UNIVERSITÉ PARIS 13

SYNTHÈSE DE TRAVAUX PRÉSENTÉS POUR OBTENIR LE DIPLÔME

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

MURIEL LIVERNET

Opérades, algèbres sur une opérade et algèbres pré-Lie

Rapporteurs : M. Clemens BERGER
M. Ieke MOERDIJK
Mme Micheline VIGUÉ

Habilitation soutenue le 28 Juin 2007

Jury : M. Clemens BERGER
M. Larry BREEN
M. Bernhard KELLER
M. Jean-Louis LODAY
M. Ieke MOERDIJK
M. Bob OLIVER
Mme Micheline VIGUÉ

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539,
Institut Galilée, Université Paris 13.

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier chaleureusement Micheline Vigué d'avoir accepté de présenter mon mémoire d'habilitation à diriger les recherches. Je tiens également à la remercier de m'avoir soutenue depuis que je suis arrivée dans son bureau au LAGA, conseillée, et tout simplement supportée tout ce temps. Qu'elle trouve ici l'expression de toute ma sympathie. C'est avec plaisir que je remercie Clemens Berger et Ieke Moerdijk d'avoir accepté d'être mes rapporteurs pour ce mémoire. Mes derniers travaux ont nettement bénéficié des conversions que nous avons eues l'année passée au Mittag-Leffler. Je remercie Bernhard Keller d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Les groupes de travail que nous avons partagés constituent une part importante dans ma réflexion mathématique. Je remercie mon directeur de thèse Jean-Louis Loday d'avoir accepté de faire partie de mon jury et de m'avoir initiée à la recherche et aux opérades. Il est pour moi une figure très importante dans mon univers mathématique.

Merci à Larry Breen et Bob Oliver d'avoir accepté d'être les membres internes de mon jury. A travers ces deux représentants je tiens à remercier chaudement toute l'équipe de topologie algébrique et tous les membres du laboratoire pour l'ambiance qui y règne. J'apprécie énormément mon travail à Paris 13, tant au niveau de l'enseignement que de la recherche. J'ai apprécié à mon arrivée la place et l'écoute faites aux jeunes, le soutien du laboratoire par rapport à mes projets. C'est un réel plaisir de travailler ici et de côtoyer mes collègues. Merci à tous!

Ce mémoire n'aurait certainement pas vu le jour sans mes collaborateurs. Merci à Marcelo Aguiar, Frédéric Chapoton, David Chataur, Ralph Kaufmann, Frédéric Patras, Bob Penner.

Enfin, c'est dans le soutien et l'animation familiale que je puise mes ressources et mon énergie. Merci à Yann, Jérémie et Colin de partager ma vie.

Introduction

Mon travail de recherche se place dans le cadre de la théorie des opérades et de ses applications à la topologie algébrique et à la combinatoire algébrique. Dans un premier temps j'explique en quoi la théorie des opérades intervient dans des thématiques variées et dans un deuxième temps je présente mes travaux et la structure du mémoire.

Que ce soit en algèbre ou en topologie algébrique, la théorie des opérades est un outil qui permet, grosso modo, de reconnaître des objets. Plus précisément, l'action d'une opérade sur un objet caractérise ce type d'objet. Par exemple dans les années 60, l'opérade des n-petits cubes $\mathcal{C}_n$ a été introduite en topologie algébrique dans le but de reconnaître les espaces de lacets n-itérés. C'est ce que l'on appelle le "principe de reconnaissance": tout espace topologique muni d'une action de l'opérade C_n a le type d'homotopie d'un espace de lacet n-itéré. Depuis les années 90 et les travaux de Ginzburg et Kapranov, les opérades sont utilisées abondament en algèbre: à un "type d'algèbre" donné $\mathcal{P}$, par exemple Lie, associatif, Poisson, ou Gerstenhaber, on peut associer une opérade telle que les algèbres sur cette opérade sont de type $\mathcal{P}$.

En théorie de l'homotopie et en physique mathématique, la théorie des opérades est un excellent cadre pour étudier les structures à homotopie près. Prenons le cas des structures $\mathcal{E}_\infty$ qui correspondent aux structures commutatives à homotopie près. Elles sont fondamentales en topologie algébrique comme le prouvent les résultats de Mandell obtenus en 2001: le type d'homotopie d'un espace topologique nilpotent et p complet est reconnu par une structure $\mathcal{E}_\infty$ sur les cochaînes de l'espace. Typiquement, on sait depuis les travaux de Steenrod que la cohomologie d'un espace est muni d'opérations dites de Steenrod qui sont importantes pour l'étude des problèmes de réalisabilité. Les structures $\mathcal{E}_\infty$ se situent en amont de ces opérations cohomologiques, car elles agissent au niveau des cochaines et codent en particulier les $\cup_i$-produits.

Les structures $\mathcal{E}_\infty$ ont montré également leur importance dans la résolution de la conjecture de Deligne: la cohomologie de Hochschild d'une algèbre associative est une algèbre de Gerstenhaber, comme l'est par ailleurs l'homologie d'un espace de lacet double. L'homologie de l'opérade des petits carrés $\mathcal{C}_2$ reconnait les algèbres de Gerstenhaber. Est-ce que le complexe calculant la cohomologie de Hochschild peut-être reconnu par une opérade quasi-isomorphe à l'opérade des chaines singulières de $\mathcal{C}_2$? Les démonstrations de McClure et Smith d'une part et de Berger et Fresse d'autre part utilisent une filtration d'une opérade $\mathcal{E}_\infty$ particulière pour répondre par l'affirmative à la question de Deligne. Les structures de Gerstenhaber sont un sujet d'étude en soi, particulièrement adapté à la topologie des cordes de Chas-Sullivan. En fait ce sont les structures plus précises de Batalin-Vilkovisky qui sont en jeu. Ces dernières sont reconnues par l'opérade des cactus de Voronov.

Les algèbres de Lie à homotopie près sont aussi couvertes par la théorie des opérades et ont montré leur importance en physique mathématique. Le théorème de formalité de Kontsevich en est une preuve. Sa démosntration par Tamarkin utilise la théorie des opérades et la notion plus fine de G_∞-algèbre, algèbre de Gerstenhaber à homotopie près.

Dans un autre domaine, la théorie des opérades permet d'unifier certains théorèmes de structure. Par exemple Fresse a montré en 1998 que les cogroupes dans la catégorie des algèbres sur une opérade sont des algèbres libres, généralisant ainsi le théorème de Leray pour les algèbres commutatives et de Berstein pour les algèbres associatives. On peut également citer comme théorèmes de structure les théorèmes de Cartier-Milnor-Moore et Poincaré-Birkoff-Witt, pour les algèbres de Hopf cocommutatives. Dans les dix dernières années, de nombreux mathématiciens se sont penchés sur ces problèmes dont un des protagonistes est Loday. La combinatoire algébrique est une mine d'exemples d'algèbres de Hopf, appelées souvent algèbres de Hopf combinatoires. Beaucoup de structures supplémentaires et de théorèmes de rigidité (liberté, coliberté de telles algèbres de Hopf) ont été démontrés. Citons par exemple les travaux de Aguiar, Bergeron, Chapoton, Foissy, Malvenuto, Novelli, Reutenauer, Ronco, Sottile, Thibon, Zabrocki. Comme je vais l'expliquer par la suite, les opérades jouent un rôle important dans la démonstration de ces théorèmes.

Ce mémoire décrit les résultats de ma recherche durant la période 2001-2006, et s'insère dans la théorie des opérades et ses applications. Il comporte quatre parties.

Dans la première partie j'expose les notions dont j'aurai besoin pour la suite.

La deuxième partie est consacrée aux algèbres pré-Lie, qui sont au centre de mon travail. En effet, les structures que j'étudie en topologie algébrique dans la partie 3 sont liées aux algèbres pré-Lie de même que les questions de rigidité de la partie 4. Cette partie est décomposée en trois sections:

2.1– La première section correspond à l'article en commun avec F. Chapoton [1]. Nous présentons l'opérade décrivant les algèbres pré-Lie et montrons que c'est une opérade de Koszul. Nous montrons qu'elle est liée à l'algèbre de Hopf construite par Connes et Kreimer dans le cadre de la théorie de la renormalisation.

2.2– La deuxième section est consacrée à l'importance des algèbres pré-Lie en topologie algébrique et physique mathématique: j'explique comment la notion pré-Lie est à la jonction entre la conjecture de Deligne et les opérations de Steenrod. Cela me permet d'introduire les thématiques de la partie 3 (consacrée à la topologie algébrique).

2.3– La troisième section est consacrée au théorème de rigidité pour les algèbres pré-Lie obtenu dans l'article [2]. Cette thématique est explorée dans un cadre plus général dans la partie 4.

La troisième partie est consacrée aux applications des opérades à la topologie algébrique: j'y présente deux articles en collaboration. Le premier article est écrit avec R. Penner et R. Kaufmann [KLP03]. Nous construisons une opérade sur les espaces de Teichmüller décorés, introduits par R. Penner dans le cadre de la compactification des espaces de modules. Nous retrouvons comme sous-opérade, l'opérade des cactus qui code la structure de Gerstenhaber sur l'homologie des espaces de lacets libres d'une variété compacte orientée, obtenue par Chas et Sullivan. La structure pré-Lie intervient au niveau des chaines de l'opérade. Le deuxième article, en commun avec D. Chataur [4], est consacré aux opérations de Steenrod. Nous présentons une opérade codant les opérations de Steenrod via les $\cup_i$-produits, ainsi que les relations d'Adem et de Cartan. C'est en quelque sorte la plus petite opérade qui code ces relations: cela nous permet de retrouver que l'homologie d'une algèbre sur une opérade $\mathcal{E}_\infty$ est une algèbre sur l'algèbre de Steenrod étendue, selon P. May et M. Mandell.

La quatrième et dernière partie est liée aux théorèmes de structure des algèbres sur une opérade et aux applications en combinatoire algébrique. Cette partie est indépendante des autres et a une introduction propre. Le but est d'étudier le foncteur oubli de la catégorie des $\mathbb{S}$-modules (familles de S_n-modules) dans la catégorie des espaces vectoriels gradués d'un point de vue opéradique. Cette étude soigneuse permet de donner une explication opéradique des théorèmes de rigidité dans le cadre des algèbres de Hopf combinatoires. Cette partie est le résultat des travaux [6] ansi que des travaux en commun avec F. Patras [5] et avec M. Aguiar [7].

J'ai choisi de présenter deux bibliographies distinctes. La première, numérotée et présente ci-dessous est la bilbiographie de mes travaux exposés dans ce mémoire. La deuxième est à la fin du mémoire et réfère tous les autres articles cités.

Bibliographie

[1] Frédéric Chapoton et Muriel Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Internat. Math. Res. Notices (2001), no. 8, 395–408.

[2] Muriel Livernet, *A rigidity theorem for pre-Lie algebras*, J. Pure Appl. Algebra **207** (2006), no. 1, 1–18.

[3] Ralph M. Kaufmann, Muriel Livernet, et R. C. Penner, *Arc operads and arc algebras*, Geom. Topol. **7** (2003), 511–568 (electronic).

[4] David Chataur et Muriel Livernet, *Adem-Cartan operads*, Comm. Algebra **33** (2005), no. 11, 4337–4360.

[5] Muriel Livernet et Frédéric Patras, *Lie theory for Hopf operads*, math.RA/0606329, 2006, 23 pages.

[6] Muriel Livernet, *From left modules to algebras over an operad: application to combinatorial hopf algebras*, math.RA/0606427, 2006, 41 pages.

[7] Marcelo Aguiar et Muriel Livernet, *The associative operad and the weak order on the symmetric group*, 26 pages, à paraitre dans JHRS.

Table des matières

Notations. On considère un corps de base $\mathbf{k}$ et en règle générale les espaces vectoriels seront pris sur $\mathbf{k}$. L'ensemble $\{1, \dots, n\}$ est noté $[n]$. Pour tout ensemble d'entiers S et tout entier p l'ensemble $p + S$ est $\{p + s, s \in S\}$. Une permutation σ de S_n est notée $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$

1. Introduction aux opérades

On se donne une catégorie monoidale symétrique $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, par exemple la catégorie des ensembles, des espaces topologiques, des espaces vectoriels éventuellement gradués ou différentiels gradués, des $\mathbb{Z}$-modules.

1.1. **$\mathbb{S}$-modules.** Un $\mathbb{S}$-*module* est une famille $M = (M(n))_{n\geq 0}$ d'objets de $\mathcal{C}$ où $M(n)$ est muni d'une action du groupe symétrique S_n à droite. *L'arité* d'un élément de $M(n)$ est l'entier n.

1.2. **Opérades.** Une *opérade* dans la catégorie $\mathcal{C}$ est un $\mathbb{S}$-module $\mathcal{P} = (\mathcal{P}(n))_{n\geq 0}$ muni d'applications pour tous entiers $n, i_1, \dots, i_n$, appelées applications de composition,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(n)\otimes\mathcal{P}(i_1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}(i_n) & \longrightarrow & \mathcal{P}(i_1+\ldots+i_n) \\ p\otimes q_1\otimes\ldots\otimes q_n & \mapsto & p(q_1,\ldots,q_n), \end{array}$$

et muni d'un élément $1\in\mathcal{P}(1)$ appelé *unité*. De plus, les applications de composition doivent satisfaire les conditions d'associativité, d'unité et d'équivariance par rapport au groupe symétrique qui sont les suivantes:

- *Associativité:* pour tous $p\in\mathcal{P}(n), q_j\in\mathcal{P}(l_j), a_i\in\mathcal{P}$, en posant $r=\sum l_j$ on a

$$p(q_1,\ldots,q_n)(a_1,\ldots,a_r) = \\ p(q_1(a_1,\ldots,a_{l_1}),\ldots,q_n(a_{l_1+\ldots+l_{n-1}+1},\ldots,a_r)) \quad (1)$$

- *Unité:* pour tout $p\in\mathcal{P}(n)$ on a $p(1,\ldots,1)=p$ et $1(p)=p$.
- *Equivariance:* pour tous $p\in\mathcal{P}(n), q_j\in\mathcal{P}(l_j), \tau_j\in S_{l_j}, \sigma\in S_n$:

$$p(q_1\cdot\tau_1,\ldots,q_n\cdot\tau_n) = p(q_1,\ldots,q_n)\cdot(\tau_1\times\ldots\times\tau_n) \quad (2)$$

$$(p\cdot\sigma)(q_1,\ldots,q_n) = p(q_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,q_{\sigma^{-1}(n)})\cdot\sigma(l_1,\ldots,l_n), \quad (3)$$

  où $\tau_1\times\ldots\times\tau_n\in S_{l_1+\ldots+l_n}$ est la permutation qui fait agir τ_1 sur les l_1 premiers termes, τ_2 sur les l_2 termes suivants, etc... La permutation $\sigma(l_1,\ldots,l_n)\in S_{l_1+\ldots+l_n}$ est obtenue en remplaçant $\sigma(j)$ par le bloc id_{l_j}. On a

$$\sigma(l_1,\ldots,l_n)=(B_1,\ldots,B_n)$$

  où $B_j=l_{\sigma^{-1}(1)}+\ldots+l_{\sigma^{-1}(\sigma(j)-1)}+[l_j]$. Par exemple

$$(2,3,1)(a,b,c)=(c+1,\ldots,c+a,c+a+1,\ldots,c+a+b,1,\ldots,c).$$

Les opérations de composition sont engendrées par les compositions suivante: pour $p\in\mathcal{P}(n)$ et $q\in\mathcal{P}(m)$ et pour tout $1\le i\le n$,

$$p\circ_i q=p(1,\ldots,1,q,1,\ldots,1)\in\mathcal{P}(n+m-1),$$

où q est placé à la i-ème entrée de p.

