

Homotopie rationnelle des algèbres de Leibniz

Muriel LIVERNET

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis-Pasteur et CNRS,
7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.
E-mail : livernet@math.u-strasbg.fr

Résumé. La théorie de l'homotopie rationnelle met en dualité les algèbres de Lie et les algèbres commutatives. Dans cette Note, cette théorie est étendue au cadre non commutatif en remplaçant les algèbres de Lie par les algèbres de Leibniz. Les algèbres commutatives sont alors remplacées par les algèbres de Leibniz-dual. Ainsi, nous pouvons définir l'homotopie et l'homologie d'une algèbre de Leibniz. Nous obtenons une version non commutative du théorème d'Hurewicz. Nous définissons les sphères de Leibniz et nous montrons que leur homotopie est périodique.

Rational homotopy of Leibniz algebras

Abstract. *Rational homotopy theory makes Lie algebras and commutative algebras dual to each other. In this Note, we extend this theory to the framework of Leibniz algebras. Leibniz dual algebras replace commutative algebras. We are thus able to define the homotopy and the homology of a Leibniz algebra. We state a Leibniz version of Hurewicz theorem. We define Leibniz spheres and prove that their homotopy is periodic.*

Abridged English Version

Throughout this Note, we work over a fixed field K of characteristic 0. Let V be a graded vector space. The suspension of V is $(sV)_n = V_{n-1}$ if V is lower graded, and $(sV)^n = V^{n+1}$ if V is upper graded.

Leibniz algebras and dual Leibniz algebras. – A graded Leibniz algebra L is a lower graded vector space equipped with a bracket of degree 0 which satisfies the identity

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - (-1)^{|y||z|} [[x, z], y], \quad \forall x, y, z \in L.$$

A differential graded Leibniz algebra is a graded Leibniz algebra together with a derivation of Leibniz algebras ∂ such that $\partial^2 = 0$. There is an obvious notion of differential graded Leibniz coalgebra.

Koszul duality for operads (see [1]) states the existence of a dual notion for Leibniz algebras. A graded dual Leibniz algebra M is an upper graded vector space equipped with a product of degree 0 which satisfies the identity

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) + (-1)^{|y||z|} x \cdot (z \cdot y), \quad \forall x, y, z \in M.$$

Note présentée par Jean-Louis KOSZUL.

Once again we can define *differential graded dual Leibniz algebra* and *dual Leibniz coalgebra*.

Let V be a graded vector space. We denote by $\bar{T}(V)$ the vector space $V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus V^{\otimes n} \oplus \dots$. This object is in fact the underlying vector space of the free graded Leibniz (resp. dual Leibniz) algebra generated by V , or the free graded dual Leibniz coalgebra generated by V if $V_0 = 0$.

Homotopy and homology of Leibniz algebras. – Let (L, ∂) be a differential graded Leibniz algebra. We define $\mathcal{L}^!(L, \partial)$ as the free dual Leibniz coalgebra generated by sL together with the differential $d = d_1 + d_2$ where d_1 is linear and d_2 is quadratic. The differential d_1 is induced by ∂ and the differential d_2 is defined by:

$$d_2(sx_1 \otimes \dots \otimes sx_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \pm sx_1 \otimes \dots \otimes s[x_i, x_j] \otimes \dots \otimes sx_n \text{ (see 2.1 for the sign).}$$

If L is finite dimensional (that is L is finite dimensional in each degree), we define $\mathcal{L}_f^!(L, \partial)$ as the linear dual of $\mathcal{L}^!(L, \partial)$.

The *homotopy* of L , denoted by $\pi\lambda(L)$, is the homology of the complex (sL, ∂) . The *homology* of L , denoted by $H\lambda(L)$, is the graded dual Leibniz coalgebra $H_*(\mathcal{L}_f^!(L), d)$. We have extended the definition of [3] to the case of differential graded Leibniz algebras. If L is finite dimensional, the *cohomology* of L is the graded vector space $H^*(\mathcal{L}_f^!(L))$. Actually, the homotopy of L can be regarded as the homology of the first column of a bicomplex whereas the homology of L is the homology of the total complex associated with the same bicomplex. Thus, there is a natural morphism from the homotopy to the homology of L called the *Hurewicz morphism*.

