Examen de probabilités

USTC, 2023, cours de P. Marchal

Soient $p, q \in [0,1]$ deux réels, Y une variable aléatoire telle que

$$\mathbb{P}(Y=1) = q = 1 - \mathbb{P}(Y=-1)$$

et $(X_n, n \geq 2)$ des variables aléatoires iid, indépendantes de Y, telles que

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_2 = -1)$$

Enfin, soient $(T_n, n \geq 2)$ des variables aléatoires indépendantes, indépendantes de Y et des X_n et telles que pour tout n, T_n est uniforme dans $\{0, \ldots n-2\}$. On pose $S_0 = 0$, $S_1 = Y$ et pour $n \geq 2$,

$$S_n = S_{n-1} + X_n(S_{T_n+1} - S_{T_n})$$

1) Supposons $Y = 1$, $X_3 = X_4 = X_6 = 1$, $X_2 = X_5 = -1$, $T_2 = T_4 = 0$, $T_3 = 1$, $T_5 = 2$, $T_6 = 4$. Calculer S_n pour $n \leq 6$.
2) Montrer que si $p = 1$, (S_n) est une chaine de Markov dont on donnera la matrice de transition. Quels sont les états récurrents ?
3) Montrer que si $p = q = 1/2$, (S_n) est une chaine de Markov dont on donnera la matrice de transition. Quels sont les états récurrents ?
4*) Pour $p = q = 1/2$, montrer qu'il existe $c > 0$ et $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $E(|S_n|) \geq c\sqrt{n}$.
5) Montrer que si $p = 1/2$, $q \neq 1/2$, (S_n) n'est pas une chaine de Markov. On pourra comparer $P(S_3 = 1 | S_1 = 1, S_2 = 0)$ et $P(S_1 = 1)$.
6) Montrer que si $p \neq 1/2$, (S_n) n'est pas une chaine de Markov.

7) Soit F_n la tribu engendrée par $S_0, S_1, \ldots S_n$. Montrer que
$E[(S_{T_{n+1}+1} - S_{T_{n+1}})|F_n] = S_n/n$
8) Montrer que pour tout n, il existe $c_n > 0$ tel que $\mathbb{E}(S_{n+1}|F_n) = c_n S_n$.
9) Soit $C_n = c_1 c_2 \ldots c_n$. Montrer qu'il existe un réel $k_p > 0$ tel que $C_n \sim k_p n^{2p-1}$ quand n tend vers l'infini.
10) Soit $M_n = S_n / C_{n-1}$. Que peut-on dire de la suite (M_n) ?
11) Calculer $E[S_{n+1}^2 | F_n]$ puis $\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 | F_n]$ en fonction de S_n.
12) On suppose que $p > 3/4$. Montrer que M_n est bornée dans L^2. En déduire que S_n / n^{2p-1} converge dans L^2 vers une variable aléatoire qui n'est pas presque sûrement nulle.