Une *opérade non symétrique* est la donnée d'une famille d'espaces vectoriels et de compositions qui satisfont les axiomes d'associativité et d'unité. Il n'y a pas d'action du groupe symétrique.

1.2.1. *Exemple fondamental.* Pour tout objet A de $\mathcal{C}$, on définit l'opérade End_A par $\mathrm{End}_A(n)=\mathrm{Mor}(A^{\otimes n},A)$. Les opérations $\circ_i$ sont données par

$$(f\circ_i g)(a_1,\ldots,a_{n+m-1}) = \\ f(a_1,\ldots,a_{i-1},g(a_i,\ldots,a_{i+m-1}),a_{i+m},\ldots,a_{n+m-1}).$$

L'élément unité est l'identité de A et l'action du groupe symétrique se fait par permutation des variables.

1.2.2. *Algèbre sur une opérade.* Plus généralement pour une opérade $\mathcal{P}$, l'objet $\mathcal{P}(n)$ peut être vu comme l'espace de toutes les opérations que l'on peut faire sur n variables. Par définition une *algèbre* sur une opérade $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{P}$*-algèbre* est un objet A de $\mathcal{C}$ muni d'applications d'évaluation pour tout n

$$\begin{array}{cccc} ev_n : & \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} & \to & A \\ & p \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n & \mapsto & p(a_1, \ldots, a_n), \end{array}$$

qui satisfont les conditions d'associativité, d'unité et d'équivariance par rapport au groupe symétrique. La condition d'associativité est donnée par la relation (1) où les a_i sont pris dans A. La condition d'unité s'écrit $1(a) = a$ et la condition d'équivariance s'écrit

$$(p \cdot \sigma)(a_1, \ldots, a_n) = p(a_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(n)}).$$

On dit parfois que $\mathcal{P}$ agit sur A. Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces topologiques, on utilise plutôt la terminologie $\mathcal{P}$*-espace*. Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces vectoriels, le foncteur oubli de la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres dans les espaces vectoriels admet un adjoint à gauche: la $\mathcal{P}$-algèbre libre sur un espace vectoriel V est alors décrite par

$$\mathcal{P}(V) = \oplus_{n \geq 0} \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} V^{\otimes n}.$$

Les opérations d'évaluation sont induites par les opérations de composition dans $\mathcal{P}$. On verra plus de détails sur ces foncteurs dans la partie 4.

1.2.3. *Cogèbre sur une opérade et coopérade.* Une *cogèbre sur une opérade* $\mathcal{P}$ est la donnée d'un objet C de $\mathcal{C}$ et d'applications:

$$\mathcal{P}(n) \otimes C \to C^{\otimes n}$$

compatibles avec la structure d'opérade. Plus généralement on peut définir la notion de *coopérade* par dualité de la notion d'opérade et si $\mathcal{P}$ est une opérade telle que $\mathcal{P}(n)$ est de dimension finie pour tout n, alors la famille $(\mathcal{P}^*(n) = \mathrm{Hom}(\mathcal{P}(n), \mathbf{k}))_{n \geq 1}$ forme une coopérade. On peut également définir la notion de *cogèbre sur une coopérade* en dualisant la notion d'algèbre sur une opérade et lorsque $\mathcal{P}$ vérifie les hypothèses précédentes, une cogèbre sur $\mathcal{P}$ est la même chose qu'une cogèbre sur la coopérade $\mathcal{P}^*$.

1.3. **Opérade définie par générateurs et relations.** On suppose ici que $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces vectoriels (eventuellement gradués ou différentiels gradués). Le foncteur oubli de la catégorie des opérades dans les $\mathbb{S}$-modules admet un adjoint à gauche $\mathcal{F}\mathrm{ree}$. Une opérade libre est donc une opérade de type $\mathcal{F}\mathrm{ree}(M)$ où M est un $\mathbb{S}$-module.

1.3.1. *Définition.* Soit $\mathcal{P}$ une opérade. Un *idéal* I de $\mathcal{P}$ est constitué de sous-espaces vectoriels $I(n) \subset \mathcal{P}(n)$ tels que $p(q_1, \ldots, q_n) \in I$ dès que p ou l'un des q_i est dans I. Si I est un idéal de $\mathcal{P}$, la famille $(\mathcal{P}(n)/I(n))_{n \geq 0}$ est une opérade pour la structure quotient. Une opérade est définie par générateurs et relations si elle s'écrit $\mathcal{F}\mathrm{ree}(M)/ < R >$ où M est l'ensemble des générateurs et R l'ensemble des relations avec $< R >$ l'idéal engendré par R.

1.3.2. *Exemples.* Soit $\mathcal{A}\mathrm{s}$ le $\mathbb{S}$-module défini par $\mathcal{A}\mathrm{s}(n) = \mathbf{k}[S_n]$ où l'action du groupe symétrique est donnée par la multiplication à droite. C'est la représentation régulière du groupe symétrique. Pour construire une structure d'opérade sur $\mathcal{A}\mathrm{s}$ il suffit de connaitre les compositions $\mathrm{id}_n \circ_i \mathrm{id}_m$ et d'appliquer les relations d'équivariance (2) et (3). On pose

$$\mathrm{id}_n \circ_i \mathrm{id}_m = \mathrm{id}_{n+m-1} .$$

On montre aisément que cela définit une opérade et que

$$\mathcal{A}\mathrm{s} = \mathcal{F}\mathrm{ree}(\mathbf{k}[S_2])/ < R_{\mathcal{A}\mathrm{s}} >,$$

où $\mathbf{k}[S_2]$ est le $\mathbb{S}$-module concentré en arité 2 et $R_{\mathcal{A}\mathrm{s}}$ est le sous S_3-module de $\mathcal{F}\mathrm{ree}(\mathbf{k}[S_2])(3)$ engendré par $\mathrm{id}_2 \circ_1 \mathrm{id}_2 - \mathrm{id}_2 \circ_2 \mathrm{id}_2$. Autrement dit, une algèbre sur $\mathcal{A}\mathrm{s}$ est une algèbre associative. Elle est unitaire si l'on suppose que $\mathcal{A}\mathrm{s}(0) = \mathbf{k}$ et non unitaire si l'on suppose $\mathcal{A}\mathrm{s}(0) = 0$.

De la même manière, soit $\mathcal{C}\mathrm{om}$ le $\mathbb{S}$-module défini par $\mathcal{C}\mathrm{om}(n) = \mathbf{k}$ où l'action du groupe symétrique est triviale. Soit e_n un générateur de $\mathcal{C}\mathrm{om}(n)$. Les compositions sont données par

$$e_n \circ_i e_m = e_{n+m-1}.$$

alors $\mathcal{C}\mathrm{om} = \mathcal{F}\mathrm{ree}(\mathbf{k}\, e_2)/ < R_{\mathcal{C}\mathrm{om}} >$, où $R_{\mathcal{C}\mathrm{om}}$ est le sous S_3-module de $\mathcal{F}\mathrm{ree}(\mathbf{k}\, e_2)(3)$ engendré par $e_2 \circ_1 e_2 - e_2 \circ_2 e_2$. Autrement dit, une algèbre sur $\mathcal{C}\mathrm{om}$ est une algèbre associative et commutative. Elle est unitaire si l'on suppose que $\mathcal{C}\mathrm{om}(0) = \mathbf{k}$ et non unitaire si l'on suppose $\mathcal{C}\mathrm{om}(0) = 0$.

1.3.3. *Opérade quadratique binaire.* On dit qu'une opérade $\mathcal{P}$ est *quadratique binaire* si $\mathcal{P} = \mathcal{F}\mathrm{ree}(M)/ < R >$ avec M concentré en arité 2 et R un sous S_3-module de $\mathcal{F}\mathrm{ree}(M)(3)$. Par exemple les opérades définissant les algèbres associatives, commutatives, Lie, de Poisson ou pré-Lie sont quadratique binaires. On verra par la suite que l'opérade définissant les algèbres à niveau (voir section 3.2.1) est binaire mais non quadratique.

1.4. **Dualité de Koszul pour les opérades et résolution d'opérade.**

1.4.1. *Résolution d'opérade.* On se place ici dans la catégorie des espaces vectoriels différentiels gradués. Une opérade $\mathcal{P}$ dans cette catégorie est une famille de complexes. La famille constituée de l'homologie de ces complexes est une opérade dans la catégorie des espaces vectoriels gradués, notée $H_*(\mathcal{P})$. Deux opérades sont *quasi-isomorphes* si elles sont liées par un morphisme d'opérades réalisant un isomorphisme en homologie. Une opérade est *quasi-libre* si elle est libre dans la catégorie des espaces vectoriels gradués. Il existe une structure de catégorie modèle sur les opérades dont les objets cofibrant sont des rétracts d'opérades quasi-libres projectives (en tant que $\mathbb{S}$-module). Une *résolution* d'une opérade $\mathcal{P}$ est un quasi-isomorphisme d'opérades $\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ avec $\mathcal{Q}$ cofibrante. Pour toute opérade $\mathcal{P}$ il existe une résolution d'opérade qui est la cobar-bar construction (voir [GK94], [GJ94], [Fre04]). La bar construction associe une coopérade à une opérade et la cobar construction associe une opérade à une coopérade.

1.4.2. *Dualité de Koszul pour les opérades quadratiques.* Lorsque $\mathcal{P}$ est une opérade quadratique, Ginzburg et Kapranov construisent une opérade $\mathcal{P}^!$, sa duale quadratique. Par exemple $\mathcal{A}\mathrm{s}^! = \mathcal{A}\mathrm{s}$, $\mathcal{C}\mathrm{om}^! = \mathcal{L}\mathrm{ie}$. La théorie de la dualité de Koszul pour les opérades développée dans [GK94] est une adaptation des résultats de Priddy pour les algèbres quadratiques (voir [Pri70]). En termes de coopérades, dans le cas où $\mathcal{P}(n)$ est de dimension finie, on pose $\mathcal{P}^\perp(n) = \Sigma^{n-1}(\mathcal{P}^!)^*(n) \otimes \mathrm{sgn}_n$ où Σ est la suspension des modules gradués et sgn_n la représentation signature de S_n. Une opérade est de *Koszul* si la cobar construction de $\mathcal{P}^\perp$ est une résolution de $\mathcal{P}$. Avoir une opérade de Koszul permet de définir les notions d'homologie opéradique et de $\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près.

Homologie opéradique. On se place en caractéristique 0. Lorsque $\mathcal{P}$ est de Koszul, il existe une paire de foncteurs adjoints entre la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres différentielles graduées et des $\mathcal{P}^!$-cogèbres différentielles graduées (voir par exemple dans [Liv99]). Soit $C_\mathcal{P}$ le foncteur allant des $\mathcal{P}$-algèbres dans les $\mathcal{P}^!$-cogèbres. L'homologie opéradique $H_*^\mathcal{P}(A)$ d'une $\mathcal{P}$ algèbre A est l'homologie du complexe $C_\mathcal{P}(A)$. On retrouve les notions d'homologie de Hochschild, de Chevalley-Eilenberg et de Harrison dans les cas $\mathcal{A}\mathrm{s}$, $\mathcal{L}\mathrm{ie}$ et $\mathcal{C}\mathrm{om}$. Dans ma thèse [Liv98a] j'ai développé et étendu ces résultats à des fins d'homotopie rationnelle pour les algèbres sur une opérade: le cas $\mathcal{C}\mathrm{om}^! = \mathcal{L}\mathrm{ie}$ donne les modèles d'homotopie rationnelle développés par Quillen et Sullivan.

$\mathcal{P}$-algèbres à homotopie près. La cobar construction de $\mathcal{P}^\perp$, fournit un modèle minimal pour $\mathcal{P}$ que l'on note $\mathcal{P}_\infty$. Une $\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près est une algèbre sur $\mathcal{P}_\infty$. On retrouve les notions classiques de A_∞-algèbres et L_∞-algèbres dans les cas $\mathcal{A}\mathrm{s}$ et $\mathcal{L}\mathrm{ie}$.

2. Algèbres pré-Lie

Les algèbres pré-Lie apparaissent dans divers contextes et sont un objet d'étude en soi. Pour un historique sur les algèbres pré-Lie et leur lien avec les structures affines, on pourra se reporter à l'article de D. Burde [Bur06]. Après avoir introduit l'opérade décrivant les algèbres pré-Lie et exposé les résultats fondamentaux de cette opérade obtenus en collaboration avec F. Chapoton dans [1], je souligne l'importance des algèbres pré-Lie en topologie algébrique. Enfin, dans un troisième temps je présente le théorème de rigidité obtenu dans l'article [2].

2.1. **Algèbres pré-Lie et opérade des arbres enracinés.** Le but de l'article avec F. Chapoton est de décrire l'opérade agissant sur les algèbres pré-Lie et de montrer que cette opérade est une opérade de Koszul. Nous faisons également le lien avec l'algèbre de Hopf de Connes et Kreimer introduite dans le cadre de la théorie de la renormalisation.

2.1.1. *Définition.* Une algèbre *pré-Lie* est un espace vectoriel L muni d'un produit $\circ : L \otimes L \to L$ satisfaisant la relation suivante

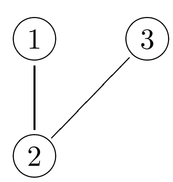
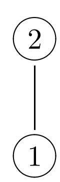
$$(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (x \circ z) \circ y - x \circ (z \circ y), \ \forall x, y, z \in L.$$

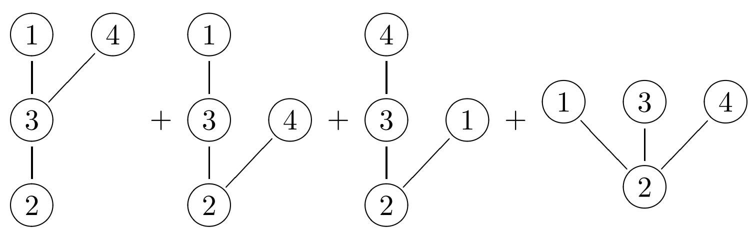
2.1.2. *Remarque.* Une algèbre *Lie admissible* est un espace vectoriel muni d'un produit $\circ$ tel que le crochet donné par $[x, y] = x \circ y - y \circ x$ est un crochet de Lie. Toute algèbre pré-Lie L est Lie admissible. On notera $L_{\mathcal{L}\mathrm{ie}}$ l'algèbre de Lie $(L, [-,-])$. En fait, les algèbres pré-Lie se caractérisent parmi les algèbres Lie admissibles de la manière suivante: L est une algèbre pré-Lie si et seulement si L est un $L_{\mathcal{L}\mathrm{ie}}$-module à droite pour l'action

$$\begin{array}{ccc} L \otimes L_{\mathcal{L}\mathrm{ie}} & \to & L \\ x \otimes y & \mapsto & x \circ y. \end{array}$$