THEOREM 1. – *Let (L, ∂) be a differential graded Leibniz algebra. Assume that $\pi\lambda_k(L) = 0$ for $k \leq n$. The Hurewicz morphism is an isomorphism in degrees $k \leq 2n$, and an epimorphism in degree $2n + 1$.*

Spheres. – In classical algebraic topology, it is well known that a rational space whose cohomology is the same as the cohomology of a sphere has the same homotopy type. We state an analogous result in the context of Leibniz algebras. The *Leibniz sphere of degree n* , denoted by $\mathbb{S}\lambda^n$, is the free graded Leibniz algebra $\bar{T}(Ky_n)$, where y_n is a generator in degree $n - 1$, together with the differential 0.

THEOREM 2. – *The cohomology of $\mathbb{S}\lambda^n$ is trivial except in degree n where it is equal to K . The homotopy of $\mathbb{S}\lambda^n$ is trivial except in degrees $k(n - 1) + 1$, $k \geq 1$, where it is equal to K . Moreover, any Leibniz algebra whose cohomology is the same as the cohomology of $\mathbb{S}\lambda^n$ has the same homotopy type.*

We would like to compare Leibniz spheres with the classical ones. There is a canonical graded Lie algebra associated to any graded Leibniz algebra L : we take the quotient by the ideal generated by $[x, y] + (-1)^{|x||y|}[y, x]$, $\forall x, y \in L$ (see [2]).

THEOREM 3. – *The Lie algebra associated with $\mathbb{S}\lambda^n$ is the Quillen model of the classical sphere \mathbb{S}^n .*

A Lie algebra can be regarded as a Leibniz algebra by forgetting the antisymmetric relation. The Quillen model of the classical sphere, which we denote by \mathbb{S}^n as well, is a Lie algebra. We have obviously $\pi\lambda(\mathbb{S}^n) = \pi(\mathbb{S}^n)$. The Leibniz homology of the classical sphere is computed in the next theorem.

THEOREM 4. – *The Leibniz homology of \mathbb{S}^n is periodic. If n is odd, $H\lambda(\mathbb{S}^n)$ is trivial except in degrees kn , $k \geq 1$, where it is equal to K . If n is even, $H\lambda(\mathbb{S}^n)$ is trivial except in degrees $n + k(3n - 1)$, $k \geq 0$, and $k(3n - 1)$, $k \geq 1$, where it is equal to K .*

Dans cette Note, le corps de base, noté K , est de caractéristique 0. La suspension de l'espace vectoriel gradué V est définie par $(sV)_n = V_{n-1}$ si l'espace est gradué inférieurement, et par $(sV)^n = V^{n+1}$ s'il est gradué supérieurement.

1. Homotopie des algèbres de Leibniz

Dans cette section, la théorie de l'homotopie rationnelle (voir par exemple [4], [5] et [6]) est adaptée aux algèbres de Leibniz (voir [2] et [3]).

1.1. *Algèbres de Leibniz.* – Une *algèbre de Leibniz graduée* L est un espace vectoriel gradué inférieurement muni d'un crochet de degré 0 vérifiant, pour tous $x, y, z \in L$,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - (-1)^{|y||z|} [[x, z], y].$$

On dit que L est une *algèbre différentielle* si elle est munie d'une application ∂ de degré -1 qui est une dérivation d'algèbre de Leibniz par rapport au crochet et qui vérifie $\partial^2 = 0$. Par dualité, on définit la notion de *cogèbre de Leibniz*.

