C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série I, p. 113-116, 1999
Algèbre homologique/*Homological Algebra*

Homologie des algèbres stables de matrices sur une A_∞-algèbre

Muriel LIVERNET

Institut de recherche mathématique avancée, Université Louis-Pasteur et CNRS, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France
Courriel : livernet@math.u-strasbg.fr

(Reçu le 8 mai 1999, accepté le 15 mai 1999)

Résumé. Nous montrons que l'on peut munir l'algèbre des matrices à coefficients dans une A_∞-algèbre A d'une structure d'algèbre de Leibniz à homotopie près. Le principal théorème de cette Note établit que l'homologie de Leibniz de l'algèbre stable des matrices sur A s'exprime en fonction de l'homologie de Hochschild de A. Ce théorème est une extension de celui de Cuvier et Loday démontré dans le cas des algèbres associatives. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Homology of the stable algebra of matrices over an A_∞***-algebra***

Abstract. *We prove that the algebra of matrices over an* A_∞*-algebra A can be endowed with a structure of Leibniz algebra up to homotopy. The main theorem of this Note states that the Leibniz homology of the stable algebra of matrices over A can be expressed in terms of the Hochschild homology of A. This theorem extends the result of Cuvier and Loday proved in the framework of associative algebras.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Introduction

Loday et Quillen [10] et Tsygan [12] ont montré que l'homologie de Chevalley–Eilenberg de l'algèbre de Lie stable des matrices sur une algèbre associative est isomorphe, en tant qu'algèbre de Hopf, à l'algèbre extérieure engendrée par son homologie cyclique. Récemment, Khalkhali [7] a montré que ce résultat est encore valable pour une A_∞-algèbre (ou algèbre associative à homotopie près). Par ailleurs, Cuvier [1] et Loday [9] ont montré que l'homologie de Leibniz des matrices sur une algèbre associative est isomorphe à l'espace vectoriel tensoriel sur son homologie de Hochschild. Nous nous proposons d'étendre ce résultat à une A_∞-algèbre.

Dans un premier temps, nous définissons la notion d'algèbre de Leibniz à homotopie près ainsi que son homologie et nous montrons qu'une algèbre de Lie à homotopie près est une algèbre de Leibniz à homotopie près. Ainsi, nous pouvons comparer l'homologie de Leibniz des matrices sur

Note présentée par Jean-Louis KOSZUL.

une A_∞-algèbre A avec l'homologie de Hochschild de A et nous montrons que le résultat de Cuvier et Loday est encore valable dans ce cadre.

Dans la suite le corps de base K sera de caractéristique 0.

1. Algèbres de Leibniz à homotopie près

Une algèbre de Leibniz est la donnée d'un espace vectoriel L muni d'un produit bilinéaire $[-,-] : L \otimes L \to L$ satisfaisant la relation :

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y], \quad \forall x,\, y,\, z \in L.$$

Si le crochet est antisymétrique, cette relation est équivalente à la relation de Jacobi. Ainsi, une algèbre de Lie est une algèbre de Leibniz. Il existe une théorie d'homologie pour ces algèbres appelée *homologie de Leibniz* (*voir* e.g. [9]). Cette théorie peut être également déduite de la théorie des opérades. Une *opérade* est un objet algébrique codant un type d'algèbre, comme les algèbres associatives ($\mathcal{A}$s), les algèbres commutatives ($\mathcal{C}$om), les algèbres de Lie ($\mathcal{L}$ie), ou encore les algèbres de Leibniz ($\mathcal{L}$eib). Ginzburg et Kapranov [5] ont mis en avant une opération de dualité pour certaines opérades, et dans ce contexte, l'opérade $\mathcal{A}s$ est auto-duale, alors que les opérades $\mathcal{L}$ie et $\mathcal{C}$om sont duales l'une de l'autre. Le dual de l'opérade $\mathcal{L}$eib définit un nouveau type d'algèbres, appelées *algèbres de Leibniz-dual*. Lorsque l'opérade $\mathcal{P}$ est de Koszul, ce qui est le cas pour les exemples cités, cette opération de dualité, notée $\mathcal{P}^!$, permet de construire le complexe définissant l'homologie du type d'algèbre donnée, mais également de définir ce qu'est une algèbre de type $\mathcal{P}$ à homotopie près. On se reportera aux articles [5] ou [2] pour de plus amples détails. Notre définition des algèbres de Leibniz à homotopie près s'inspire de cette construction.

Dans cette partie, nous explicitons les algèbres de Leibniz à homotopie près ainsi que leur lien avec les algèbres de Lie à homotopie près.