2.1.3. *L'opérade des arbres enracinés.* Un n-*arbre* est un graphe connexe sans boucle muni d'une bijection entre les sommets et l'ensemble $[n]$. Un n-arbre est *enraciné* si l'on privilégie un sommet appelé *racine*. Les arêtes du graphe sont munies d'une orientation naturelle vers la racine. Soit $\mathcal{RT}(n)$ le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les n-arbres enracinés. On munit $\mathcal{RT} = (\mathcal{RT}(n))_{n \geq 1}$ d'une structure d'opérade. L'action du groupe symétrique se fait par permutation des indices des sommets. L'elément $1 \in \mathcal{RT}(1)$ est l'unique arbre enraciné à un seul sommet qui est la racine. Soit T un n-arbre enraciné; l'ensemble des arêtes entrantes au sommet indexé par i est noté $\mathrm{In}(T, i)$. Soit S un m-arbre enraciné. Soit f une application de $\mathrm{In}(T, i)$ dans $[m]$. Le $(m + n - 1)$-arbre enraciné $T \circ_i^f S$ est obtenu en remplaçant le sommet i de T par l'arbre S et en reliant chaque arête a dans $\mathrm{In}(T, i)$ au sommet $f(a)$ de S. Les indices de ce nouvel arbre sont les suivants: on ajoute $i - 1$ à ceux de S et $m - 1$ à ceux de T qui sont supérieurs à $i + 1$. La racine du nouvel arbre est celle de T si elle est différente du sommet i et celle de S sinon. On définit ainsi des applications pour tout tout $1 \leq i \leq n$,

$$T \circ_i S = \sum_{f : \mathrm{In}(T,i) \to [m]} T \circ_i^f S.$$

Exemple: pour $T =$  et $S =$ , la composition $T \circ_2 S$ est obtenue en décrivant toutes les applications de $\{1, 3\}$ dans $\{1, 2\}$:

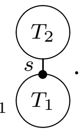
$T \circ_2 S =$ 

2.1.4. *Théorème* [1, 1.9]. *La construction précédente confère à $\mathcal{RT}$ une structure d'opérade. Les algèbres sur cette opérade sont les algèbres pré-Lie. La pré-Lie algèbre libre engendrée par un espace vectoriel V est donnée par*

$$\mathcal{PL}(V) := \oplus_{n\geq 1} \mathcal{RT}(n) \otimes_{S_n} V^{\otimes n}.$$

Pour toute base $\mathcal{B}$ de V, une base de $\mathcal{PL}(V)$ est donnée par les arbres enracinés indexés par $\mathcal{B}$. Le produit pré-Lie entre deux tels arbres est

$$T_1 \circ T_2 = \sum_{s \text{ sommet de } T_1}$$



L'intérêt de la description des algèbres pré-Lie libres est lié à la théorie de la renormalisation: Connes et Kreimer construisent dans [CK98] une algèbre de Hopf polynomiale sur les arbres enracinés. Cette algèbre de Hopf est commutative, donc sa duale est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie (nous sommes en caractéristique 0). Cette algèbre de Lie est précisément $\mathcal{PL}(\mathbf{k})_{\mathcal{L}\text{ie}}$, l'algèbre de Lie induite par l'algèbre pré-Lie libre sur un générateur.

2.1.5. *Notation.* Tout arbre dans $\mathcal{PL}(V)$ peut s'écrire $B(v, T_1, \ldots, T_n)$ où v est la racine et $T_1, \ldots, T_n$ sont des arbres enracinés dont les sommets sont indexés par des éléments de V; une unique arête joint la racine de T_i à v.

2.1.6. *Théorème* [1, 3.4]. *L'opérade définissant les algèbres pré-Lie est de Koszul.*

La démonstration se fait en plusieurs étapes:

- On décrit le dual de Koszul de l'opérade $\mathcal{PL}$: une algèbre sur cette opérade est un espace vectoriel V muni d'un produit associatif satisfaisant de plus
$$abc = acb, \ \forall a, b, c \in V.$$
On appelle de telles algèbres des *algèbres permutatives*.
- On en déduit le complexe qui calcule l'homologie opéradique d'une algèbre pré-Lie, par la méthode décrite en 1.4.2.
- On montre que l'homologie d'une algèbre pré-Lie libre est triviale: ce calcul se fait en comparant cette homologie avec l'homologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie induite.

2.2. **Algèbres pré-Lie et structures en topologie algébrique.**

2.2.1. *Algèbres pré-Lie et conjecture de Deligne.* En 1963, dans l'article [Ger63], M. Gerstenhaber construit une structure d'algèbre pré-Lie graduée sur $C^*(A, A)$, le complexe calculant la cohomologie de Hochschild d'une algèbre associative A. Rappelons que $C^n(A, A) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A)$. Plus généralement, pour toute opérade $\mathcal{P}$, il existe un produit pré-Lie gradué de degré -1 sur $\mathcal{P}_* = \oplus_n \mathcal{P}(n)$ donné par

$$p \circ q = \sum_{i=1}^{n} \pm p \circ_i q, \forall\, p \in \mathcal{P}(n), q \in \mathcal{P}_* \text{ (voir [GV95])}. \tag{4}$$

Le complexe $C^*(A, A)$ est une opérade d'endomorphismes (comme en 1.2.1) et le produit pré-Lie construit par Gerstenhaber coincide avec celui donné par la formule (4). Ce produit n'est pas compatible avec la différentielle de Hochschild mais le crochet de Lie qui lui est associé l'est. Donc la cohomologie de Hochschild d'une algèbre associative est une algèbre de Lie graduée. C'est en fait une algèbre de Gerstenhaber (voir définition 3.1.3). Par ailleurs, l'homologie d'un espace de lacet double est aussi une algèbre de Gerstenhaber d'après les travaux de F. Cohen [Coh76]. Et l'opérade définissant les algèbres de Gerstenhaber est l'homologie de l'opérade topologique des petits carrés $\mathcal{C}_2$, qui elle, agit sur les espace de lacets doubles. Ceci a amené Deligne à conjecturer que $C^*(A, A)$ doit être muni d'une action d'une opérade quasi-isomorphe à l'opérade des chaines singulières de $\mathcal{C}_2$. La structure pré-Lie est au centre de cette question puisque l'opérade $\mathcal{PL}$ agit sur $C^*(A, A)$. De plus, Gerstenhaber et Voronov ont montré dans [GV95] que l'on peut munir $\mathcal{P}_* = \oplus_n \mathcal{P}(n)$ d'opérations "braces" pour toute opérade $\mathcal{P}$. Ces opérations sont définies comme suit: pour tous $p, x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{P}_*$,

$$p\{x_1, \ldots, x_n\} = \sum \pm p(1, \ldots, 1, x_1, \ldots, 1, \ldots, x_2, \ldots, 1, x_n, \ldots, 1)$$

où la somme est prise sur toutes les insertions ordonnées possibles des x_i dans p en utilisant la composition opéradique. Il est clair que $p \circ q = p\{q\}$, c'est-à-dire que le produit pré-Lie est la *première* opération "brace". De plus si l'opérade est munie d'un produit associatif, une différentelle est construite. Une telle structure, opérations "brace", produit associatif et différentielle s'appelle *Gerstenhaber homotopique* notée hG. Il existe une opérade différentielle graduée qui régit cette structure (que l'on note aussi hG) et $C^*(A, A)$ est une algèbre de Gerstenhaber homotopique. La solution de McClure et Smith de la conjecture de Deligne exposée dans [MS03] consiste à montrer que hG est quasi-isomorphe aux chaines singulières de l'opérade $\mathcal{C}_2$. Dans la section 3.1 nous construisons une opérade sur les espaces de Teichmüller décorés et nous montrons le lien avec l'opérade des cactus de Voronov [Vor05] qui est homotopiquement équivalente à $\mathcal{C}_2$ et résoud la conjecture de Deligne.

2.2.2. *Algèbres pré-Lie et opérations de Steenrod.* Il existe une structure d'opérade non symétrique sur le complexe $C^*(X)$ des cochaines simpliciales d'un espace topologique (voir [GV95] et [Kad04]). Par ailleurs, Steenrod définit les $\cup_i$-produits sur ce complexe dans [Ste47] qui donnent les opérations de Steenrod en cohomologie. Il est intéressant de comparer les deux constructions au niveau du $\cup_1$-produit. Soit $f \in C^n(X)$ et $g \in C^m(X)$

et $\sigma \in C_{n+m-1}(X)$ on a

$$f \cup_1 g(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma(a_0, \ldots, a_i, a_{i+m}, \ldots, a_{n+m-1}))g(\sigma(a_i, \ldots, a_{i+m})) = f\{g\}$$

où $f\{g\}$ est la première opération "brace" définie sur l'opérade formée par $C^*(X)$ c'est-à-dire le produit pré-Lie. Ainsi la structure pré-Lie se trouve à l'intersection entre les opérations "braces" et les $\cup_i$-produits. C'est l'opération qui calcule le défaut à la commutativité du produit. Dans la partie 3.2 nous traitons plus en détails les $\cup_i$-produits.

2.2.3. *Algèbres pré-Lie et équations de Maurer-Cartan.* Soit $\mathcal{P}$ une opérade de Koszul. En 1.4.2 nous avons montré que pour définir les $\mathcal{P}$-algèbres à homotopie près, on utilise l'opérade $\mathcal{P}_\infty$ qui est la construction cobar de la coopérade $\mathcal{P}^\perp$. La définition de la construction cobar implique le fait suivant: se donner une structure de $\mathcal{P}_\infty$-algèbre sur un espace vectoriel A équivaut à se donner une codérivation de degré -1 et de carré nul sur la $\mathcal{P}^!$-cogèbre libre sur A, notée $(\mathcal{P}^!)^c(A)$. Or l'ensemble des codérivations est muni d'une structure d'algèbre de Lie. Se donner une codérivation d de degré -1 et de carré nul équivaut à résoudre l'équation $[d,d]=0$, appelée *équation de Maurer-Cartan.* Les équations de Maurer-Cartan sont importantes en théorie de la déformation. Un des ingrédients essentiels du théorème de formalité de Kontsevich est d'analyser le lien entre la théorie des déformations et les structures L_∞, solutions des équations de Maurer-Cartan dans le cas où $\mathcal{P} = \mathcal{L}$ie. En fait, sur l'ensemble des codérivations de ce type il existe une structure pré-Lie que voici. Il y a un isomorphisme entre les codérivations de $(\mathcal{P}^!)^c(V)$ et $\mathrm{Hom}((\mathcal{P}^!)^c(V), V)$ puisque l'espace d'arrivée des codérivations est colibre. Ainsi on peut munir $\mathrm{Hom}((\mathcal{P}^!)^c(V), V)$ d'une structure de Lie. Cette structure provient en fait d'une structure pré-Lie, $\circ$ (voir [1, proposition 2.4] dans le cas où $\mathcal{P} = \mathcal{PL}$). L'équation de Maurer-Cartan s'écrit aussi $d \circ d = 0$.

2.3. **Un théorème de rigidité pour les algèbres pré-Lie.** On se place en caractéristique 0. Le théorème de rigidité classique est le théorème de Leray: une algèbre de Hopf connexe commutative et cocommutative est libre en tant qu'algèbre commutative et cogèbre cocommutative. Loday et Ronco [LR06] ont étendu ce théorème pour les algèbres de Hopf unitaires infinitésimales. Par définition, une *algèbre de Hopf unitaire infinitésimale* est un espace vectoriel A muni d'un produit associatif unitaire, d'un coproduit coassociatif counitaire Δ tel que

$$\Delta(a \cdot b) = (a \otimes 1) \cdot \Delta(b) + \Delta(a) \cdot (1 \otimes b) - a \otimes b.$$

Ainsi contrairement aux algèbres de Hopf, le coproduit Δ n'est plus un morphisme d'algèbres. Par exemple l'espace vectoriel $T(V) = \oplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$

muni de la concaténation et de la déconcaténation

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{k=0}^{n} (v_1, \ldots, v_k) \otimes (v_{k+1}, \ldots, v_n)$$

est une algèbre de Hopf unitaire infinitésimale. On remarque que cette algèbre est libre en tant qu'algèbre associative, colibre en tant que cogèbre coassociative. Cet exemple est universel au sens suivant

2.3.1. *Théorème* [LR06]. *Toute algèbre de Hopf unitaire infinitésimale connexe H est isomorphe à $T(\operatorname{Prim} H)$ muni de la concaténation et de la déconcaténation.*

Ce théorème est un outil très puissant pour montrer qu'une algèbre (ou une cogèbre) associative est libre. Nous en donnerons des applications dans la partie 4. La démonstration de Loday et Ronco de ce théorème utilise une adaptation des idempotents eulériens à ce cas spécifique. Je démontre dans l'article [2, 5.2] qu'un cogroupe abélien dans la catégorie des algèbres associatives est précisément une algèbre de Hopf unitaire infinitésimale et en déduit le théorème de Loday-Ronco grâce aux outils sur les cogroupes développés par I. Berstein dans [Ber65].

L'objet central de l'article [2] est de démontrer un théorème de Leray pour les algèbres pré-Lie. Contrairement aux deux cas vus précédemment, la co-structure que l'on doit imposer dans un tel but n'est pas la co-structure pré-Lie mais la co-structure *permutative non associative*.

2.3.2. *Définition.* Une *cogèbre permutative non associative* est un espace vectoriel C muni d'un coproduit $\Delta : C \to C \otimes C$ qui vérifie la relation

$$(\mathrm{id} - \tau_{23})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = 0,$$

où $\tau_{23} : C^{\otimes 3} \to C^{\otimes 3}$ est défini par $\tau_{23}(x \otimes y \otimes z) = x \otimes z \otimes y$.

Définissons par récurrence une filtration de C comme suit

$$\begin{aligned} C_1 &= \{x \in C | \Delta(x) = 0\}, \\ C_n &= \{x \in C | \Delta(x) \in \sum_{i=1}^{n-1} C_i \otimes C_{n-i}\}. \end{aligned}$$

L'espace vectoriel C_1 est appelé *espace des primitifs* et est noté $\operatorname{Prim} C$. La cogèbre C est *connexe* si $C = \cup_{n \geq 1} C_n$.

Il existe une opérade telle que les cogèbres sur cette opérade sont les cogèbres permutatives non associatives. Cette opérade est construite à partir des arbres enracinés. Plus précisément, on a le théorème suivant

2.3.3. *Théorème* [2, 2.10]. *L'espace vectoriel $\mathcal{PL}(V)$ est la cogèbre permutative non associative connexe colibre sur V pour le coproduit*

$$\Delta(B(v, T_1, \ldots, T_n)) = \sum_{i=1}^{n} B(v, T_1, \ldots, \hat{T_i}, \ldots, T_n) \otimes T_i,$$

où le symbole $\hat{T}_i$ signifie que l'on retire l'arbre T_i.

Comme $\mathcal{PL}(V)$ est également l'algèbre pré-Lie libre engendrée par V, il est naturel de comprendre la relation existant entre la structure produit (pré-Lie) et la structure coproduit (co- non associatif permutatif). D'après 2.1.2 une algèbre pré-Lie L est un $L_{\mathcal{L}\mathrm{ie}}$-module à droite. En fait, pour tout n, l'espace vectoriel $L^{\otimes n}$ est aussi un $L_{\mathcal{L}\mathrm{ie}}$-module à droite pour l'action suivante:

$$(x_1 \otimes \dots x_n) \circ y = \sum_{i=1}^{n} x_1 \otimes \dots \otimes x_i \circ y \otimes \dots \otimes x_n.$$

En utilisant cette notation, on obtient la relation entre Δ et $\circ$ sur $\mathcal{PL}(V)$:

$$\Delta(a \circ b) = a \otimes b + \Delta(a) \circ b. \tag{5}$$

Ci-dessous, le théorème de rigidité pour les algèbres pré-Lie indique que cet exemple est l'exemple universel.