1.2. *Algèbres de Leibniz-dual.* – La théorie de la dualité de Koszul des opérades (voir [1]) nous permet de calculer le dual (au sens de Koszul) des algèbres de Leibniz. Une *algèbre de Leibniz-dual* M est un espace vectoriel gradué supérieurement muni d'une multiplication de degré 0 vérifiant, pour tous $x, y, z \in M$,

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) + (-1)^{|y||z|} x \cdot (z \cdot y).$$

Les notions d'*algèbre de Leibniz-dual différentielle graduée* et de *cogèbre de Leibniz-dual* sont définies de la même manière que précédemment.

1.3. *Objets libres.* – Soit V un espace vectoriel gradué. L'espace vectoriel $V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus V^{\otimes n} \oplus \dots$ est noté $\bar{T}(V)$. Cet espace vectoriel peut être muni de diverses structures algébriques de telle manière qu'il devienne le sous-espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre de Leibniz (resp. Leibniz-dual) libre sur V , ou à la cogèbre de Leibniz-dual colibre sur V si $V_0 = 0$.

Nous allons définir des foncteurs reliant les algèbres de Leibniz et les cogèbres (resp. algèbres) de Leibniz-dual connexes, analogues aux foncteurs définis par Quillen (voir [4]) dans le cadre des algèbres de Lie.

1.4. *Foncteurs \mathcal{L} et $\mathcal{L}^!$.* – Soit (L, ∂) une algèbre de Leibniz différentielle graduée. On définit $\mathcal{L}^!(L, \partial)$ comme la cogèbre de Leibniz-dual graduée colibre sur sL dont la différentielle d est somme d'une différentielle linéaire d_1 induite par ∂ , et d'une différentielle quadratique d_2 (voir 2.1).

Soit (B, d) une cogèbre de Leibniz-dual différentielle graduée connexe. On définit $\mathcal{L}(B, d)$ comme l'algèbre de Leibniz graduée libre sur $s^{-1}B$ dont la différentielle ∂ est somme d'une différentielle linéaire ∂_1 induite par d , et d'une différentielle quadratique ∂_2 .

Si, de plus, les algèbres et les cogèbres sont de type fini (de dimension finie en chaque degré), on peut définir, par composition des foncteurs $\mathcal{L}^!$ et \mathcal{L} avec le dual linéaire, les foncteurs

$$\mathcal{L}_f^! : \{\text{algèbres de Leibniz}\} \longleftrightarrow \{\text{algèbres de Leibniz-dual connexes}\} : \mathcal{L}_f.$$

1.5. PROPOSITION. – *Les foncteurs \mathcal{L} et $\mathcal{L}^!$ préservent les équivalences faibles. Le foncteur \mathcal{L} est adjoint à gauche de $\mathcal{L}^!$, et le morphisme d'adjonction $\mathcal{L}(\mathcal{L}^!(L, \partial)) \rightarrow (L, \partial)$ est une équivalence faible, pour (L, ∂) algèbre de Leibniz. Les mêmes résultats sont valables pour les foncteurs \mathcal{L}_f et $\mathcal{L}_f^!$ si les algèbres sont de type fini.*

1.6. *Modèles minimaux.* – Une algèbre de Leibniz-dual différentielle graduée est *minimale* si elle est librement engendrée par un espace vectoriel V tel que $V^0 = V^1 = 0$, et si sa différentielle d vérifie $d(V) \subset \bar{T}(V) \cdot \bar{T}(V)$. Soit (M, d) une algèbre de Leibniz-dual différentielle graduée. Un *modèle minimal* de (M, d) est une algèbre de Leibniz-dual différentielle graduée minimale (M', d') munie d'une équivalence faible $\phi : (M', d') \rightarrow (M, d)$.

1.7. THÉORÈME. – Toute algèbre de Leibniz-dual différentielle graduée telle que $H^0 = 0$ et $H^1 = 0$ possède un modèle minimal unique à isomorphisme près.