Pour tout espace vectoriel gradué V, on définit sa *suspension* par $(\mathrm{s}V)_n = V_{n-1}$; on note $\overline{T}(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \cdots$. Le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ agit sur $V^{\otimes n}$ à droite par $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot \sigma = \varepsilon(\sigma\,;\, v_1, \ldots, v_n) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$, où $\varepsilon(\sigma\,;\, v_1, \ldots, v_n)$ est défini comme suit : soit σ la transposition $(i \;\; i+1)$, alors $\varepsilon(\sigma\,;\, v_1, \ldots, v_n) = (-1)^{|v_i|\,|v_{i+1}|}$. Pour alléger les notations, on le remplacera par $\varepsilon(\sigma)$. Le symbole $\mathfrak{S}_{p,q}$ désignera l'ensemble des (p,q)-shuffles et $\mathfrak{S}^i_{p,q}$, l'ensemble des (p,q)-shuffles fixant les i premiers termes.

Définition 1.1. – Une *cogèbre de Leibniz-dual* est un espace vectoriel gradué C muni d'un coproduit $\Delta : C \to C \otimes C$ satisfaisant $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes (\Delta + T\Delta))\Delta$, où $T(a \otimes b) = (-1)^{|a|\,|b|} b \otimes a$.

Une *codérivation* de cogèbre de Leibniz-dual est une application linéaire $D : C \to C$ satisfaisant $\Delta D = (\mathrm{id} \otimes D)\Delta + (D \otimes \mathrm{id})\Delta$. On note $\mathrm{Coder}(C)$ l'espace de ces codérivations.

Proposition 1.2 (voir [11]). – *Soit V un espace vectoriel gradué réduit ($V_0 = 0$). Alors la cogèbre de Leibniz-duale colibre sur V, notée $\mathcal{L}\mathrm{b}^{\mathrm{c}}(V)$, est $\overline{T}(V)$ muni du coproduit*

$$\Delta(v) = 0, \quad \forall v \in V \quad \textit{et} \quad \forall v_1, \ldots, v_n, \; n \geq 2,$$

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^1_{k,n-k}} \varepsilon(\sigma)\, v_1 v_{\sigma(2)} \cdots v_{\sigma(k)} \otimes v_{\sigma(k+1)} \cdots v_{\sigma(n)}.$$

La proposition suivante est une conséquence de la théorie des opérades (*voir* [2]).

Proposition 1.3. – *On a l'isomorphisme d'espaces vectoriels gradués suivant :*

$$\mathrm{Coder}(\mathcal{L}\mathrm{b}^{\mathrm{c}}(V)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{L}\mathrm{b}^{\mathrm{c}}(V), V).$$

De plus, il existe une structure d'algèbre de Lie graduée sur $\mathrm{Coder}(\mathcal{L}\mathrm{b}^{\mathrm{c}}(V))$ définie par $[\delta^1, \delta^2] = \delta^1\, \delta^2 - (-1)^{|\delta^1|\,|\delta^2|} \delta^2\, \delta^1$, induisant une structure d'algèbre de Lie sur $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}\mathrm{b}^{\mathrm{c}}(V), V)$. En fait, comme dans le cas des cochaînes de Hochschild [4], cette structure provient d'un produit de Gerstenhaber. On note $\ell_i : V^{\otimes i} \to V$, $i \geq 1$, l'ensemble des composantes d'une application linéaire $\ell : \mathcal{L}b^c(V) \to V$, i.e. $\ell = \sum_{i \geq 1} \ell_i$.

DÉFINITION 1.4. – Une *algèbre de Leibniz à homotopie près* est un espace vectoriel gradué M muni d'une codérivation $\delta_\ell : \mathcal{L}b^c(\mathrm{s}\,M) \to \mathcal{L}b^c(\mathrm{s}\,M)$ de degré -1 et de carré nul.

À l'aide de la théorie des opérades ainsi que des propositions 1.2 et 1.3, on déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 1.5. – *Soit V un espace vectoriel gradué. Soient ℓ de degré s et m de degré t deux éléments de* $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}b^c(\mathrm{s}\,V), \mathrm{s}\,V)$. *Alors le produit $\circ$, défini par :*

$$(\ell \circ m)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_{\substack{i+j=n+1,\\ k \leq i}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^k_{k+j-1,i-k}} \varepsilon_k \varepsilon(\sigma)\, \ell_i(v_1 \cdots v_{k-1} m_j(v_k v_{\sigma(k+1)} \cdots v_{\sigma(k+j-1)}) v_{\sigma(k+j)} \cdots v_{\sigma(n)}),$$

