

Opérades non symétriques libres

Muriel Livernet
LAGA–Université Paris 13

*Ces notes représentent une partie de l'exposé. Le reste a été fait au
tableau*

CIRM–Luminy – 2 décembre 2008

Opérades non symétriques/ Opérades

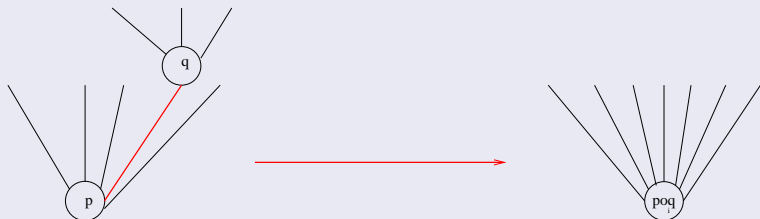
$(\mathcal{C}, \otimes, I)$ mon. sym. $\mathcal{C} = \text{Ens}, \text{Top}, \text{Vect}, \text{gVect}, \text{dgVect}, \dots$

Définition

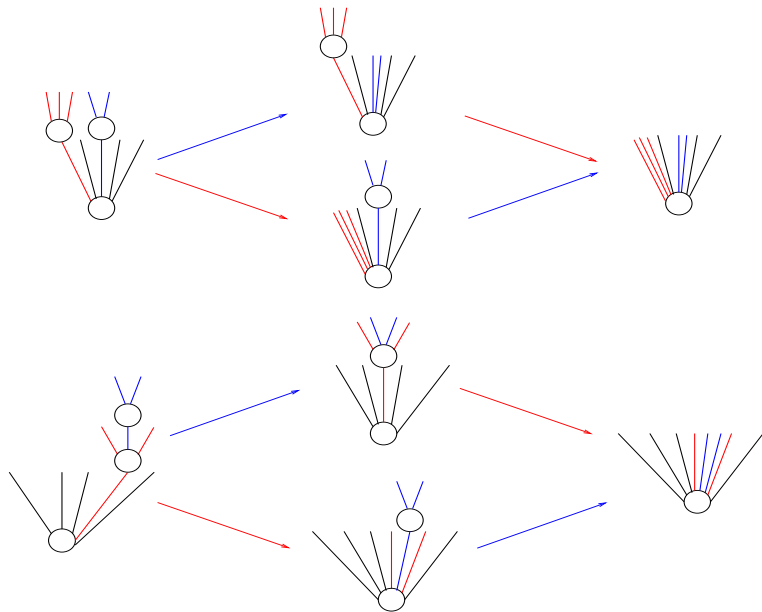
Opérade non symétrique = $(\mathcal{P}(n))_{n \in \mathbb{N}}$

- $1 \in \mathcal{P}(1)$,
- compositions pour $1 \leq i \leq n$,

$$\circ_i : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m) \rightarrow \mathcal{P}(n + m - 1)$$



Axiomes



Exemples d'opérades

- ⇒ "L'opérade non symétrique terminale" : $\mathcal{A}(n) = \star_n$ $\star_i \circ_k \star_j = \star_{i+j}$
⇒ Le groupe symétrique: $\mathcal{P}(n) = S_n$

$$\sigma = (2, \boxed{3}, 1, 4) \quad \tau = (2, 3, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma \circ_2 \tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (2, 4, 5, 3, 1, 6)$$

Définition

Opérade = $(\mathcal{P}(n))_{n \in \mathbb{N}}$

- action de S_n sur $\mathcal{P}(n)$,
- opérade non symétrique

Axiome d'équivariance s'écrit

$$(p \cdot \sigma) \circ_i (q \cdot \tau) = (p \circ_{\sigma(i)} q) \cdot (\sigma \circ_i \tau).$$

Définition

Opérade = $(\mathcal{P}(n))_{n \in \mathbb{N}}$

- action de S_n sur $\mathcal{P}(n)$,
- opérade non symétrique

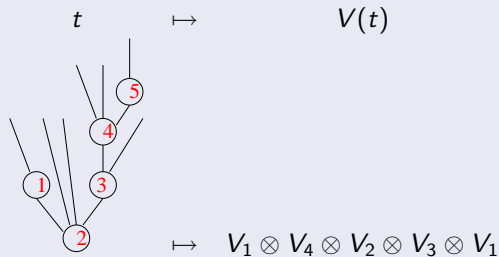
Axiome d'équivariance s'écrit

$$(p \cdot \sigma) \circ_i (q \cdot \tau) = (p \circ_{\sigma(i)} q) \cdot (\sigma \circ_i \tau).$$

