un morphisme d'algèbres de Hopf tordues.

L'espace des primitifs

Théorème (L.-Patras)

$\mathcal{P}$ une opérade de Hopf connexe

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \otimes^{\mathbb{S}} \mathcal{P} \\ & \mu & \mapsto & \sum_{S \sqcup T = [n]} \mu_{(1)}|_S \otimes \mu_{(2)}|_T \otimes (S, T). \end{array}$$

Alors $\mathrm{Prim}\,\mathcal{P} = \{\mu | \Delta(\mu) = 1_0 \otimes \mu + \mu \otimes 1_0\}$ *est une sous-opérade de* $\mathcal{P}$.

Exemple

$$\begin{array}{cc} \mathrm{Prim}(\mathcal{A}s) = \mathcal{L}ie & \mathrm{Prim}(\mathcal{P}ois) = \mathcal{L}ie \\ \mathrm{Prim}(\mathcal{D}end) = \mathcal{B}race & \mathrm{Prim}(\mathcal{CTD}) = \mathcal{C}\mathrm{om} \end{array}$$

Algèbres enveloppantes

Théorème (L.-Patras)

$$\mathcal{P} - \text{algèbres de Hopf (tordues)} \underset{\text{Prim}}{\overset{\mathcal{U}}{\rightleftarrows}} \text{Prim}(\mathcal{P}) - \text{algèbres (tordues)}$$

Théorème (Stover)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}s - \text{algèbres de Hopf tordues cocommutatives} \arrow[d, shift right, "\text{Prim}"'] \\ \mathcal{L}ie - \text{algèbres tordues} \arrow[u, shift right, "\mathcal{U}"'] \end{tikzcd}$$

est une équivalence de catégorie.

Opérades de Hopf multiplicatives

Définition

C'est une opérade de Hopf $\mathcal{P}$ avec un morphisme $\mathcal{A}s \to \mathcal{P}$.

Théorème (L.-Patras)

Dans la catégorie des algèbres de Hopf tordues: $\mathcal{A}s = \mathcal{U}(\mathcal{L}ie)$
$\mathcal{P}ois = \mathcal{U}(\mathcal{L}ie)$
La structure d'algèbre de Lie tordue de $\mathcal{L}ie$ *n'est pas la même...*

Recette

- Prendre une opérade de Hopf $\mathcal{P}$ multiplicative
- C'est donc une algèbre de Hopf tordue (H, m, δ)
- on obtient deux algèbres de Hopf classiques
  - $(H_*, \bar{m}, \hat{\Delta})$ est une algèbre de Hopf, libre.
  - $(H_*, \hat{m}, \bar{\Delta})$ est une algèbre de Hopf, colibre.
- En caractéristique 0, si δ est cocommutative alors

$$Prim_{\hat{\Delta}}(H_*) = \mathbb{L}Prim_{\bar{\Delta}}(H_*).$$

Exemple: le groupe symétrique, les faces du permutoèdre, les compositions d'ensembles, et aussi on a des résultats pour les arbres binaires planaires, les arbres planaires (faces de l'associaèdre)...