avec $\varepsilon_k = t(|v_1| + \cdots + |v_{k-1}|)$, est un produit de Gerstenhaber pour $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}b^c(\mathrm{s}\,V), \mathrm{s}\,V)$. *Le crochet défini par $[\ell, m] = \ell \circ m - (-1)^{st} m \circ \ell$ est un crochet de Lie coïncidant avec le crochet de Lie induit par l'isomorphisme de la proposition 1.3. Ainsi, une algèbre de Leibniz à homotopie près est un espace vectoriel gradué M muni d'une application linéaire $\ell : \mathcal{L}b^c(\mathrm{s}\,M) \to \mathrm{s}\,M$ de degré -1 satisfaisant $\ell \circ \ell = 0$.* □

Remarque 1.6. – Une algèbre de Leibniz M n'est rien d'autre qu'une algèbre de Leibniz à homotopie près (M, ℓ) avec $\ell_i = 0$ pour $i \neq 2$. Le morphisme ℓ_2 correspond alors au produit définissant la structure d'algèbre de Leibniz. De même, une algèbre de Leibniz différentielle graduée M est une algèbre de Leibniz à homotopie près (M, ℓ) avec $\ell_i = 0$ pour $i \neq 1$, 2. On interprète souvent les algèbres à homotopie près comme des généralisations d'algèbres différentielles graduées.

PROPOSITION 1.7. – *Toute algèbre de Lie à homotopie près est une algèbre de Leibniz à homotopie près.*

Démonstration. – Il suffit de comparer la proposition 1.5 avec la définition des algèbres de Lie à homotopie près (e.g. [6], [8]). □

DÉFINITION 1.8. – L'*homologie de Leibniz* d'une algèbre de Leibniz à homotopie près (M, ℓ), notée $\mathrm{HL}_*(M, \ell)$, est l'homologie du complexe $(\mathcal{L}b^c(\mathrm{s}\,M), \delta_\ell)$. Remarquons que $\mathrm{HL}_*(M, \ell)$ est une cogèbre de Leibniz-dual.

2. Algèbres de matrices à coefficients dans une A_∞-algèbre

Dans cette partie, nous introduisons les outils nécessaires à la compréhension du théorème principal, plus précisément, nous définissons l'homologie de Hochschild d'une A_∞-algèbre unitaire A. On se reportera à l'article de Getzler et Jones [3] pour de plus amples détails.

DÉFINITION 2.1 (*voir* [3]). – Une *algèbre associative à homotopie près unitaire* A est un espace vectoriel gradué muni d'une application linéaire de degré -1, $m \in \mathrm{Hom}(\overline{T}(\mathrm{s}\,A), \mathrm{s}\,A)$, avec $m = \sum_{i \geq 1} m_i$, $m_i : (\mathrm{s}\,A)^{\otimes i} \to \mathrm{s}\,A$, et d'un élément $e \in (\mathrm{s}\,A)_1$ satisfaisant les relations suivantes :

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{k=1}^{i} \varepsilon_k\, m_i(a_1 \cdots a_{k-1} m_j(a_k \cdots a_{k+j-1}) a_{k+j} \cdots a_n) = 0,$$

$$m_2(e, a) = -a,\ m_2(a, e) = (-1)^{|a|} a,\ \text{ et pour tout } k \neq 2,\ m_k(a_1, \ldots, e, \ldots, a_{k-1}) = 0.$$

L'application linéaire m définit une codérivation δ_m de la cogèbre coassociative $\overline{T}(\mathrm{s}\,A)$, et la première relation équivaut à dire que δ_m est de carré nul. Le complexe $(\overline{T}(\mathrm{s}\,A), \delta_m)$ correspond, lorsque A est une algèbre associative, au complexe classique muni du bord b' (*cf.* [9]). Ainsi, pour définir l'homologie de Hochschild de A il faut perturber légèrement ce bord.

DÉFINITION 2.2 (*voir* [3]). – L'*homologie de Hochschild* d'une A_∞-algèbre A est l'homologie du complexe $\overline{T}(\mathrm{s}\,A)$ muni du bord

$$\begin{aligned} b(x_1, \dots, x_n) = &\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-i+1} \varepsilon_k\, x_1 \cdots x_{k-1} m_i(x_k \cdots x_{k+i-1}) x_{k+i} \cdots x_n \\ &+ \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} \varepsilon(\tau^k)\, m_i(a_{\tau^k(1)} \cdots a_{\tau^k(i)}) a_{\tau^k(i+1)} \cdots a_{\tau^k(n)}, \end{aligned}$$

où τ est la permutation $(n \quad n-1 \ \dots \ 1)$.