$$\{\text{Opérades}\} \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{S}} \\ \xrightarrow{\mathcal{O}} \end{array} \{\text{Opérades non symétriques}\}$$

$$\mathcal{A}s = \mathcal{S}(\mathcal{A}) = (\mathbf{k}[S_n])_{n \in \mathbb{N}}$$

$$V = (V_n)_{n \in \mathbb{N}} \in grVect$$

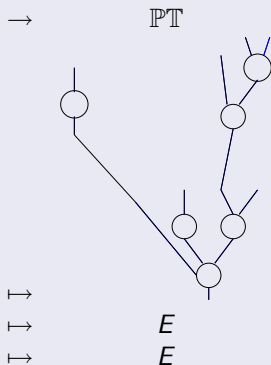
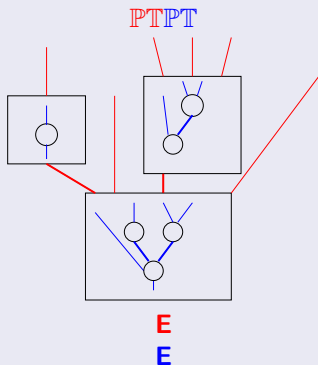


$$\mathbb{PT}(V) = (\oplus_{n\text{-arbres } t} V(t))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Monade $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ $\mu : T^2 \rightarrow T$ $\eta : I \rightarrow T$

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{\mu T} & T^2 \\ T\mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\eta T} & T^2 \\ T\eta \downarrow & \searrow Id & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$



Définition (Opéade non symétrique = Algèbre (module) sur \mathbb{PT})

$$m_P : \mathbb{PT}(P) \rightarrow P$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{PT}\mathbb{PT}(P) & \xrightarrow{\mu^P} & \mathbb{PT}(P) \\ \mathbb{PT}m_P \downarrow & & \downarrow m_P \\ \mathbb{PT}(P) & \xrightarrow{m_P} & P \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\eta^P} & \mathbb{PT}(P) \\ & \searrow Id & \downarrow m_P \\ & & P \end{array}$$

Opéade non symétrique libre: $\mathbb{PT}(V)$ pour un certain V

Définition (Opéade non symétrique= Algèbre (module) sur $\mathbb{P}\mathbb{T}$)

$$m_P : \mathbb{P}\mathbb{T}(P) \rightarrow P$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\mathbb{T}\mathbb{P}\mathbb{T}(P) & \xrightarrow{\mu^P} & \mathbb{P}\mathbb{T}(P) \\ \mathbb{P}\mathbb{T}m_P \downarrow & & \downarrow m_P \\ \mathbb{P}\mathbb{T}(P) & \xrightarrow{m_P} & P \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\eta^P} & \mathbb{P}\mathbb{T}(P) \\ & \searrow \text{Id} & \downarrow m_P \\ & & P \end{array}$$

Opéade non symétrique libre: $\mathbb{P}\mathbb{T}(V)$ pour un certain V

Monade des arbres $\mathbb{T} : \mathit{SMod} \rightarrow \mathit{SMod}$

Opéade= algèbre sur \mathbb{T}

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Opérades}\} & \rightarrow & \{\text{Opérades non symétriques}\} \\ \mathcal{P} & \mapsto & \tilde{\mathcal{P}} \end{array}$$

Théorème

- L'opérade non symétrique $\widetilde{\text{Lie}}$ est libre (Salvatore-Tauraso)
- L'opérade non symétrique $\widetilde{\text{pré-Lie}}$ est libre (Bergeron-Livernet)

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Opérades}\} & \rightarrow & \{\text{Opérades non symétriques}\} \\ \mathcal{P} & \mapsto & \widetilde{\mathcal{P}} \end{array}$$

Théorème

- L'opérade non symétrique $\widetilde{\text{Lie}}$ est libre (Salvatore-Tauraso)
- L'opérade non symétrique $\widetilde{\text{pré-Lie}}$ est libre (Bergeron-Livernet)

⇒ Résolutions! Par exemple pour \mathcal{A} .