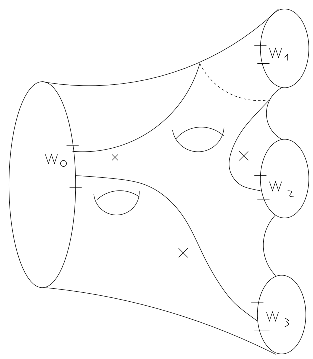
2.3.4. *Théorème* [2, 3.4]. *On se donne $(H, \circ_H, \Delta_H)$ tel que $(H, \circ_H)$ est une algèbre pré-Lie et (H, Δ_H) est une cogèbre permutative non associative vérifiant la relation* (5). *Si H est connexe alors H est isomorphe en tant qu'algèbre pré-Lie et cogèbre non associative permutative à $\mathcal{PL}(\mathrm{Prim}\, H)$.*

La démonstration de ce théorème consiste en un premier temps à construire une projection $H \to \mathrm{Prim}\, H$ de noyau les éléments décomposables, c'est-à-dire qui s'écrivent comme produit pré-Lie d'éléments de H. Cette projection peut être vue comme un idempotent de $\mathrm{End}(H)$ analogue à l'idempotent eulérien, projection de $T(V)$ sur l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}\mathrm{ie}(V)$. Pour montrer l'isomorphisme on utilise les propriétés universelles de $\mathcal{PL}(\mathrm{Prim}\, H)$ en tant qu'objet libre dans les catégories des algèbres pré-Lie et des cogèbres permutatives non associatives.

3. Quelques exemples et applications des opérades en topologie algébrique

3.1. **L'opérade des arcs.** Les opérades apparaissent aussi en physique mathématique par exemple en théorie des cordes ou en théorie des champs conformes. Les espaces en jeu sont les espaces de modules $\mathcal{M}_{g,n}$ des surfaces de Riemann de genre g avec n points marqués. On pourra se reporter, par exemple, à [Sta97] pour une présentation de ces aspects. Dans l'article [Pen96], R. Penner décrit une compactification des espaces de modules qui fait intervenir ce qu'il appelle le complexe des arcs. Nous construisons dans [3] une opérade sur ce complexe et montrons que l'opérade des cactus de Voronov en est une sous-opérade (voir commentaires en 2.2.1)

3.1.1. *Données.* On se fixe $F = F_{g,s}^{n+1}$ une surface topologique orientée de genre g à $n+1 \geq 1$ bords que l'on note $\partial_0, \partial_1, \ldots, \partial_n$ et $s \geq 0$ points marqués. Pour chaque bord ∂_i, on fixe une fenêtre W_i et on considère l'espace de Teichmüller modulaire PMC ("mapping class group") qui est le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes qui préservent l'orientation ainsi que les points de $\partial_i \backslash W_i$. Un *arc* est un chemin plongé dans la surface dont les extremités se trouvent sur une fenêtre et qui n'est pas isotope à un chemin trivial (chemin sur un bord). Une *famille d'arcs* est une classe d'isotopie d'une collection d'arcs satisfaisant les conditions suivantes: les plongements des arcs sont disjoints et deux arcs de la famille ne sont pas isotopes. Par conséquent le groupe PMC agit sur les familles d'arcs. Voici un exemple d'une familles d'arcs:



L'espace topologique que l'on considère, $\mathcal{A}\mathrm{rc}_{g,s}(n)$, est constitué d'éléments $[\alpha] = (\{\alpha_0, \ldots, \alpha_k\}, [w_0 : w_1 : \ldots : w_k])$ où $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_k\}$ est une famille d'arcs de F modulo l'action du groupe PMC et $[w_0 : w_1 : \ldots : w_k]$ est une famille projective de poids $w_i \in \mathbb{R}_+$ (cela correspond aux cellules du complexe simplicial défini à partir des familles d'arcs sur la surface). On demande de plus que toutes les fenêtres des bords de F soient atteintes par au moins un arc. On peut choisir un représentant (α) de $[\alpha]$ en choisisant un représentant $(w_0, \ldots, w_k)$ dans $(\mathbb{R}^+)^{\times k+1}$ de $[w_0 : \ldots : w_k]$. Dans ce cas le poids de α_i est w_i et l'on peut imaginer cet arc comme une bande de largeur w_i. C'est cette interprétation qui nous permet de construire une opérade.

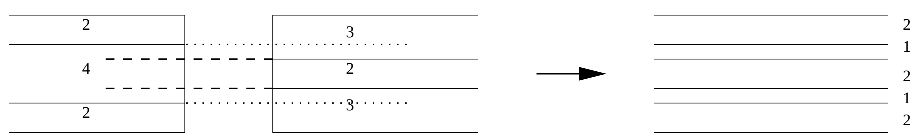
Nous construisons une opérade $\mathcal{A}\mathrm{rc}$ sur les espaces topologiques $\mathcal{A}\mathrm{rc}(n)$ limite directe des $\mathcal{A}\mathrm{rc}_{g,s}(n)$, pour g, s allant à l'infini. L'action du groupe symétrique se fait par permutation des indices des bords "de sortie" ∂_i pour $i = 1, \ldots, n$. La composition

$$\circ_i : \mathcal{A}\mathrm{rc}_{g,s}(n) \times \mathcal{A}\mathrm{rc}_{g',s'}(m) \to \mathcal{A}\mathrm{rc}_{g+g',s+s'}(n+m-1)$$

se définit de la manière suivante. Soient $[\alpha] = (\{\alpha_0, \ldots, \alpha_k\}, [w_0 : w_1 : \ldots : w_k]) \in \mathcal{A}\mathrm{rc}_{g,s}(n)$ et $[\beta] = (\{\beta_0, \ldots, \beta_l\}, [z_0 : z_1 : \ldots : z_l]) \in \mathcal{A}\mathrm{rc}_{g',s'}(n+m-1)$. Nous construisons $[\alpha] \circ_i [\beta]$ élément de la surface $F^{n+m-1}_{g+g',s+s'}$. Cette dernière est obtenue en collant le bord $\partial'_0(F_{g',s'}(m))$ au bord $\partial_i(F_{g,s}(n))$ en ayant pris soin d'identifier les fenêtres W_i et W'_0. Soient (α) et (β) des représentants de $[\alpha]$ et $[\beta]$.

A la fenêtre W_i arrive une famille d'arcs $(a_1, \dots, a_u)$ linérairement ordonnée de poids $(r_1, \dots, r_u)$. De même à la fenêtre W'_0 arrive une famille d'arcs $(b_1, \dots, b_v)$ linérairement ordonnée de poids $(s_1, \dots, s_v)$. On choisit les représentants (α) et (β) de telle manière que $\sum_k r_k = \sum_j s_j = L$. Donc à la fenêtre W_i arrive une bande de largeur L munie de coutures séparant les bandes de largeur r_k, $1 \leq k \leq u$. De même à la fenêtre W'_0 arrive une bande de largeur L munie de coutures séparant les bandes de largeur s_j, $1 \leq j \leq v$. L'idée est de prolonger les coutures de chaque côté de manière à faire correspondre les bandes arrivant à la fenêtre W_i avec les bandes arrivant à la fenêtre W'_0. A chaque bande correspond un arc c_j avec un poids p_j où $\sum_j p_j = L$.

Par exemple, sur la figure ci-dessous, des arcs de poids respectifs $(2, 4, 2)$ rencontrent des arcs de poids respectifs $(3, 2, 3)$, ce qui nous donne une nouvelle famille d'arcs de poids respectifs $(2, 1, 2, 1, 2)$.



Considérons la famille (γ) d'arcs sur $F^{n+m-1}_{g+g',s+s'}$ constituée des arcs suivants: α_a de poids w_a si α_a ne rencontre pas W_i; β_b de poids z_b si β_b ne rencontre pas W'_0; c_j de poids p_j. On pose $[\alpha] \circ_i [\beta] = [\gamma]$.

3.1.2. *Théorème* [3, 1.5.2]. *La famille des espaces topologiques* $(\mathcal{A}\mathrm{rc}(n))_{n\geq 1}$ *définit une opérade topologique. L'unité est l'élément de* $\mathcal{A}\mathrm{rc}(1)$ *représenté par un arc joignant les deux extrémités d'un cylindre.*

3.1.3. *Algèbres de Gerstenhaber et algèbres Batalin-Vilkovisky.* Une algèbre commutative graduée A est une *algèbre de Gerstenhaber* si A est munie d'un crochet de Lie de degré 1 qui est une dérivation par rapport au produit commutatif. Plus précisément, si $|a|$ est le degré de $a \in A$ et $\{,\}$ est le crochet de Lie de A, on a

$$\begin{aligned} \{a, b\} &= -(-1)^{(|a|+1)(|b|+1)}\{b, a\} \\ \{a, \{b, c\}\} &= \{\{a, b\}, c\} + (-1)^{(|a|+1)(|b|+1)}\{b, \{a, c\}\} \\ \{a, b \cdot c\} &= \{a, b\} \cdot c + (-1)^{(|b|(|a|+1)}b \cdot \{a, c\}. \end{aligned}$$

L'algèbre commutative A est une *algèbre de Batalin-Vilkovisky* si A est munie d'un opérateur $\Delta : A \to A$ de degré 1 tel que $\Delta^2 = 0$ et tel que le crochet

$$\{a, b\} = (-1)^{|a|}\Delta(a \cdot b) - (-1)^{|a|}\Delta(a) \cdot b - a \cdot \Delta(b)$$

est un crochet de Gerstenhaber.

3.1.4. *Théorème* [3, 2.5]. *Le complexe des chaines singulières $C_*(\mathcal{A}\mathrm{rc})$ est muni d'une structure de Batalin-Vilokovisky modulo les bords. Ainsi toute algèbre sur $H_*(\mathcal{A}\mathrm{rc})$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky.*

La démonstration de ce théorème se fait en exhibant les bonnes familles d'arcs pour démontrer les relations. Par exemple le générateur de $H_1(\mathcal{A}\mathrm{rc}(1))$ donne l'opérateur Δ. On remarque également que l'on peut définir un produit pré-Lie de degré 1 sur $C_*(\mathcal{A}\mathrm{rc})$ à un bord près, comme dans le cas de l'opérade décrite par Chas et Sullivan dans [CS99]. On montre que le crochet de Lie associé à ce produit pré-Lie est le crochet obtenu à partir de l'opérateur Δ. Cela veut dire également que l'on peut se restreindre aux algèbres de Gerstenhaber sans tenir compte de l'opérateur Δ.

3.1.5. *Opérade des cactus.* L'opérade des cactus a été définie par Voronov dans [Vor05] dans le but de comprendre la structure de Batalin-Vilkovisky sur l'homologie de l'espace des lacets libres d'une variété compacte orientée décrite par Chas et Sullivan. Elle est homotopiquement équivalente à l'opérade des petits disques pointés. Nous montrons dans notre article que l'opérade des cactus se plonge dans l'opérade des arcs.

3.2. **Opérades d'Adem-Cartan.** Comme on l'a vu dans la partie 2.2.2, le $\cup_1$-produit sur les cochaines singulières d'un espace topologique est l'obstruction à la commutativité du cup-produit. Dans son article qui définit les opérations de Steenrod [Ste47], Steenrod construit les $\cup_i$-produits sur les cochaines et remarque qu'a priori le $\cup_i$-produit de deux cocycles n'est pas un cocycle sauf si l'on prend le $\cup_i$-produit d'un cocycle avec lui-même. Cette remarque conduit à la définition des opérations de Steenrod sur la cohomologie d'un espace topologique. L'avantage de considérer les $\cup_i$-produits plutôt que les opérations de Steenrod, est que l'on peut les exprimer à l'aide d'opérades construites à partir de la résolution standard de $\mathbf{k}$ par des $\mathbf{k}[S_2]$-modules projectifs. C'est cette approche que P. May a choisi de développer dans [May70]. Cette approche intervient également dans l'étude des opérades $\mathcal{E}_\infty$: une opérade $\mathcal{E}_\infty$ est une résolution projective (en tant que $\mathbb{S}$-module) de l'opérade $\mathcal{C}\mathrm{om}$. Les $\cup_i$-produits sont alors naturellement présents en arité 2. Les opérades $\mathcal{E}_\infty$ sont d'un grand intérêt en topologie algébrique. Mandell montre dans [Man01] que l'action d'une telle opérade sur les cochaines d'un espace topologique nilpotent et p-complet détermine le type d'homotopie de l'espace. Berger et Fresse dans [BF04] donnent une description explicite d'une opérade $\mathcal{E}_\infty$ filtrée dont le deuxième terme de la filtration résoud la conjecture de Deligne.

L'approche des $\cup_i$-produits que nous présentons avec D. Chataur dans l'article [4] est différente: nous construisons explicitement une opérade– en quelque sorte la plus petite qui soit– qui permet de coder les $\cup_i$-produits et donc les opérations de Steenrod, ainsi que les relations d'Adem et de Cartan. L'idée est de “linéariser” ces relations et de se placer au niveau des cochaines. L'intérêt de notre présentation est que nous n'imposons pas l'associativité des algèbres sur lesquelles notre opérade agit, ce qui permet de se concentrer uniquement sur les relations proprement dites. Nous utilisons ainsi pour base non pas les algèbres associatives et commutatives mais les *algèbres à niveau*. Nous montrons alors le lien avec les opérades $\mathcal{E}_\infty$ et avec les opérations cohomologiques supérieures.

On se place ici sur le corps $\mathbb{F}_2$. La catégorie $\mathcal{C}$ est la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels différentiels gradués.

3.2.1. *Définition.* Une *algèbre à niveau* est un espace vectoriel A muni d'un produit commutatif (non associatif) $*$ qui satisfait la relation

$$(a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d), \ \forall a, b, c, d \in A.$$

Il y a une opérade qui définit ce type d'algèbre que l'on note $\mathcal{L}$ev: c'est une opérade binaire (le générateur est d'arité 2) qui n'est pas quadratique car l'espace des relations est d'arité 4 et non 3. On peut montrer qu'une base de $\mathcal{L}\mathrm{ev}(n)$ est donnée par les arbres à niveau (ceux-ci sont présentés dans [Sch94] par exemple). Une algèbre associative et commutative est une algèbre à niveau, donc il existe un morphisme d'opérades $\mathcal{L}\mathrm{ev} \to \mathcal{C}\mathrm{om}$. L'opérade $\mathcal{L}$ev est définie par générateurs et relations: soit $R_{\mathcal{L}\mathrm{ev}}$ le sous S_4-module de $\mathcal{F}\mathrm{ree}(\mathbf{k}[S_2])(4)$ engendré par $\mu(\mu,\mu)\cdot(\mathrm{id} + (1324))$, avec $\mu = \mathrm{id}_2 \in S_2$, alors

$$\mathcal{L}\mathrm{ev} = \mathcal{F}\mathrm{ree}(\mathbf{k}[S_2]) / < R_{\mathcal{L}\mathrm{ev}} > .$$

Le but de la théorie est de construire une résolution partielle de l'opérade $\mathcal{L}$ev dans la catégorie des opérades différentielles graduées, qui va coder les $\cup_i$-produits et les relations d'Adem et de Cartan.

3.2.2. *La résolution bar canonique.* Soit (21) la transposition de S_2. La résolution projective canonique de $\mathbb{F}_2$ par des S_2-modules est donnée par

$$W^{-i} = \begin{cases} < e_i, e_i \cdot (21) >, & \text{si } i \geq 0 \\ 0, & \text{si } i < 0 \end{cases}$$
$$d(e_i) = e_{i-1} + e_{i-1}\cdot(21), \text{avec } e_{-1} = 0.$$

D'après la définition de l'opérade $\mathcal{L}$ev on voit que l'on a une fibration d'opérades

$$p: \ \mathcal{F}\mathrm{ree}(W) \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} \mathcal{F}\mathrm{ree}(\mathbb{F}_2) \twoheadrightarrow \mathcal{L}\mathrm{ev},$$

telle que $p(n)$ est un quasi-isomorphisme pour tout $n < 4$.

