UNIVERSITÉ PARIS 13

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

spécialité : Mathématiques appliquées.

Des contributions aux probabilités numériques et à l'extension de lois stables et max-stables.

Présentée par

Mohamed Ben Alaya

le 07/12/2012 devant le jury composé de :

Julien Barral	Université Paris 13	examinateur
Yueyun Hu	Université Paris 13	examinateur
Benjamin Jourdain	École Nationale des Ponts et Chaussées	examinateur
Damien Lamberton	Université Paris-Est Marne-la-Vallée	examinateur
Gilles Pagès	Université Pierre et Marie Curie	rapporteur
Denis Talay	INRIA Sophia Antipolis	rapporteur

Autre rapporteur : Philip Protter Columbia University

Remerciements

Je remercie tout d'abord Gilles Pagès d'avoir accepté de présenter mes travaux pour l'habilitation à diriger des recherches et de participer à mon jury. C'est avec lui et au tout début de ma carrière que j'ai commencé à découvrir le domaine des probabilités numériques.

Je suis enchanté que Phillip Protter et Denis Talay soient mes rapporteurs, je les remercie pour leur travail. Denis me fait de plus un plaisir de prendre part au jury et je le remercie à nouveau.

Julien Barral, Yueyun Hu, Benjamin Jourdain et Damien Lamberton me font un grand plaisir en participant au jury. Je les remercie chaleureusement.

Je tiens à remercier tous ceux avec qui j'ai collaboré avec beaucoup de plaisir : Thierry Huillet, Benjamin Jourdain, Ahmed Kebaier, Gilles Pagès et Anna Porzio. C'est grâce à ces fructueuses collaborations qu'aujourd'hui je présente ce travail.

Durant ces années, j'ai pu jouir de la bonne ambiance qui règne au LAGA, je remercie l'ensemble de mes collègues. Mes pensées vont particulièrement à Jean-Stéphane Dhersin, Yueyun Hu et Francesco Russo pour leurs encouragements. Je souhaite aussi saluer les membres du CERMICS avec qui j'ai pu partager amitiés et collaborations pendant plusieurs années après ma thèse. Je pense particulièrement à Jean-François Delmas, Bernad Lapeyre et Benjamin Jourdain.

Mes pensées vont également à ma grande famille et particulièrement mes parents qui m'ont sans cesse encouragé à entreprendre des études valorisantes. Je voudrais leur exprimer mes remerciements les plus sincères.

Enfin mes remerciements vont à Yosr et mes chers enfants Inès & Aymen qui m'entourent avec leurs amitiés et amour et me prodiguent joie & bonheur.

Table des matières

Exposé synthétique des recherches

Mes travaux de recherche ont porté sur des thèmes qui trouvent des applications dans les sciences de l'ingénieur, en particulier en mathématiques financières et en physique.

Ma thèse de doctorat sur l'utilisation des théorèmes ergodiques en simulation, sous la direction de Nicolas Bouleau, m'a plongé dans le domaine des probabilités numériques et les méthodes de Monte Carlo. Les articles [A1], [A2] et [A3] sont tirés de ce travail. Lorsque l'on cherche à simuler des variables aléatoires en dimension grande ou infinie, l'usage du théorème ergodique de Birkhoff, en particulier pour l'opérateur de décalage dit du shift, apparaît comme une méthode performante, notamment grâce à l'efficacité de son implémentation informatique. Dans le but de donner des critères d'arrêts effectifs pour ce type de méthode, je me suis intéressé à la vitesse de convergence de cet algorithme. La conclusion essentielle de cette étude est que la méthode du shift a une vitesse de convergence asymptotique (mathématique) du même ordre de grandeur, $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, que celle de la loi des grands nombres, pour une large classe de fonctionnelles parmi les plus couramment rencontrées. Cette vitesse de convergence est contrôlée par un paramètre, représentant la somme de la variance et des corrélations entre les trajectoires décalées. Le rôle de ce paramètre est similaire à celui joué par la variance dans la méthode de Monte Carlo classique où les simulations sont indépendantes. L'article [A4] est une généralisation de la méthode du shift dans un cadre markovien, les résultats sont du même type et ils sont obtenus après la thèse en collaboration avec Gilles Pagès.

Toujours dans le domaine des probabilités numériques et grâce à mes collaborations avec le CERMICS, centre de recherche à l'École Nationale des Ponts et Chaussées, j'ai travaillé avec Benjamin Jourdain, sur la propagation du chaos d'une équation aux dérivées partielles (EDP) parabolique nonlinéaire. Le but essentiel de ce travail, motivé par des applications en rhéologie, est l'interprétation probabiliste de cette équation pour construire des algorithmes basés sur des techniques particulaires afin de résoudre numériquement l'EDP considérée. Ce projet a donné lieu à la publication [A10].

Plus récemment, vu le lien étroit entre le domaine des probabilités numériques et la finance, je me suis intéressé au problème de calibration dans le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), très utilisé en mathématiques financières pour modéliser l'évolution des taux d'intérêt à court terme. La construction d'estimateurs statistiques efficaces pour approcher les paramètres de ce modèle est cruciale d'un point de vue pratique. Le but essentiel de ce travail est de considérer les estimateurs du maximum de vraisemblance et d'étudier leur comportement asymptotique, en temps long, dans un cadre tout à fait général qui couvre les deux cas ergodique et non-ergodique. Les résultats théoriques obtenus sont originaux et donnent des vitesses de convergence très variées suivant les choix des paramètres. En outre, des nouveaux algorithmes numériques pour la simulation exacte de ces estimateurs ont été proposés. Cette activité a mené à la rédaction de deux articles, [A12] et [P1], en collaboration avec Ahmed Kebaier. Les résultats ont été présentés dans plusieurs conférences internationales de mathématiques financières, [C2], [C3], [C4] et [C5].