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Opérades}\} & \rightarrow & \{\text{Opérades non symétriques}\} \\ \mathcal{P} & \mapsto & \tilde{\mathcal{P}} \end{array}$$

Théorème

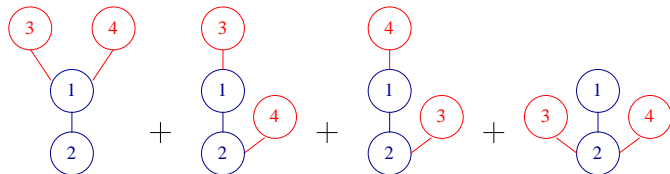
- L'opérade non symétrique $\widetilde{\text{Lie}}$ est libre (Salvatore-Tauraso)
- L'opérade non symétrique $\widetilde{\text{pré-Lie}}$ est libre (Bergeron-Livernet)

Idée de la démonstration de Salvatore-Tauraso

Une bonne base pour l'espace vectoriel $\text{Lie}(n)$ de dimension $(n-1)!$

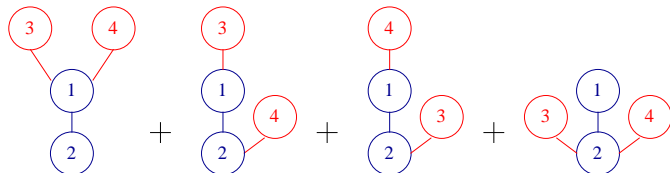
- Un crochet en x_1, \dots, x_n
- Chaque sous-crochet s'écrit avec $(x_j)_{j \in J}$. Le premier terme est $x_{\inf\{j, j \in J\}}$, le dernier est $x_{\sup\{j, j \in J\}}$.

Opérate des arbres enracinés



$$S \circ_i T = \sum_{f: \text{In}(S,i) \rightarrow \text{Vert}(T)} S \circ_i^f T.$$

Opérate des arbres enracinés

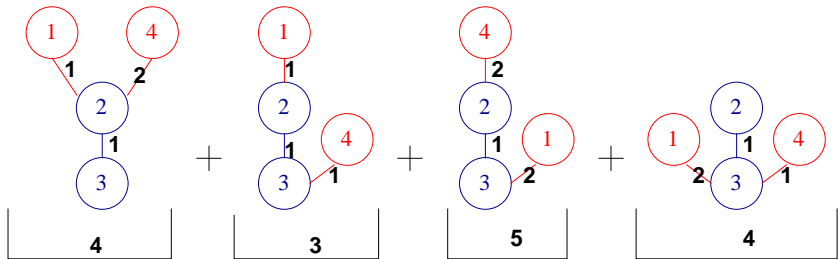
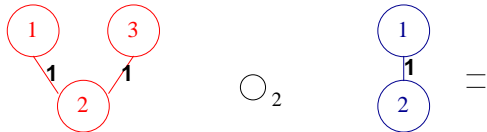


$$S \circ_i T = \sum_{f: \text{In}(S,i) \rightarrow \text{Vert}(T)} S \circ_i^f T.$$

Théorème (Chapoton-Livernet)

Les algèbres sur cette opérade sont les algèbres pré-Lie:

$$(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (x \circ z) \circ y - x \circ (y \circ z).$$



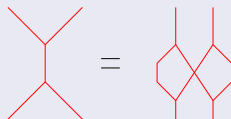
$$S \circ_i^{Max} T = S \circ_i^{f_{Max}} T.$$

Théorème (B.-L.)

L'opérade T_{Max} est une opérade non symétrique libre

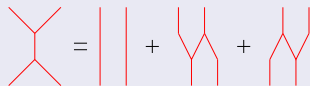
Quelques théorèmes de rigidité

Théorème (Leray-Hopf-Borel)



Les bigèbres connexes (algèbres de Hopf) commutatives et cocommutatives sont libres.

Théorème (Loday-Ronco)



Les bigèbres connexes unitaires infinitésimales sont libres

Lois distributives entre monades et comonades

D'après Mesablishvili et Wisbauer

Monade (T, m, η) ,

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{\mu T} & T^2 \\ T\mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\eta T} & T^2 \\ T\eta \downarrow & \searrow Id & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array}$$

Comonade (G, δ, ϵ) ,

$$\begin{array}{ccc} G^3 & \xleftarrow{G\delta} & G^2 \\ \delta G \uparrow & & \uparrow \delta \\ G^2 & \xleftarrow{\delta} & G \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xleftarrow{G\epsilon} & G^2 \\ \epsilon G \uparrow & \swarrow Id & \uparrow \delta \\ G^2 & \xleftarrow{\delta} & G \end{array}$$