1.8. Homotopie et homologie des algèbres de Leibniz. – Soit (L, ∂) une algèbre de Leibniz différentielle graduée. On appelle *homotopie* de L , que l'on note $\pi\lambda$, l'espace vectoriel gradué $\pi\lambda_*(L) = H_*(sL, \partial)$. L'*homologie* de L , notée $H\lambda$, est la cogèbre de Leibniz-dual graduée $H\lambda_*(L) = H_*(\mathcal{L}^!(L, \partial))$. C'est la définition de l'homologie d'une algèbre de Leibniz définie dans [3], étendue au cas différentiel gradué. On appelle *cohomologie* de L l'algèbre de Leibniz-dual graduée $H\lambda^*(L) = H^*(\mathcal{L}_f^!(L, \partial))$. Remarquons que dans le cas d'une algèbre de Leibniz graduée de type fini connexe $H\lambda^*(L) = \text{Hom}(H\lambda_*(L), K)$.

Le théorème suivant montre que l'on peut calculer l'homotopie d'une algèbre de Leibniz L à partir du modèle minimal de $\mathcal{L}_f^!(L)$.

1.9. THÉORÈME. – Soit (L, ∂) une algèbre de Leibniz différentielle graduée de type fini connexe et $(\bar{T}(V), d)$ le modèle minimal de $\mathcal{L}_f^!(L)$. Alors, pour tout $n \geq 2$,

$$V^n = \text{Hom}(\pi\lambda_n(L), K).$$

2. Théorème d'Hurewicz

Les notions définies auparavant nous permettent d'énoncer un théorème analogue au théorème d'Hurewicz classique.

2.1. Morphisme d'Hurewicz. – Soit (L, ∂) une algèbre de Leibniz différentielle graduée. Le bicomplexe $C_{p,q}$ défini par $C_{p,q} = (sL^{\otimes p+1})_{p+q}$, pour tous $p, q \geq 0$, et muni des différentielles $d_1 : C_{p,q} \rightarrow C_{p,q-1}$ et $d_2 : C_{p,q} \rightarrow C_{p-1,q}$ données par :

$$d_1(sx_1 \otimes \cdots \otimes sx_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{u_i} sx_1 \otimes \cdots \otimes s\partial x_i \otimes \cdots \otimes sx_n,$$

où $u_i = 1 + \sum_{k=1}^{i-1} |sx_k|$, et

$$d_2(sx_1 \otimes \cdots \otimes sx_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{t_{i,j}} sx_1 \otimes \cdots \otimes s[x_i, x_j] \otimes \cdots \otimes sx_n,$$

où $t_{i,j} = \sum_{k=1}^i |sx_k| + |sx_j| + (\sum_{k=i+1}^{j-1} |sx_k|)$,

vérifie $(\pi\lambda)_n(L) = H_n(C_{0,*}, \partial)$, $(H\lambda)_n(L) = H_n((\text{Tot } C_{p,q})_*, d = d_1 + d_2)$.

L'injection de complexes $(C_{0,*}, \partial) \rightarrow ((\text{Tot } C_{p,q})_*, d)$ induit une application $\phi\lambda : \pi\lambda \rightarrow H\lambda$ qui est appelée *morphisme d'Hurewicz*.

2.2. THÉORÈME. – Soit (L, ∂) une algèbre de Leibniz différentielle graduée. Supposons que $\pi\lambda_k(L) = 0$ pour tout $k \leq n$. Alors le morphisme d'Hurewicz $\phi\lambda_k$ est un isomorphisme pour tout $k \leq 2n$, et un épimorphisme pour $k = 2n + 1$. Réciproquement, si $\pi\lambda_1(L) = 0$ et $H\lambda_k(L) = 0$ pour $k \leq n$, alors $\phi\lambda_k$ est un isomorphisme pour tout $k \leq 2n$, et un épimorphisme pour $k = 2n + 1$.

2.3. Remarque. – Ce théorème est une version plus forte que le théorème classique, puisque l'isomorphisme est valable pour tout $k \leq 2n$.