3.2.3. *L'opérade* $\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}$. A partir de $\mathcal{F}\mathrm{ree}(W)$ nous construisons par adjonctions cellulaires une opérade différentielle graduée cofibrante $\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}$ qui vérifie les propriétés suivantes:

a) $\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}(2) = W$.
b) Il existe une fibration $f : \mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC} \to \mathcal{L}\mathrm{ev}$ telle que $f(n)$ est un quasi-isomorphisme pour $n < 4$.
c) f induit un isomorphisme $H^0(\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}(n)) \simeq \mathcal{L}\mathrm{ev}(n)$.

d) Il existe des éléments $G_n^m \in \mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}(4)$, pour tout $0 < m \leq n$, de degré $-n$, tels que dG_n^m est une combinaison linéaire de G_{n-1}^{m-1}, G_{n-1}^{m-2} et de $e_i(e_j, e_k)$ avec $i + j + k = n - 1$. (voir relation (2.8) dans [4]).

Une algèbre différentielle graduée sur une opérade $\mathcal{P}$ est dite *graduée* si la différentielle est nulle. La propriété c) permet de montrer que toute algèbre graduée sur $\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}$ est une algèbre à niveau.

3.2.4. *Lien avec les opérades $\mathcal{E}_\infty$.* Une opérade $\mathcal{E}_\infty$ est une résolution de $\mathcal{C}\mathrm{om}$ par des S_n-modules projectifs. Soit $\mathcal{E}$ une telle opérade. Comme il existe une structure de catégorie modèle sur les opérades différentielles graduées, et comme l'opérade $\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}$ est cofibrante, la propriété de relèvement des cofibrations par rapport aux fibrations acycliques nous permet de dire qu'il existe un morphisme d'opérades

$$\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC} \to \mathcal{E}.$$

En particulier il existe un morphisme d'opérades de $\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}$ vers l'opérade $\mathcal{E}_\infty$ de Barratt-Eccles construite par Berger-Fresse dans [BF04] et l'opérade $\mathcal{E}_\infty$ des surjections construite par McClure et Smith dans [MS02].

3.2.5. *Quelques rappels sur l'algèbre de Steenrod et les $\cup_i$-produits.* L'*algèbre de Steenrod généralisée* $\mathcal{B}_2$ (voir [May70], [Man01]) est une $\mathbb{F}_2$-algèbre associative graduée engendrée par les carrés de Steenrod généralisés Sq^i, de degré $i \in \mathbb{Z}$. Contrairement à l'algèbre de Steenrod classique $\mathcal{A}_2$, les carrés Sq^i existent pour $i < 0$ et Sq^0 n'est pas nécessairement l'identité. Les carrés de Steenrod satisfont les relations d'Adem: pour $t < 2s$,

$$\mathrm{Sq}^t \mathrm{Sq}^s = \sum_i \binom{s-i-1}{t-2i} \mathrm{Sq}^{s+t-i} \mathrm{Sq}^i .$$

En fait on a la relation suivante entre l'algèbre de Steenrod généralisée et l'algèbre de Steenrod classique:

$$\mathcal{A}_2 \cong \frac{\mathcal{B}_2}{< \mathrm{Sq}^0 + \mathrm{id} >}.$$

Un *module instable sur* $\mathcal{B}_2$, est un $\mathcal{B}_2$-module gradué qui satisfait la condition d'instabilité suivante:

$$\mathrm{Sq}^n(x) = 0 \text{ si } |x| < n.$$

Une *algèbre à niveau instable sur* $\mathcal{B}_2$ est une algèbre à niveau graduée $(A, *)$ qui est un module instable sur $\mathcal{B}_2$, et qui vérifie les relations

$$\begin{cases} \mathrm{Sq}^{|x|}(x) = x * x, \\ \mathrm{Sq}^s(x * y) = \sum \mathrm{Sq}^t(x) * \mathrm{Sq}^{s-t}(y) \quad \text{(relation de Cartan).} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{P}$ une opérade telle que $\mathcal{P}(2) = W$, où W est la S_2-résolution projective de $\mathbb{F}_2$ définie plus haut. Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre différentielle graduée.

L'application d'évaluation

$$\mathcal{P}(2) \otimes A^{\otimes 2} \longrightarrow A,$$

definit des $\cup_i$-produits par $a \cup_i b = e_i(a,b)$. Les carrés de Steenrod sont définis par $\mathrm{Sq}^r(a) = a \cup_{|a|-r} a = e_{|a|-r}(a,a)$. Avec les notations de P. May [May70], on note $D_n(a) = e_n(a,a) = \mathrm{Sq}^{|a|-n}(a)$. Les relations d'Adem s'écrivent alors

$$\sum_k (k, v-2k) D_{w-v+2k} D_{v-k}(a) = \sum_l (l, w-2l) D_{v-w+2l} D_{w-l}(a),$$

où $(i,j) = \binom{i+j}{i}$ et la relation de Cartan s'écrit

$$D_n(x * y) = \sum_{k=0}^{n} D_k(x) * D_{n-k}(y).$$

3.2.6. *Théorème* [4, 3.3.1]. *Toute $\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}$-algèbre graduée est une algèbre à niveau instable sur l'algèbre de Steenrod généralisée.*

Pour démontrer ce théorème, il faut montrer que si A est une $\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}$-algèbre graduée alors A, munie des carrés de Steenrod induit par l'action de $\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}(2) = W$, vérifie les relations de Cartan et d'Adem. Comme A est graduée on a $d_A a = 0$, $\forall a \in A$. Or dans la catégorie des espaces vectoriels différentiels gradués, l'action d'une opérade $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$ sur une algèbre satisfait la relation de Leibniz:

$$\begin{aligned} &d_A(p(a_1,\ldots,a_n)) = \\ &\qquad d_{\mathcal{P}}(p)(a_1,\ldots,a_n) + \sum_i \pm p(a_1,\ldots,d_A(a_i),\ldots,a_n),\ \forall p \in \mathcal{P}, a_i \in A. \end{aligned}$$

Ainsi, chaque bord de $\mathcal{P}$ fournit une relation entre des éléments de A. Par conséquent, puisque l'on connait la différentielle dans $\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}$ grâce à la condition d), il suffit de développer

$$d_A(G_n^m(a,b,c,d)) = 0 = (dG_n^m)(a,b,c,d),\ \forall a,b,c,d \in A.$$

Le calcul de $(dG_n^1)(a,a,b,b)$ fournit les relations de Cartan, et le calcul de $(dG_n^m)(a,a,a,a)$ fournit les relations d'Adem.

De plus, on montre que si (A, d_A) est une algèbre *différentielle* graduée sur $\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}$ alors $H^*(A, d_A)$ est une algèbre à niveau instable sur $\mathcal{B}_2$. On retrouve le résultat classique sur la cohomologie singulière d'un espace topologique et plus généralement sur les algèbres sur une opérade $\mathcal{E}_\infty$: la cohomologie de toute algèbre sur une opérade $\mathcal{E}_\infty$ est une algèbre instable sur $\mathcal{B}_2$.

3.2.7. *Opérations cohomologiques secondaires stables.* Soit A une $\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}$-algèbre. On peut montrer que l'espace gradué $H^*(A)$ est muni d'une structure de $\mathcal{L}\mathrm{ev}^{AC}$-algèbre, non naturelle en A. Ainsi pour tout (m,p) on peut construire des opérations

$$\theta^{m,p} : H^q(A) \to H^{4q-p-1}(A)$$

avec $\theta^{m,p}(x) = G^m_{p+1}(x,x,x,x)$.

3.2.8. *Théorème* [4, 4.2.2]. *Dans le cas où $A = C^*(X,\mathbb{F}_2)$, les opérations $\theta^{m,p}$ coïncident avec les opération cohomologiques secondaires stables définies par Adams dans* [Ada60].

4. Des $\mathbb{S}$-modules aux espaces vectoriels gradués

Dans cette partie nous donnons un aperçu des résultats obtenus dans les articles [5], [7] et [6]. On étudie en particulier le comportement du foncteur oubli

$$\mathcal{O} : \textbf{S-mod} \to \textbf{grVect}$$

qui admet un adjoint à gauche, le foncteur symétrisation $\mathcal{S}$ (voir 4.2). Fixant une opérade $\mathcal{P}$, on peut définir dans la catégorie des $\mathbb{S}$-modules la notion de $\mathcal{P}$-algèbre tordue (voir 4.3). On a ainsi un diagramme de foncteurs oublis

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}-\text{algèbres tordues} & & \mathcal{P}-\text{algèbres} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \textbf{S-mod} & \xrightarrow{\mathcal{O}} & \textbf{grVect} \end{array}$$

Dans le théorème 4.3.4 nous montrons que le foncteur $\mathcal{O}$ admet alors un relèvement

$$\hat{\mathcal{O}} : \mathcal{P}-\text{algèbres tordues} \to \mathcal{P}-\text{algèbres}$$

et quand l'opérade est régulière il en admet un deuxième

$$\bar{\mathcal{O}} : \mathcal{P}-\text{algèbres tordues} \to \mathcal{P}-\text{algèbres (théorème 4.3.6).}$$

Dans l'article [5] nous étudions plus en détail le cas où $\mathcal{P}$ est une opérade de Hopf (voir partie 4.4) et obtenons des résultats sur les primitifs d'une telle opérade. Ce qui me permet dans l'article [6] de montrer que les foncteurs $\hat{\mathcal{O}}$ et $\bar{\mathcal{O}}$ ont un prolongement dans la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres de Hopf tordues (voir théorèmes 4.5.1 et 4.5.2). J'obtiens par ailleurs des résultats de rigidité utiles en combinatoire algébrique (voir parties 4.5.3 et 4.5.4). L'article [7] présenté dans la partie 4.6 se concentre sur le foncteur oubli des opérades dans les opérades non-symétriques appliqué à l'opérade $\mathcal{A}$s. Nous montrons les conséquences de la structure opéradique de $\mathcal{A}$s sur l'ordre de Bruhat faible du groupe symétrique, sur l'espace des primitifs de l'algèbre de Hopf de Malvenuto et Reutenauer et sur la description des idempotents de Dynkin.

Nous supposons ici que la catégorie $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces vectoriels (eventuellement gradués ou différentiels gradués).

4.1. **Quelques notations.** Une permutation $\sigma \in S_n$ s'écrit $(a_1, \ldots, a_n)$ avec $a_i = \sigma(i)$. On utilise également la notation matricielle: à toute permutation σ on associe la matrice de $M_n(\mathbb{Z})$ dont les coefficients sont donnés par $a^{\sigma}_{i,j} = \delta_{\sigma(j),j}$

La *standardisation* d'une suite d'entiers distincts $(a_1, \ldots, a_n)$ est l'unique permutation σ de S_n satisfaisant $\sigma(i) < \sigma(j)$ si et seulement si $a_i < a_j$. Par exemple

$$\mathrm{st}(3, 6, 1, 9) = (2, 3, 1, 4).$$

Pour tout sous-ensemble $S = \{s_1 < s_2 < \ldots < s_k\}$ de $[n]$ et toute permutation $\sigma \in S_n$, on note

$$\sigma|_S = \mathrm{st}(\sigma(s_1), \ldots, \sigma(s_k)) \in S_k \tag{6}$$

et $\sigma|_\emptyset = 1_0 \in S_0$.

Supposons $n = p_1 + \ldots + p_r$. Un $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$-*shuffle* est une permutation de S_n de la forme $(a_1, \ldots, a_n)^{-1}$ avec pour tout $0 \leq i \leq r-1$, $a_{p_1+\ldots+p_i+1} < \ldots < a_{p_1+\ldots+p_{i+1}}$ (par convention $p_0 = 0$). L'ensemble des $(p_1, \ldots, p_r)$-shuffles est noté $\mathrm{Sh}_{p_1,\ldots,p_r}$. Se donner un $(p_1, \ldots, p_r)$-shuffle σ équivaut à se donner une partition ordonnée de $[n]$ en r ensembles $S_i = \{a_{p_1+\ldots+p_i+1}, \ldots, a_{p_1+\ldots+p_{i+1}}\}$. On notera souvent la permutation σ par le symbole $(S_1, S_2, \ldots, S_r)$. Par exemple l'identité de S_{p+q} s'écrit $([p], p + [q])$.

$S_{p_1} \times \ldots \times S_{p_r}$ est un sous-groupe de S_n constitué des éléments

$$\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_r = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \sigma_r \end{pmatrix}, \sigma_i \in S_{p_i}.$$

L'ensemble $\mathrm{Sh}_{p_1,\ldots,p_r}$ est un système privilégié de représentants des classes à gauche modulo $S_{p_1} \times \ldots \times S_{p_r}$ dans S_n: pour toute permutation $\sigma \in S_n$, il existe un unique $(r+1)$-uplet $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, \xi) \in S_{p_1} \times \ldots \times S_{p_r} \times \mathrm{Sh}_{p_1,\ldots,p_r}$ tel que

$$\sigma = (\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_r)\xi.$$

On notera $Z_{p,q}$ le (p, q)-shuffle $Z_{p,q} = (q+1, \ldots, q+p, 1, \ldots, q)$. C'est le (p, q)-shuffle maximal pour l'ordre de Bruhat faible (voir 4.6.1).

4.2. **Retour sur les $\mathbb{S}$-modules.** D'après Joyal [Joy86], la donnée d'un $\mathbb{S}$-module (voir 1.1) est équivalente à la donnée d'un foncteur contravariant de la categorie **Bij** des ensembles finis et des bijections dans la categorie $\mathcal{C}$. Cette équivalence a la forme suivante: à un $\mathbb{S}$-module M on associe le foncteur

$$\mathbb{M}(S) := \bigoplus_{i_*: S \to \{1,\ldots,r\}} M(r)/\equiv$$

où r est le cardinal de l'ensemble S et i_* est une bijection. La relation d'équivalence est donnée par $(m \cdot \sigma, i_*) \equiv (m, \sigma \circ i_*)$. Réciproquement le squelette d'un tel foncteur est un $\mathbb{S}$-module. L'action du groupe symétrique S_n sur $M(n) := \mathbb{M}(\{1, \ldots, n\})$ est $m \cdot \sigma := \mathbb{M}(\sigma)(m)$.

4.2.1. *Le foncteur oubli.* Le foncteur $\mathcal{O}$: **S-mod** $\to$ **grVect** qui à un $\mathbb{S}$-module M associe l'espace vectoriel gradué $M_* := \oplus_{n\geq 0} M(n)$ admet un adjoint à gauche: le foncteur symétrisation $\mathcal{S}$: **grVect** $\to$ **S-mod** qui à un espace vectoriel gradué V_* associe le $\mathbb{S}$-module $\mathcal{S}V(n) = V_n \otimes \mathbf{k}[S_n]$ où l'action du groupe symétrique est la multiplication à droite. Un $\mathbb{S}$-module est *régulier* s'il est obtenu par symétrisation d'un espace vectoriel gradué.