THÉORÈME 2.3. – *Soit (A, m) une algèbre associative à homologie près unitaire, dont on note $(\mathfrak{gl}(A), \ell)$ l'algèbre de Lie à homotopie près des matrices. Alors il existe un isomorphisme naturel de cogèbres de Leibniz-dual* $\mathrm{HL}_*(\mathfrak{gl}(A), \ell) \simeq \overline{T}(\mathrm{HH}_*(A, m)[1])$.

Idée de la démonstration. – Comme A est unitaire, il y a une inclusion canonique de $\mathfrak{gl}(K)$ dans $\mathfrak{gl}(A)$. La structure d'algèbre de Lie à homotopie près sur $\mathfrak{gl}(A) = A \otimes \mathfrak{gl}(K)$, provient d'une structure de A_∞-algèbre sur $\mathfrak{gl}(A)$; cette dernière est définie à partir de la structure de A_∞-algèbre sur A et d'algèbre associative sur $\mathfrak{gl}(K)$ (*cf.* [7]). Nous considérons alors $(\mathfrak{gl}(A), \ell)$ comme une algèbre de Leibniz à homotopie près.

Il existe une notion de dérivation intérieure sur les algèbres de Leibniz à homotopie près (*cf.* [7] pour les algèbres de Lie à homotopie près) et l'on peut montrer que $\mathfrak{gl}(K)$ agit par dérivation intérieure sur $(\mathfrak{gl}(A), \ell)$, donc sur le complexe $\mathcal{L}\mathrm{b}^{\mathrm{c}}(\mathrm{s}\,\mathfrak{gl}(A))$. Le lemme 2.4 prouve que cette action est en quelque sorte indépendante de la structure de A_∞-algèbre sur A.

On vérifie alors que les étapes de la démonstration dans le cas où A est une algèbre associative (*cf.* [9], 10.6) s'appliquent encore au cas où A est une A_∞-algèbre. □

LEMME 2.4. – *L'action de $\mathfrak{gl}(K)$ sur $\mathcal{L}\mathrm{b}^{\mathrm{c}}(\mathrm{s}\,\mathfrak{gl}(A))$ est donnée par*

$$H \cdot (\underline{a} \otimes E_1 \otimes \cdots \otimes E_n) = \sum_{i=1}^{n} \underline{a} \otimes E_1 \otimes \cdots \otimes [E_i, H] \otimes \cdots \otimes E_n,$$

pour tous $\underline{a} \in (\mathrm{s}\,A)^{\otimes n}$ et $E_i \in \mathfrak{gl}(K)$, $1 \leq i \leq n$.

Références bibliographiques

[1] Cuvier C., Algèbres de Leibnitz : définitions, propriétés, Ann. Sci. École Norm. Sup. 27 (1994) 1–45.
[2] Getzler E., Jones J.D.S., Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces, prépublication, 1994. Internet : http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/9403055.
[3] Getzler E., Jones J.D.S., A_∞-algebras and the cyclic bar complex, Illinois J. Math. 34 (1990) 257–283.
[4] Gerstenhaber M., The cohomology structure of an associative ring, Ann. Math. 78 (1963) 267–288.
[5] Ginzburg V., Kapranov M., Koszul duality for operads, Duke J. Math. 76 (1) (1994) 203–272.
[6] Hinich V., Schechtman V., Homotopy Lie algebras, Adv. Sov. Math. 16 (2) (1993) 1–28.
[7] Khalkhali M., Homology of L_∞-algebras and Cyclic Homology, prépublication, 1998 ; K-theory preprint archives, # 275.
[8] Lada T., Stasheff J., Introduction to SH Lie algebras for physicists, Int. J. Theoret. Phys. 32 (1993) 1087–1103.
[9] Loday J.-L., Cyclic homology, Grund. der Math. Wiss. 301, Springer-Verlag, 1992.
[10] Loday J.-L., Quillen D., Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices, Comment. Math. Helvetici 59 (1984) 565–591.
[11] Oudom J.-M., Coproduct and cogroups in the category of graded dual Leibniz algebras, in: Operads: proceedings of renaissance conferences, 1995, Contemp. Math. 202, Amer. Math. Soc., 1997, pp. 115–135.
[12] Tsygan B.L., The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology, Uspekhi Mat. Nauk. 38 (1983) 217–218 (en russe) ; Russ. Math. Survey 38 (2) (1983) 198–199 (traduction anglaise).