3. Sphères de Leibniz et sphères classiques

En topologie algébrique classique, il est bien connu qu'un espace rationnel ayant la même cohomologie qu'une sphère a en fait le même type d'homotopie qu'une sphère. Nous établissons

ce résultat pour les algèbres de Leibniz et montrons que l'homotopie d'une sphère de Leibniz est périodique.

3.1. *Sphères de Leibniz.* – Pour $n \geq 2$, on appelle n -ième sphère de Leibniz, notée $\mathbb{S}\lambda^n$, l'algèbre de Leibniz graduée libre $\overline{T}(Ky_n)$, où $|y_n| = n - 1$, que l'on munit de la différentielle nulle.

3.2. THÉORÈME. – *La cohomologie de la n -ième sphère de Leibniz $H\lambda^j(\mathbb{S}\lambda^n)$ est nulle sauf pour $j = n$, où elle vaut K . L'homotopie de la n -ième sphère de Leibniz $\pi\lambda_j(\mathbb{S}\lambda^n)$ est nulle sauf pour $j = k(n - 1) + 1$, $k \geq 1$, où elle vaut K . De plus, toute algèbre de Leibniz différentielle graduée ayant même cohomologie que $\mathbb{S}\lambda^n$, en a aussi le même type d'homotopie.*

3.3. *Comparaison des sphères de Leibniz et des sphères classiques.* – À toute algèbre de Leibniz graduée L peut être associée une algèbre de Lie L_{Lie} en quotientant par la relation $([x, y] + (-1)^{|x||y|}[y, x])$ (voir [2]). Le théorème 3.4 compare $\mathbb{S}\lambda_{\text{Lie}}^n$ et \mathbb{S}^n . Le modèle de Quillen de la sphère \mathbb{S}^n est une algèbre de Lie, c'est a fortiori une algèbre de Leibniz. Il est alors immédiat que $\pi\lambda(\mathbb{S}^n) = \pi(\mathbb{S}^n)$. Nous calculons l'homologie de Leibniz de la sphère \mathbb{S}^n (théorème 3.5).

3.4. THÉORÈME. – *Soit $\mathbb{S}\lambda^n$ la sphère de Leibniz de dimension n . Alors $(\mathbb{S}\lambda^n)_{\text{Lie}}$ est le modèle de Quillen de la sphère \mathbb{S}^n .*

3.5. THÉORÈME. – *L'homologie de Leibniz des sphères \mathbb{S}^n , $n \geq 2$, est périodique de période n si n est impair, et de période $3n - 1$ si n est pair. Plus précisément, on a :*

- a) *Si n est impair, alors $H\lambda_i(\mathbb{S}^n) \simeq K$ pour $i = kn$, $k \geq 1$, et vaut 0 sinon.*
- b) *Si n est pair, alors $H\lambda_i(\mathbb{S}^n) \simeq K$ pour $i = n + k(3n - 1)$, $k \geq 0$, ou pour $i = k(3n - 1)$, $k \geq 1$, et vaut 0 sinon.*

Note remise le 26 juillet 1997, acceptée le 1^{er} septembre 1997.

Références bibliographiques

- [1] Ginzburg V. et Kapranov M., 1994. Koszul duality for operads, *Duke J. Math.*, 76, p. 203-272.
- [2] Loday J.-L., 1993. Une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz, *Ens. math.*, 39, no 3-4, p. 269-293.
- [3] Loday J.-L. 1995. Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras, *Math. Scand.*, 77, p. 189-196.
- [4] Quillen D., 1969. Rational Homotopy theory, *Ann. Math.*, 90, t. 2, p. 205-295.
- [5] Sullivan D., 1977. Infinitesimal computations in Topology, *Publ. I.H.E.S.*, 47, p. 269-331.
- [6] Tanré D., 1980. Homotopie rationnelle : Modèles de Chen, Quillen, Sullivan. Springer, Lecture Notes in Math. 1025.