4.2.2. *Produit tensoriel de* $\mathbb{S}$*-modules.* La catégorie des foncteurs de **Bij** dans $\mathcal{C}$ est munie d'un produit tensoriel $\otimes^{\mathbb{S}}$ donné par

$$(\mathbb{M} \otimes^{\mathbb{S}} \mathbb{N})(U) = \oplus_{S\sqcup T=U} \mathbb{M}(S) \otimes \mathbb{N}(T),$$

où la somme est prise sur l'ensemble des couples (S,T) tels que $S \cup T = U$ et $S \cap T = \emptyset$. Transposé aux $\mathbb{S}$-modules ce produit tensoriel s'écrit

$$\begin{aligned}(M \otimes^{\mathbb{S}} N)(n) &= \oplus_{p+q=n} M(p) \otimes N(q) \otimes_{\mathbf{k}[S_p\times S_q]} \mathbf{k}[S_n] \\ &= \oplus_{p+q=n} M(p) \otimes N(q) \otimes \mathbf{k}[\mathrm{Sh}_{p,q}].\end{aligned}$$

Ainsi tout élément de $(M \otimes^{\mathbb{S}} N)(n)$ s'écrit de manière unique $m \otimes n \otimes (I,J)$ avec $m \in M(p), n \in N(q)$ et (I,J) une partition ordonnée de $[p+q]$. L'isomorphisme de symétrie $\tau : M \otimes^{\mathbb{S}} N \to N \otimes^{\mathbb{S}} M$ est donné par

$$\tau(m \otimes n \otimes (I,J)) = n \otimes m \otimes (J,I).$$

Cet isomorphisme induit une action à gauche du groupe symétrique S_k sur $M^{\otimes^{\mathbb{S}} k}$ de la manière suivante

$$\begin{aligned}&\sigma \cdot (m_1 \otimes \ldots \otimes m_k \otimes (I_1,\ldots,I_k)) = \\ &\qquad m_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes m_{\sigma^{-1}(k)} \otimes (I_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,I_{\sigma^{-1}(k)}).\end{aligned} \tag{7}$$

L'action à droite de S_n sur $M^{\otimes^{\mathbb{S}} k}(n)$ est donnée par

$$\begin{aligned}&(m_1 \otimes \ldots \otimes m_k \otimes (I_1,\ldots,I_k)) \cdot \sigma = \\ &\qquad m_1 \cdot \sigma|_{\sigma^{-1}(I_1)} \otimes \ldots \otimes m_k \cdot \sigma|_{\sigma^{-1}(I_k)} \otimes (\sigma^{-1}(I_1),\ldots,\sigma^{-1}(I_k)).\end{aligned} \tag{8}$$

Le foncteur symétrisation préserve le produit tensoriel (c'est un foncteur monoidal), car $\mathcal{S}(A \otimes B) = \mathcal{S}A \otimes^{\mathbb{S}} \mathcal{S}B$, mais le foncteur oubli n'est pas un foncteur monoidal.

4.3. **Algèbres tordues sur une opérade.**

4.3.1. *Algèbres associatives et algèbres de Lie tordues.* La notion d'algèbre de Lie tordue a été introduite par Barratt en 1978 dans [Bar78] dans le but d'étudier les invariants homotopiques en topologie algébrique. Une *algèbre de Lie tordue* est un $\mathbb{S}$-module L muni d'un crochet $\{,\} : L \otimes L \to L$ qui satisfait les relations suivantes: pour tous $x \in L(n), y \in L(m), z \in L(p)$,

$$\{y, x\} = -\{x, y\} \cdot Z_{m,n},$$
$$\{x, \{y, z\}\} + \{y, \{z, x\}\} \cdot Z_{n,m+p} + \{z, \{x, y\}\} \cdot Z_{n+m,p} = 0.$$

Si l'action du groupe symétrique sur $L(n)$ est triviale, on retrouve la notion classique d'algèbre de Lie. Si c'est la représentation signature, on retrouve la notion classique d'algèbre de Lie graduée.

Une *algèbre associative tordue* est une algèbre associative dans la catégorie des $\mathbb{S}$-modules: le produit tensoriel considéré pour définir le produit associatif est $\otimes^{\mathbb{S}}$. Toute algèbre associative tordue peut être munie d'une structure d'algèbre de Lie tordue grâce au crochet $\{x, y\} = xy - yx \cdot Z_{n,m}$.

Par exemple, le $\mathbb{S}$-module $(\mathbf{k}[S_n])_{n\geq 0}$ est muni d'une structure d'algèbre associative tordue donné par $\sigma\tau = \sigma \times \tau$. Ainsi la structure de Lie tordue sur ce $\mathbb{S}$-module est donnée par

$$\{\sigma, \tau\} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \tau & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Une *algèbre de Hopf tordue* est une algèbre de Hopf dans la catégorie des $\mathbb{S}$-modules. Stover a démontré dans [Sto93] que la catégorie des algèbres de Hopf tordues connexes est équivalente à la catégorie des algèbres de Lie tordue, à l'aide d'un foncteur algèbre enveloppante, ceci en toute caractéristique. Ces résultats sont exploités dans notre article [5] avec F. Patras (voir 4.4). Stover remarque aussi un fait surprenant qui a été démontré par Patras et Reutenauer dans [PR04]: toute algèbre de Hopf tordue donne naissance à deux algèbres de Hopf classiques. En particulier toute algèbre associative tordue donne naissance à deux algèbres associatives. Dans mon article [6], j'étends ce résultat au cas des algèbres sur une opérade, en étudiant attentivement le comportement du foncteur oubli des $\mathbb{S}$-modules dans **grVect** par rapport aux structures opéradiques. Je montre que les résultats de Stover s'étendent partiellement à toute opérade et, si l'opérade est régulière, alors on peut étendre totalement ces résultats (voir 4.3 et 4.4).

4.3.2. *Pléthysme, opérade et algèbre tordue.* La catégorie des $\mathbb{S}$-modules est munie d'une autre structure monoidale (non symétrique) appelée pléthysme et définie comme suit: soient M et N deux $\mathbb{S}$-modules, alors

$$(M \circ^{\mathbb{S}} N)(n) = \oplus_{k\geq 0} M(k) \otimes_{S_k} (N^{\otimes^{\mathbb{S}} k})(n).$$

L'action du groupe symétrique S_k à gauche sur $N^{\otimes^{\mathbb{S}} k}$ a été définie dans la relation (7) et celle de S_n à droite sur $(N^{\otimes^{\mathbb{S}} k})(n)$ dans la relation (8). L'unité pour $\circ^{\mathbb{S}}$ est donnée par le $\mathbb{S}$-module I concentré en arité 1 et tel que

$I(1) = \mathbf{k}$. Ainsi un $\mathbb{S}$-module M induit un endofoncteur de **S-mod**:

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{F}^{\mathbb{S}}_M : & \mathbf{S\text{-}mod} & \to & \mathbf{S\text{-}mod} \\ & N & \mapsto & M \circ^{\mathbb{S}} N \end{array}$$

tel que $\mathbb{F}^{\mathbb{S}}_I = \mathrm{id}$ et $\mathbb{F}^{\mathbb{S}}_M F^{\mathbb{S}}_N = \mathbb{F}^{\mathbb{S}}_{M \circ^{\mathbb{S}} N}$. Dans ce contexte, une opérade $\mathcal{P}$ est un monoïde dans la catégorie $(\mathbf{S\text{-}mod}, \circ)$, ou encore le foncteur $\mathbb{F}^{\mathbb{S}}_{\mathcal{P}}$ est une monade dans **S-mod**. Les relations d'équivariance (2) et (3) sont alors une conséquence directe des relations (7) et (8).

Une *algèbre tordue* sur une opérade $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{S}$-module M muni d'une application $\mu_M : \mathcal{P} \circ^{\mathbb{S}} M \to M$ qui vérifie les conditions d'associativité par rapport à la structure de monoïde $\mathcal{P} \circ^{\mathbb{S}} \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ de $\mathcal{P}$. Dans la littérature on trouve plus souvent la terminologie *$\mathcal{P}$-module à gauche* (voir [Fre04]).

Exemples. Si $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$ ou $\mathcal{P} = \mathcal{L}ie$ on retrouve les notions décrites en 4.3.1. Un exemple de $\mathcal{P}$-algèbre tordue est le $\mathbb{S}$-module $\mathcal{P}$ lui-même car c'est la $\mathcal{P}$-algèbre tordue libre engendrée par le $\mathbb{S}$-module I: $\mathcal{P} \circ^{\mathbb{S}} I = \mathcal{P}$. Plus généralement, la $\mathcal{P}$-algèbre tordue libre engendrée par un $\mathbb{S}$-module M est donnée par $\mathcal{P} \circ^{\mathbb{S}} M$.

Si l'on se donne un $\mathbb{S}$-module M et un espace vectoriel gradué V, il existe un pléthysme: $\mathbf{S\text{-}mod} \times \mathbf{grVect} \to \mathbf{grVect}$ donné par

$$M \circ V = \oplus_{k \geq 0} M(k) \otimes_{S_k} (V^{\otimes k}),$$

où le produit tensoriel est le produit tensoriel classique des espaces vectoriels gradués. On retrouve alors la notion générale d'algèbre sur une opérade $\mathcal{P}$: c'est un espace vectoriel V muni d'une application $\mu_V : \mathcal{P} \circ V \to \mathcal{P}$ compatible avec la structure de monoïde de $\mathcal{P}$. Un $\mathbb{S}$-module M donne aussi naissance à un foncteur dans la catégorie **grVect**:

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{F}_M : & \mathbf{grVect} & \to & \mathbf{grVect} \\ & V & \mapsto & M \circ V \end{array}$$

tel que $\mathbb{F}_I = \mathrm{id}$ et $\mathbb{F}_M \mathbb{F}_N = \mathbb{F}_{M \circ^{\mathbb{S}} N}$. Ainsi la $\mathcal{P}$-algèbre libre engendrée par l'espace vectoriel V est $\mathcal{P} \circ V$ et la $\mathcal{P}$-algèbre libre engendrée par l'espace vectoriel $\mathbf{k}$ est $\oplus_{n \geq 0} \mathcal{P}(n)/S_n$.

Les deux foncteurs $\mathbb{F}^{\mathbb{S}}_M$ et $\mathbb{F}_M$ sont distincts. Prenons par exemple le $\mathbb{S}$-module $\mathcal{C}$om. Pour un espace vectoriel V considéré comme $\mathbb{S}$-module concentré en arité 1 on a

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{\mathcal{C}\mathrm{om}}(V) &= \oplus_{n \geq 0} \mathbf{k} \otimes_{S_n} V^{\otimes n} = S(V), \\ \mathbb{F}^{\mathbb{S}}_{\mathcal{C}\mathrm{om}}(V) &= \oplus_{n \geq 0} \mathbf{k} \otimes_{S_n} V^{\otimes^{\mathbb{S}} n} = T(V). \end{aligned}$$

Donc $S(V)$ est l'algèbre *commutative* libre engendrée par V alors que l'algèbre tensorielle $T(V)$ est l'algèbre *commutative tordue* libre engendrée par le $\mathbb{S}$-module V d'arité 1.

4.3.3. *Foncteurs de la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres tordues dans la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres.* D'après les remarques faites précédemment on voit que pour toute opérade $\mathcal{P}$, l'espace vectoriel gradué $\mathcal{O}(\mathcal{P})$ n'est pas nécessairement une $\mathcal{P}$-algèbre. C'est une conséquence du fait que le foncteur $\mathcal{O}$ n'est pas monoidal. Par exemple $T(V)$ n'est a priori pas commutative alors que c'est l'algèbre commutative tordue libre sur V. L'exemple de $\mathcal{P} = \mathcal{L}\mathrm{ie}$ est aussi frappant. Si l'on munit l'espace vectoriel $\mathcal{O}(\mathcal{L}\mathrm{ie})$ du crochet $\{,\}$ induit par la composition

$$\mathcal{L}\mathrm{ie}(2) \otimes \mathcal{L}\mathrm{ie}(n) \otimes \mathcal{L}\mathrm{ie}(m) \to \mathcal{L}\mathrm{ie}(n+m), \tag{10}$$

on trouve une structure d'algèbre de Lie tordue qui n'est pas une structure d'algèbre de Lie. Pourtant pour l'opérade $\mathcal{A}\mathrm{s}$, le produit induit par la composition

$$\mathcal{A}\mathrm{s}(2) \otimes \mathcal{A}\mathrm{s}(n) \otimes \mathcal{A}\mathrm{s}(m) \to \mathcal{A}\mathrm{s}(n+m),$$

défini en 4.3.1 reste un produit associatif. Ceci est du au fait que $\mathcal{A}\mathrm{s}$ est une opérade régulière (voir 4.3.5). Cependant, je montre que quelque soit l'opérade $\mathcal{P}$, il existe une structure de $\mathcal{P}$-algèbre sur $\mathcal{O}(M)$ lorsque M est une $\mathcal{P}$-algèbre tordue. Si $\mathcal{P}$ est une opérade régulière, on peut définir une deuxième structure de $\mathcal{P}$-algèbre sur M.

4.3.4. *Théorème* [6, 2.3.1]. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade. Il existe un foncteur*

$$\hat{\mathcal{O}} : \mathcal{P} - \text{algèbres tordues} \to \mathcal{P} - \text{algèbres}$$

qui relève le foncteur $\mathcal{O}$ aux $\mathcal{P}$-algèbres tordues. Plus précisément, si M est une $\mathcal{P}$-algèbre tordue. L'espace vectoriel gradué $\hat{\mathcal{O}}(M)$ a la structure de $\mathcal{P}$-algèbre suivante: pour tous $p \in \mathcal{P}(n), m_i \in M(l_i)$

$$\hat{\mu}(p \otimes m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) = \mu_M(p \otimes m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) \cdot q_{l_1+\ldots+l_n},$$

où $q_{l_1+\ldots+l_n}$ est la somme de tous les $(l_1, \ldots, l_n)$-shuffles.

Par exemple, si $\mathcal{P} = \mathcal{A}\mathrm{s}$, le nouveau produit s'exprime de la manière suivante

$$\sigma \hat{\cdot} \tau = \sum_{\xi \in \mathrm{Sh}_{p,q}} (\sigma \times \tau)\xi.$$

C'est le produit défini par Malvenuto et Reutenauer dans [MR95] sur l'espace vectoriel $\mathcal{H}_{\mathrm{MR}} = \oplus_{n\geq 0} \mathbf{k}[S_n]$.

4.3.5. *Cas des opérades régulières.* La catégorie des espaces vectoriels gradués admet aussi un pléthysme défini par

$$V \circ^g W = \oplus_{k\geq 0} V_k \otimes W^{\otimes k}.$$

Une *opérade non symétrique* est un monoïde dans la catégorie $(\mathbf{grVect}, \circ^g)$. Le foncteur symétrisation est monoidal par rapport au pléthysme:

$$\mathcal{S}(V \circ^g W) = \mathcal{S}(V) \circ^{\mathbb{S}} \mathcal{S}(W).$$

Par conséquent l'image d'une opérade non symétrique par le foncteur symétrisation est une opérade, que l'on appelle *opérade régulière*. Par exemple l'opérade $\mathcal{A}$s est régulière: $\mathcal{A}\mathrm{s} = \mathcal{S}(\mathcal{C}\mathrm{om})$ où $\mathcal{C}$om est vue comme opérade non symétrique.

4.3.6. *Théorème* [6, 2.4.3]. *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}})$ une opérade régulière. Il existe un autre foncteur*

$$\bar{\mathcal{O}} : \mathcal{P} - \text{algèbres tordues} \to \mathcal{P} - \text{algèbres}$$

qui relève le foncteur $\mathcal{O}$ aux $\mathcal{P}$-algèbres tordues. Plus précisément, si M est une $\mathcal{P}$-algèbre tordue, l'espace vectoriel gradué $\bar{\mathcal{O}}(M)$ a la structure de $\mathcal{P}$-algèbre suivante: pour tous $p \in \tilde{\mathcal{P}}(n), m_i \in M(l_i)$

$$\bar{\mu}(p \otimes m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) = \mu_M(p \otimes m_1 \otimes \ldots \otimes m_n).$$

4.4. **Opérades de Hopf.** L'étude des opérades de Hopf et le lien avec le théorème de Cartier-Milnor-Moore dans le contexte des algèbres de Hopf tordues démontré par Stover est fait dans l'article [5] en commun avec F. Patras. La donnée d'un opérade de Hopf $\mathcal{P}$ est nécessaire pour définir une structure de $\mathcal{P}$-algèbre sur le produit tensoriel de deux $\mathcal{P}$-algèbres.