Lois distributives entre monades et comonades

D'après Mesablishvili et Wisbauer

Monade (T, m, η) , Comonade (G, δ, ϵ) ,

Loi distributive $\lambda : TG \rightarrow GT$

$$\begin{array}{ccc}
 TG & \xrightarrow{T\delta} & TG^2 & \xrightarrow{\lambda G} & GTG & & T^2G & \xrightarrow{T\lambda} & TGT & \xrightarrow{\lambda T} & GT^2 \\
 \lambda \downarrow & & & & \downarrow G\lambda & & mG \downarrow & & & & \downarrow Gm \\
 GT & \xrightarrow{\delta T} & G^2T & & & & TG & \xrightarrow{\lambda} & GT & &
 \end{array}$$

\Rightarrow Permet de définir $C_T^G(\lambda) : (a, h_a, \theta_a)$

$$\begin{array}{ccccc}
 T(a) & \xrightarrow{h_a} & a & \xrightarrow{\theta_a} & G(a) \\
 T(\theta_a) \downarrow & & & & \uparrow G \\
 TG(a) & \xrightarrow{\lambda_a} & & & GT(a)(h_a)
 \end{array}$$

Théorème

On se place dans le cadre $T = G = H$, on note la monade $\underline{H} = (H, m, \eta)$, la comonade $\overline{H} = (H, \delta, \epsilon)$ et $\lambda : H^2 \rightarrow H^2$ la loi distributive. On suppose

$$\begin{array}{ccccc}
 H^2 & \xrightarrow{m} & H & \xrightarrow{\delta} & H^2 \\
 \downarrow H\delta & & & & \uparrow Hm \\
 H^3 & \xrightarrow{\lambda H} & & & H^3
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \text{Assure } HX \in \mathcal{C}_{\underline{H}}^{\overline{H}}(\lambda)$$

Théorème (Mesablishvili-Wisbauer)

Il y a équivalence entre

a) Le foncteur de comparaison $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\underline{H}}^{\overline{H}}(\lambda)$ est une équivalence de catégorie

b) Pour tout $(a, h_a) \in \mathcal{C}_{\underline{H}}$ la composition $H(a) \xrightarrow{\delta_a} H^2(a) \xrightarrow{H(h_a)} H(a)$ est un isomorphisme.

Traduction de bigèbres ui en termes de bimonades

$$T : Vect \rightarrow Vect, T(V) = \bigoplus_n V^{\otimes n}$$

Monade

$$TT \rightarrow T$$

$$\otimes \mapsto \otimes$$

$$\otimes \mapsto \otimes$$

Algèbre associative

Comonade

$$T \rightarrow TT$$

$$\otimes \mapsto \otimes + \otimes$$

Cogèbre coassociative

Loi distributive λ_{ui}

$$\lambda_{ui} \quad TT \rightarrow TT$$

$$\otimes \mapsto \otimes + \otimes$$

$$\otimes \mapsto \otimes$$

⇒ Théorème de Loday-Ronco

Cas des opérades non symétriques

$$\mathbb{P}\mathbb{T} : grVect \rightarrow grVect, \mathbb{P}\mathbb{T}(V) = \left(\bigoplus_{n-\text{arbres } t} V(t) \right)_n$$

Monade

$$\mathbb{P}\mathbb{T}\mathbb{P}\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{T}$$

$$\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E}$$

Opérade non sym.

Comonade

$$\mathbb{P}\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{T}\mathbb{P}\mathbb{T}$$

$$\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E} + \mathbf{E}$$

Coopérade non sym

Loi distributive

$$\mathbb{P}\mathbb{T}\mathbb{P}\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{T}\mathbb{P}\mathbb{T}$$

$$\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E} + \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E}$$

Cas des opérades non symétriques

$$\mathbb{P}\mathbb{T} : \mathit{grVect} \rightarrow \mathit{grVect}, \mathbb{P}\mathbb{T}(V) = \left(\bigoplus_{n-\text{arbres}} {}_t V(t)\right)_n$$

Monade

$$\mathbb{P}\mathbb{T}\mathbb{P}\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{T}$$

$$\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E}$$

Opérade non sym.

Comonade

$$\mathbb{P}\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{T}\mathbb{P}\mathbb{T}$$

$$\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E} + \mathbf{E}$$

Coopérade non sym

Loi distributive

$$\mathbb{P}\mathbb{T}\mathbb{P}\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{T}\mathbb{P}\mathbb{T}$$

$$\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E} + \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E}$$

Théorème (L.)

Il y a équivalence de catégorie entre grVect et les bigèbres sur cette bimonade. Autrement dit, toute opérade non symétrique qui est une bigèbre sur cette bimonade est libre.