4.4.1. *Définition.* Une *opérade de Hopf* $\mathcal{P}$ est une opérade dans la catégorie des cogèbres counitaires. Plus précisément, on se donne pour tout n une structure de cogèbre coassociative sur $\mathcal{P}(n)$, $\delta_n : \mathcal{P}(n) \to \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(n)$ et une counité $\epsilon_n : \mathcal{P}(n) \to \mathbf{k}$, compatibles avec la structure d'opérade. Par exemple les opérades $\mathcal{C}$om et $\mathcal{A}$s sont des opérades Hopf alors que l'opérade $\mathcal{L}$ie ne l'est pas.

On suppose par la suite que $\mathcal{P}$ est connexe c'est-à-dire $\mathcal{P}(0) = \mathbf{k}\,1_0$ et $\mathcal{P}(1) = \mathbf{k}\,1_1$. Comme dans le cas du groupe symétrique (voir relation (6)), on peut définir des opérations de restriction pour tout $S \subset [n]$ de la manière suivante: soit $\mu \in \mathcal{P}(n)$

$$\mu|_S = \mu(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}(|S|), \text{ avec } \begin{cases} x_i = 1_1, & \text{si } i \in S \\ x_i = 1_0, & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

Lorsque l'opérade $\mathcal{P}$ est de Hopf, la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres (tordues ou non) est stable par le produit tensoriel, comme le montre le théorème suivant.

4.4.2. *Théorème* [Moe02], [5, 2.1.3]. *Si $\mathcal{P}$ est une opérade de Hopf et V et W sont des $\mathcal{P}$-algèbres (resp. tordues), alors $V \otimes W$ (resp. $V \otimes^{\mathbb{S}} W$) est une $\mathcal{P}$-algèbre (resp. tordue).*

4.4.3. *Définition.* Soit $\mathcal{P}$ une opérade de Hopf connexe. Une *$\mathcal{P}$-algèbre de Hopf tordue* est une $\mathcal{P}$-algèbre tordue M munie d'un coproduit $\Delta_M : M \to M \otimes^{\mathbb{S}} M$ coassociatif et d'une counité $\epsilon_M : M \to \mathbf{1}$ où $\mathbf{1}$ est l'unité pour le produit tensoriel $\otimes^{\mathbb{S}}$, tels que Δ_M et ϵ_M sont des morphismes de $\mathcal{P}$-algèbres tordues. Une *$\mathcal{P}$-algèbre de Hopf* est une $\mathcal{P}$-algèbre V qui vérifie les mêmes hypothèses que précedemment en remplaçant $\otimes^{\mathbb{S}}$ par $\otimes$. Si $\mathcal{P} = \mathcal{A}$s c'est la notion classique d'algèbres de Hopf. Le théorème qui suit nous donne des exemples de $\mathcal{P}$-algèbres de Hopf tordues.

4.4.4. *Théorème* [5, 2.2.3]. *Toute opérade de Hopf connexe* $(\mathcal{P}, \delta)$ *est une* $\mathcal{P}$*-algèbre de Hopf tordue pour le coproduit*

$$\Delta_{\mathcal{P}}(\mu) = \sum_{S \sqcup T = [n]} \delta(\mu)|_{(S,T)} \otimes (S,T),$$

où $\mu \in \mathcal{P}(n)$*,* $S \sqcup T = [n]$ *désigne une partition ordonnée de* $[n]$ *et* $(a \otimes b)|_{(S,T)} := a|_S \otimes b|_T$*. Plus généralement toute* $\mathcal{P}$*-algèbre tordue libre est une* $\mathcal{P}$*-algèbre de Hopf tordue.*

En fait ce coproduit est l'unique morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres satisfaisant $\Delta(1_1) = 1_0 \otimes 1_1 + 1_1 \otimes 1_0$. Par exemple l'opérade $\mathcal{A}$s est une opérade de Hopf pour le coproduit $\delta(\sigma) = \sigma \otimes \sigma$ et $\epsilon(\sigma) = 1$. Donc $\oplus_{n \geq 0} \mathbf{k}[S_n]$ est une algèbre de Hopf tordue pour le coproduit

$$\Delta(\sigma) = \sum_{S \sqcup T = [n]} \sigma|_S \otimes \sigma|_T \otimes (S,T). \tag{11}$$

On retrouve les structures présentes dans l'article de Patras et Schocker [PS05].

L'intérêt des algèbres de Hopf repose beaucoup sur la structure des primitifs. Dans le cas des opérades de Hopf nous montrons le théorème suivant:

4.4.5. *Théorème* [5, 2.3.2]. *L'espace des primitifs (par rapport à* $\Delta_{\mathcal{P}}$*) d'une opérade de Hopf* $\mathcal{P}$ *vue comme* $\mathcal{P}$*-algèbre de Hopf tordue est une sous-opérade de* $\mathcal{P}$*.*

On retrouve que l'espace des primitifs de $\mathcal{A}$s est l'opérade $\mathcal{L}$ie. On montre également que l'espace des primitifs de l'opérade $\mathcal{P}$ois définissant les algèbres de Poisson est de Hopf et l'opérade de ses primitifs est aussi $\mathcal{L}$ie [5, théorème 5.3]. De plus, puisqu'il existe un morphisme d'opérades $\mathcal{A}\text{s} \to \mathcal{P}\text{ois}$, toute algèbre de Poisson tordue est *a fortiori* une algèbre associative tordue. Le théorème de Stover nous permet de conclure que l'algèbre de Hopf tordue $\mathcal{P}$ois est l'algèbre enveloppante de ses primitifs. Dans ce contexte on obtient le résultat suivant.

4.4.6. *Corollaire* [5]. *En tant qu'algèbres de Hopf tordues, on a* $\mathcal{A}\text{s} = U(\mathcal{L}\text{ie})$ *et* $\mathcal{P}\text{ois} = U(\mathcal{L}\text{ie})$*. La structure de Lie tordue sur le* $\mathbb{S}$*-module* $\mathcal{L}$ie *est dans le cas* $\mathcal{A}$s *celle provenant de la structure opéradique (voir* (10)*), et dans le cas* $\mathcal{P}$ois *la structure de Lie tordue triviale.*

4.5. **Algèbres de Hopf tordues sur une opérade de Hopf.** Les résultats de Stover et Patras-Reutenauer sont plus fins: toute algèbre de Hopf tordue donne naissance à deux algèbres de Hopf classiques. Le but de l'article [6] est d'étendre ce résultat aux $\mathcal{P}$-algèbres de Hopf où $\mathcal{P}$ est une opérade de Hopf. Là encore, on distingue le cas des opérades régulières des autres. On a ainsi deux résultats.

4.5.1. *Théorème* [6, 3.2.2]. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade de Hopf et M une $\mathcal{P}$-algèbre de Hopf tordue. Il existe un coproduit sur la $\mathcal{P}$-algèbre $\hat{\mathcal{O}}(M)$ qui lui confère une structure de $\mathcal{P}$-algèbre de Hopf dans la catégorie des espaces vectoriels gradués. Plus précisément, si $\Delta_M : M \to M \otimes^{\mathbb{S}} M$ est donné par*

$$\Delta_M(m) = \sum_{S \sqcup T = [n]} m_S^1 \otimes m_T^2 \otimes (S, T), \ \forall m \in M(n),$$

alors le coproduit sur $\hat{\mathcal{O}}(M)$ est donné par

$$\bar{\Delta}_M(m) = \sum_{p+q=n} m_{[p]}^1 \otimes m_{p+[q]}^2, \ \forall m \in M(n).$$

4.5.2. *Théorème* [6, 3.3.1]. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade de Hopf régulière et M une $\mathcal{P}$-algèbre de Hopf tordue. Il existe un coproduit sur la $\mathcal{P}$-algèbre $\bar{\mathcal{O}}(M)$ qui lui confère une structure de $\mathcal{P}$-algèbre de Hopf dans la catégorie des espaces vectoriels gradués. Plus précisément, si $\Delta_M : M \to M \otimes^{\mathbb{S}} M$ est donné par*

$$\Delta_M(m) = \sum_{S,T} m_S^1 \otimes m_T^2 \otimes (S, T)$$

alors le coproduit sur $\bar{\mathcal{O}}(M)$ est donné par

$$\hat{\Delta}_M(m) = \sum_{S \sqcup T = [n]} m_S^1 \otimes m_T^2, \ \forall m \in M(n).$$

En particulier lorsque $\mathcal{P} = \mathcal{A}$s, on retrouve les résultats de Stover, Patras et Reutenauer: toute algèbre de Hopf tordue (A, m, Δ) donne naissance à deux algèbres de Hopf $(A_*, \hat{m}, \bar{\Delta})$ et $(A_*, \bar{m}, \hat{\Delta})$.

Dans l'article [6], j'applique ces résultats à divers types d'algèbre de Hopf combinatoires. Plus précisément je montre qu'elles proviennent d'une opérade $\mathcal{P}$, munie d'un morphisme d'opérades $\mathcal{A}\mathrm{s} \to \mathcal{P}$, vue comme algèbre de Hopf tordue. Par exemple l'algèbre de Hopf de Malvenuto-Reutenauer (voir 4.5.4) provient de l'opérade $\mathcal{A}$s, et l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques non commutatives, baptisée $NCQSym$ par Bergeron et Zabrocki dans [BZ05], provient de l'opérade définissant les algèbres tridendriformes commutatives. Cette dernière a pour base les partitions ordonnées de l'ensemble $[n]$. Elle est liée aux faces du permutoèdre. L'algèbre de Hopf de Malvenuto-Reutenauer est liée aux sommets du permutoèdre. Bergeron et Zabrocki montrent que $NCQSym$ est une algèbre de Hopf libre et co-libre. Dans mon article, je montre que de tels résultats proviennent de la théorie des opérades, que j'illustre dans la partie 4.5.4. J'obtiens des théorèmes de structure plus fins dans le cadre d'opérades régulières et je montre en particulier la chose suivante:

4.5.3. *Théorème* [6, 4.2.2]. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade de Hopf connexe et M un $\mathbb{S}$-module. Supposons qu'il existe un morphisme d'opérades $\mathcal{A}s \to \mathcal{P}$. Alors le $\mathbb{S}$-module $A := \mathcal{P} \circ^{\mathbb{S}} M$ est muni d'une structure d'algèbre de Hopf tordue dont on note μ et Δ les produits et coproduits. L'algèbre de Hopf $(\mathcal{O}(A), \bar{\mu}, \hat{\Delta})$ est libre en tant qu'algèbre associative. L'algèbre de Hopf $(\mathcal{O}(A), \hat{\mu}, \bar{\Delta})$ est colibre en tant que cogèbre cossociative. Si $\mathbf{k}$ est de caractéristique nulle, si Δ est cocommutative alors $\mathrm{Prim}_{\hat{\Delta}}(\mathcal{O}(A))$ est isomorphe en tant qu'algèbre de Lie à l'algèbre de Lie libre sur $\mathrm{Prim}_{\bar{\Delta}}(\mathcal{O}(A))$.*

La démonstration de ce théorème suit les étapes suivantes: A est une $\mathcal{P}$-algèbre de Hopf tordue d'après le théorème 4.4.4. Je démontre le lemme suivant: pour toute algèbre de Hopf tordue (X, m, Δ) le triplet $(\mathcal{O}(X), \bar{m}, \bar{\Delta})$ est une algèbre de Hopf unitaire infinitésimale. Puis j'applique le théorème de rigidité de Loday et Ronco (voir 2.3.1) pour obtenir les résultats de liberté et coliberté. Dans le cas cocommutatif, de caractéristique nulle, j'applique le théorème de Poincaré-Birkoff-Witt pour obtenir les résultats sur les primitifs.

4.5.4. *Exemple: l'algèbre de Hopf de Malvenuto-Reutenauer.* L'algèbre de Hopf de Malvenuto-Reutenauer est l'espace vectoriel gradué $\mathcal{H}_{\mathrm{MR}} := \oplus_{n \geq 0} \mathbf{k}[S_n]$, muni des produit et coproduit suivants

$$\sigma \hat{\cdot} \tau = \sum_{\xi \in \mathrm{Sh}_{p,q}} (\sigma \times \tau)\xi, \ \forall \sigma \in S_p, \tau \in S_q$$

$$\bar{\Delta}(\sigma) = \sum_{i=0}^{p} \mathrm{st}(\sigma(1), \ldots, \sigma(i)) \otimes \mathrm{st}(\sigma(i+1), \ldots, \sigma(p)).$$

C'est la structure de Hopf définie sur $\hat{\mathcal{O}}(\mathcal{A}s)$. Donc cette algèbre de Hopf est colibre. Ce résultat est démontré différemment dans l'article [MR95]. Malvenuto et Reutenauer montrent aussi que cette algèbre de Hopf est auto-duale et en déduisent qu'elle est libre. Grâce à la théorie des opérades, on peut montrer d'une autre manière qu'elle est libre. En effet, il existe une autre structure d'opérade sur le $\mathbb{S}$-module $(\mathbf{k}[S_n])_{n \geq 1}$ qui est noté $\mathcal{Z}$in: le dual quadratique de cette opérade définit les algèbres de Leibniz que j'ai utilisée à des fins d'homotopie rationnelle dans ma thèse (voir [Liv98b]). L'opérade $\mathcal{Z}$in est de Hopf et est munie d'un morphisme $\mathcal{A}s \to \mathcal{Z}$in. Par conséquent le $\mathbb{S}$-module $\mathcal{Z}$in est une algèbre de Hopf tordue $(\mathcal{Z}\mathrm{in}, \mu, d)$. Par un rapide calcul, je montre que $\hat{\cdot} = \bar{\mu}$ et j'en déduis, par le théorème 4.5.3, que l'algèbre de Hopf de Malvenuto-Reutenauer est libre.

4.6. **Etude d'un cas particulier: l'opérade $\mathcal{A}s$ et l'ordre de Bruhat faible sur le groupe symétrique.** Dans l'article [7] en commun avec Marcelo Aguiar, nous utilisons la structure d'opérade non symétrique de $\mathcal{A}s$ pour obtenir des informations sur l'algèbre de Hopf de Malvenuto-Reutenauer (voir 4.5.4). Nous nous intéressons particulièrement aux changements de base. On notera $(F_\sigma)_{\sigma\in S_n}$ la base canonique de $\mathbf{k}[S_n]$, appelée base fondamentale. Ainsi dans l'opérade $\mathcal{A}s$ on a la formule suivante

$$F_\sigma \circ_i F_\tau = F_{\sigma\circ_i\tau} \quad \text{(voir 1.3.2)}.$$

4.6.1. *Ordre de Bruhat faible sur le groupe symétrique.* L'ensemble des inversions d'une permutation $\sigma \in S_n$ est

$$\mathrm{Inv}(\sigma) \ := \ \{(i,j) \in [n]\times[n] \mid i<j \text{ et } \sigma_i > \sigma_j\}\,.$$

Cet ensemble caractérise la permutation σ.

Soient $\sigma, \tau \in S_n$. L'*ordre faible de Bruhat* sur S_n est un ordre partiel donné par

$$\sigma \leq \tau \iff \mathrm{Inv}(\sigma) \subseteq \mathrm{Inv}(\tau)\,.$$

La *fonction de Möbius* $\mu(\sigma,\tau)$ est définie par récurrence

$$\sum_{\sigma\leq\rho\leq\tau} \mu(\sigma,\rho) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \tau\,, \\ 0 & \text{si } \sigma < \tau\,. \end{cases}$$

Elle prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$.

La base *monomiale* $\mathcal{M} = \{M_\sigma\}_{\sigma\in S_n}$ de $\mathbf{k}[S_n]$ est donnée par la formule

$$M_\sigma := \sum_{\sigma\leq\tau} \mu(\sigma,\tau) F_\tau\,,$$

ou encore par inversion de Möbius,

$$F_\sigma = \sum_{\sigma\leq\tau} M_\tau\,.$$

L'intérêt de la base monomiale réside dans le fait qu'elle donne une description explicite des primitifs de l'algèbre de Hopf de Malvenuto-Reutenauer (voir 4.6.3). Le théorème principal de l'article donne le comportement de la base monomiale par rapport aux compositions de l'opérade $\mathcal{A}s$ vue comme opérade non symétrique. Plus précisément

4.6.2. *Théorème* [7, 1.1]. *Pour tous $\sigma \in S_n$, $\tau \in S_m$, et $1 \leq i \leq n$,*

$$M_\sigma \circ_i M_\tau = \sum_{\sigma\circ_i\tau\leq\rho\leq T_i(\sigma,\tau)} M_\rho\,.$$

En d'autres termes, la composition de deux éléments de $\mathcal{M}$ est une somme d'éléments de $\mathcal{M}$ pris dans un intervalle du groupe symétrique pour l'ordre de Bruhat faible une et une seule fois. Dans le théorème, $T_i : S_n \times S_m \to S_{n+m-1}$ est une application définissant la borne supérieure de l'intervalle. La démonstration utilise essentiellement des outils combinatoires.

4.6.3. *Primitifs et filtration coradicale de l'algèbre de Hopf de Malvenuto-Reutenauer.* On rappelle que le coproduit de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{\mathrm{MR}}$ de Malvenuto-Reutenauer est donné par

$$\bar{\Delta}(F_\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} F_{\mathrm{st}(\sigma_1,\ldots,\sigma_i)} \otimes F_{\mathrm{st}(\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n)}\,.$$

L'itération de ce coproduit est noté $\bar{\Delta}^{(k)}$:

$$\bar{\Delta}^{(1)} := \bar{\Delta} \quad \text{and} \quad \bar{\Delta}^{(k+1)} := (\bar{\Delta} \otimes \mathrm{id}^{\otimes k}) \circ \bar{\Delta}^{(k)}\,.$$

Soit $k \geq 1$. La *filtration coradicale* est donnée par

$${\mathcal{H}_{\mathrm{MR}}}^{(k)} := \ker(\bar{\Delta}^{(k+1)} : \mathcal{H}_{\mathrm{MR}} \to {\mathcal{H}_{\mathrm{MR}}}^{\otimes(k+2)})\,.$$

La première composante ${\mathcal{H}_{\mathrm{MR}}}^{(0)}$ est l'espace des éléments primitifs de $\mathcal{H}_{\mathrm{MR}}$. Posons $\mathcal{A}^{(k)}(n) = {\mathcal{H}_{\mathrm{MR}}}^{(k)} \cap \mathbf{k}[S_n] \subset \mathcal{A}\mathrm{s}(n)$ et $\mathcal{A}^{(k)} = ((\mathcal{A})^{(k)}(n))_{n>0}$, la famille correspondante.

Par définition, une permutation $\sigma \in S_n$ a une *descente globale* en $p \in [n-1]$ si

$$\forall\ i \leq p \text{ et } j \geq p+1\,,\ \sigma_i > \sigma_j\,.$$

Aguiar et Sottile ont démontré dans [AS05, 6.3] qu'une base de $\mathcal{A}^{(k)}(n)$ est donnée par les M_σ tels que $\sigma \in S_n$ a au plus k descentes globales. Ce résultat combiné avec le théorème 4.6.2 donne le théorème suivant:

4.6.4. *Théorème* [7, 2.1]. *La famille $\mathcal{A}^{(k)}$ est une filtration de l'opérade non symétrique $\mathcal{A}\mathrm{s}$, c'est-à-dire pour tous $n, m \geq 1$, $k, h \geq 0$, et $i = 1, \ldots, n$*

$$\mathcal{A}^{(k)}(n) \circ_i \mathcal{A}^{(h)}(m) \subseteq \mathcal{A}^{(k+h)}(n+m-1) \tag{12}$$

En particulier l'espace des éléments primitifs $\mathcal{A}^{(0)} = \mathrm{Prim}_{\bar{\Delta}}\,\mathcal{H}_{\mathrm{MR}}$ est une sous-opérade non symétrique de $\mathcal{A}\mathrm{s}$.

Il est important de noter que ce théorème utilise pleinement la base monomiale $\mathcal{M}$ et que l'on ne voit pas directement ce résultat en utilisant la base fondamentale (F_σ).

4.6.5. *Lien avec les résultats précédents.* Comme on l'a vu, l'opérade $\mathcal{A}\mathrm{s}$ est une opérade de Hopf et donc une $\mathcal{A}\mathrm{s}$-algèbre de Hopf tordue dont on note le coproduit Δ (voir relation (11)). Par ailleurs nous savons que $\mathrm{Prim}_\Delta(\mathcal{A}\mathrm{s})$ est l'opérade $\mathcal{L}\mathrm{ie}$. Donc tout élément $p \in \mathcal{L}\mathrm{ie}$ vérifie $\Delta(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1$. En particulier, avec les notations du théorème 4.5.1, pour tout (S, T) on a $p^1_S \otimes p^2_T = 0$. Donc $\mathrm{Prim}_\Delta(\mathcal{A}\mathrm{s}) \subset \mathrm{Prim}_{\bar{\Delta}}(\mathcal{H}_{\mathrm{MR}})$. Par conséquent, on a des inclusions d'opérades non symétriques

$$\mathcal{L}\mathrm{ie} \subset \mathcal{A}^{(0)} \subset \mathcal{A}\mathrm{s}\,.$$

Ces inclusions sont strictes: la dimension de $\mathcal{L}\mathrm{ie}(n)$ est $(n-1)!$, celle de $\mathcal{A}\mathrm{s}(n)$ est $n!$ et celle de $\mathcal{A}^{(0)}(n)$ est le nombre de permutations ne contenant pas de descente globale. Par exemple pour $n = 3$ il y a 3 permutations n'ayant pas de descente globale: $(123), (132), (213)$.

4.6.6. *Application de la structure d'algèbre de Lie tordue sur l'opérade* $\mathcal{A}$s. Nous avons vu dans la relation (9) que le $\mathbb{S}$-module $(\mathcal{A}\mathrm{s}(n) = \mathbf{k}[S_n])_{n\geq 1}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie tordue, notée $\{,\}$.

Comme $M_{(1,2)} = F_{(1,2)} - F_{(2,1)}$ on a

$$\{x, y\} = (M_{(1,2)} \circ_2 y) \circ_1 x, \forall x, y \in \mathcal{A}\mathrm{s}\,.$$

De la même manière que la base monomiale se comporte bien par rapport aux produits de composition dans $\mathcal{A}$s, elle se comporte bien par rapport à la structure d'algèbre de Lie tordue. En effet

4.6.7. *Proposition* [7, 5.1]. *Pour tous* $\sigma \in S_n, \tau \in S_m$ *on a*

$$\{M_\sigma, M_\tau\} = \sum_{\substack{\zeta^{-1}\in \mathrm{Sh}_{n,m}\\ \zeta\neq Z_{n,m}^{-1}}} M_{\zeta\cdot(\sigma\times\tau)}.$$

L'intérêt de cette proposition repose sur une caractérisation très explicite des idempotents de Dynkin à l'aide de la base monomiale, que nous allons décrire maintenant. Soit $T(V)$ l'algèbre associative libre sur V dont on note $[-,-]$ le crochet de Lie. Soit θ_n l'unique élément de $\mathbf{k}[S_n]$ tel que pour tout espace vectoriel V et tous $v_1, \ldots, v_n \in V$ on a

$$\theta_n \cdot (v_1 \ldots v_n) = \Big[\cdots\big[[v_1, v_2], v_3\big], \cdots, v_n\Big].$$

L'indempotent de Dynkin est $\frac{1}{n}\theta_n$. Cet idempotent vit dans $\mathcal{L}$ie(n). En utilisant le crochet $\{-,-\}$ qui définit la structure d'algèbre de Lie tordue dans $\mathcal{A}$s, on peut montrer que

$$\theta_n = \Big\{\cdots\big\{\{F_1, F_1\}, F_1\big\}, \cdots, F_1\Big\}$$

Cette formule combinée avec la proposition précédente donne une interprétation de l'idempotent de Dynkin dans la base monomiale:

4.6.8. *Théorème* [7, 5.3]. *Pour tout* $n \geq 1$,

$$\theta_n = \sum_{\sigma\in S_n,\, \sigma(1)=1} M_\sigma.$$

On constate bien que $\theta_n \in \mathcal{A}^{(0)}(n)$ est un élément primitif de $\mathcal{A}$s puisque toute permutation $\sigma \in S_n$ satisfaisant $\sigma(1) = 1$ n'a pas de descente globale.

Bibliographie

[Ada60] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. (2) **72** (1960), 20–104.

[AS05] Marcelo Aguiar and Frank Sottile, *Structure of the Malvenuto-Reutenauer Hopf algebra of permutations*, Adv. Math. **191** (2005), no. 2, 225–275.

[Bar78] M. G. Barratt, *Twisted Lie algebras*, Geometric applications of homotopy theory (Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977), II, Lecture Notes in Math., vol. 658, Springer, Berlin, 1978, pp. 9–15.

[Ber65] Israel Berstein, *On co-groups in the category of graded algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965), 257–269.

[BF04] Clemens Berger and Benoit Fresse, *Combinatorial operad actions on cochains*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **137** (2004), no. 1, 135–174.

[Bur06] Dietrich Burde, *Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics*, Cent. Eur. J. Math. **4** (2006), no. 3, 323–357 (electronic).

[BZ05] N. Bergeron and M. Zabrocki, *The Hopf algebras of non-commutative symmetruc functions and quasisymmetric functions are free and cofree*, preprint, math.C0/0509265, 2005.

[CK98] Alain Connes and Dirk Kreimer, *Hopf algebras, renormalization and noncomutative geometry*, Comm. Math. Phys. **199** (1998), 203–242.

[Coh76] Frederick R. Cohen, *The homology of C_{n+1}-spaces, $n \geq 0$*, The homology of iterated loop spaces, Lecture Notes in Math., vol. 533, Springer-Verlag, Berlin, 1976, pp. 207–351.

[CS99] Moira Chas and Dennis Sullivan, *String topology*, preprint, math.GT/9911159, 1999.

[Fre04] Benoit Fresse, *Koszul duality of operads and homology of partition posets*, Homotopy theory: relations with algebraic geometry, group cohomology, and algebraic K-theory, Contemp. Math., vol. 346, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 115–215.

[Ger63] Murray Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Maths **78** (1963), no. 2, 267–288.

[GJ94] Ezra Getzler and John D. S. Jones, *Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces*, preprint, hep-th/9403055, 1994.

[GK94] Victor Ginzburg and Mikhail Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. **76** (1994), no. 1, 203–272.

[GV95] Murray Gerstenhaber and Alexander A. Voronov, *Homotopy G-algebras and moduli space operad*, Internat. Math. Res. Notices (1995), no. 3, 141–153 (electronic).

[Joy86] André Joyal, *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, Combinatoire énumérative (Montreal, Que., 1985/Quebec, Que., 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1234, Springer, Berlin, 1986, pp. 126–159.

[Kad04] Tornike Kadeishvili, *Measuring the noncommutativity of DG-algebras*, J. Math. Sci. (N. Y.) **119** (2004), no. 4, 494–512, Topology and noncommutative geometry.

[KLP03] Ralph M. Kaufmann, Muriel Livernet, and R. C. Penner, *Arc operads and arc algebras*, Geom. Topol. **7** (2003), 511–568 (electronic).

[Liv98a] Muriel Livernet, *Homotopie rationnelle des algèbres sur une opérade*, Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée [Prepublication of the Institute of Advanced Mathematical Research], 1998/32, Université Louis Pasteur Département de Mathématique Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, 1998, Thèse, Université Louis Pasteur (Strasbourg I), Strasbourg, 1998.

[Liv98b] ———, *Rational homotopy of Leibniz algebras*, Manuscripta Math. **96** (1998), no. 3, 295–315.

[Liv99] ———, *On a plus-construction for algebras over an operad*, K-Theory **18** (1999), no. 4, 317–337.

[LR06] Jean-Louis Loday and María Ronco, *On the structure of cofree Hopf algebras*, J. reine angew. Math. **592** (2006), 123–155.

[Man01] Michael A. Mandell, *E_∞ algebras and p-adic homotopy theory*, Topology **40** (2001), no. 1, 43–94.

[May70] J. Peter May, *A general algebraic approach to Steenrod operations*, The Steenrod Algebra and its Applications (Proc. Conf. to Celebrate N. E. Steenrod's Sixtieth

Birthday, Battelle Memorial Inst., Columbus, Ohio, 1970), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 168, Springer, Berlin, 1970, pp. 153–231.

[Moe02] I. Moerdijk, *Monads on tensor categories*, J. Pure Appl. Algebra **168** (2002), no. 2-3, 189–208, Category theory 1999 (Coimbra).

[MR95] Claudia Malvenuto and Christophe Reutenauer, *Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra*, J. Algebra **177** (1995), no. 3, 967–982.

[MS02] James E. McClure and Jeffrey H. Smith, *A solution of Deligne's Hochschild cohomology conjecture*, Recent progress in homotopy theory (Baltimore, MD, 2000), Contemp. Math., vol. 293, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 153–193.

[MS03] ———, *Multivariable cochain operations and little n-cubes*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 3, 681–704 (electronic).

[Pen96] Robert C. Penner, *The simplicial compactification of Riemann's moduli space*, Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996, pp. 237–252.

[PR04] Frédéric Patras and Christophe Reutenauer, *On descent algebras and twisted bialgebras*, Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 1, 199–216, 311.

[Pri70] Stewart B. Priddy, *Koszul resolutions*, Trans. Amer. Math. Soc. **152** (1970), 39–60.

[PS05] Frédéric Patras and Manfred Schocker, *Trees, set compositions and the twisted descent algebra*, math.CO/0512227, 2005.

[Sch94] Lionel Schwartz, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.

[Sta97] Jim Stasheff, *From operads to "physically" inspired theories*, Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995) (Providence, RI), Contemp. Math., vol. 202, Amer. Math. Soc., 1997, pp. 53–81.

[Ste47] N. E. Steenrod, *Products of cocycles and extensions of mappings*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 290–320.

[Sto93] Christopher R. Stover, *The equivalence of certain categories of twisted Lie and Hopf algebras over a commutative ring*, J. Pure Appl. Algebra **86** (1993), no. 3, 289–326.

[Vor05] Alexander A. Voronov, *Notes on universal algebra*, Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 81–103.

Institut Galilée, Université Paris Nord, 93430 Villetaneuse, France
E-mail address: livernet@math.univ-paris13.fr
URL: http://www.math.univ-paris13.fr/~livernet/