Enfin en probabilité numérique j'ai travaillé sur la méthode de Multilevel Monte Carlo, introduite par Michael Giles [21]. Cette méthode permet de réduire efficacement la complexité de la méthode de Monte Carlo et elle peut être vue comme une généralisation de méthode de Romberg statistique, introduite par Ahmed Kebaier [33] pour le calcul d'espérance de fonctionnelles de processus discrétisés. Dans ce cadre nous avons étudié la vitesse de convergence de ce nouvel algorithme pour avoir un choix optimal des paramètres. Plus précisement, nous avons établi un théorème central limite de type Lindeberg-Feller. Nous avons également appliquer cette technique à l'évaluation des prix d'options asiatiques. Ces résultats ont donné lieu à une prépublication en collaboration avec Ahmed Kebaier [P2].

Un second axe de recherche trouve sa cohérence non pas dans le développement des méthodes numériques mais dans l'étude statistique des lois de probabilité qui peuvent être utilisées dans les sciences de l'ingénieur en général puis en physique et la modélisation financière en particulier.

Au cours des dernières décennies, nous avons pu observer dans le monde scientifique, un intérêt renouvelé pour l'usage des distributions à queues lourdes. Ainsi si le caractère aléatoire observé est la somme, respectivement le maximum, de nombreux petits effets, et ces effets suivent une distribution à queue lourde, les lois stables, respectivement max-stables, fournissent des modèles appropriés. Les lois stables, respectivement max-stables connues avec le trio Fréchet-Weibull-Gumbel, sont les seules distributions limites possibles de la somme, respectivement du maximum, d'un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Du point de vue statistique, l'étude des valeurs extrêmes revient à l'étude des queues de distribution, ou de façon équivalente à l'analyse de la plus grande observation d'un échantillon. Nous pouvons considérer la théorie des valeurs extrêmes comme la contrepartie de la théorie statistique classique, qui est principalement basée sur l'étude de la moyenne d'un échantillon plutôt que ses valeurs extrêmes. Afin de mieux comprendre ces lois et de leur considérer des extensions, j'ai monté une collaboration avec Thierry Huillet sur ce sujet. Anna Porzio a également participé à cette collaboration. Les articles [A5], [A6], [A7], [A8], [A9] et [A11] sont les fruits de cette activité.

Les lois semistables et max-semistables sont une première extension des lois stables et max-stables, leurs intérêts en physique et leurs propriétés statistiques ont fait l'objet des articles [A5] et [A6] en collaboration avec Thierry Huillet et Anna Porzio. Les propriétés d'autosimilarité et de semi-autosimilratitité associées à ces lois ont été mises en évidence en considérant les processus de Lévy associés aux lois stables ou semistables et les processus extrémaux associés aux lois max-stables ou max-semistables. Ceci nous a donné un panel de processus vérifiant des propriétés d'autosimilarité ou de semi-autosimilratitité et a fait l'objet de l'article [A7].

Les lois multiscaling et max-multiscaling, définies à l'aide d'une équation fonctionnelle, sont une deuxième extension des lois stables, respectivement max-stables. Le but essentiel des articles [A8], respectivement [A9], est de donner les solutions explicites de cette équation dans le cas max-multiscaling, respectivement multiscaling, et de les observer comme des lois limites du maximum, respectivement de la somme, de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. En d'autres termes, il s'agit d'étudier leur domaine d'attraction.

Par ailleurs, l'équation considérée pour les lois multiscaling avec des coefficients aléatoires a été proposée pour la première fois par Benoît Mandelbrot et elle a suscité l'intérêt de plusieurs probabilstes de renommée internationale. Ils ont montré dans des cadres plus ou moins différents que cette équation admet une famille de solutions avec des propriétés analogues aux lois stables sur $\mathbb{R}_+$. Nous avons obtenu des résultats du même type dans le cas min-multiscaling où nous avons montré l'existence d'une famille de solutions analogues aux lois min-stables sur $\mathbb{R}_+$. Ce travail a donné lieu à la publication [A11].

Liste des publications

Articles publiés

A1 : Sur la méthode du shift en simulation. N. Bouleau et D. Talay, eds, *Probabilités Numériques*, volume 10, chapitre 2, pages 61-66, INRIA, (1992).

A2 : On the simulation of random variables depending on a stopping time. *Stochastic Analysis and Applications*, 11(2), 133-153(1993).

A3 : Résolution des équations elliptiques par la méthode du shift. *Mathematics and computers in simulation*, 38, 87–96(1995).

A4 : Rate of convergence for computing expectations of stopping functionals of an $\alpha-$mixing process. En collaboration avec Gilles Pagès. *Advances in Applied Probability* , 30, 425-448(1998).

A5 : On the physical relevance of max- and log-max-selfsimilar distributions. En collaboration avec Thierry Huillet et Anna Porzio. *Eur. Phys. J. B.* , 17, 147-158, (2000).

A6 : On Lévy stable and semistable distributions. En collabaration avec Thierry Huillet et Anna Porzio. *Fractals,* , 9(3), 347-364, (2001).

A7 : On Lévy-Fréchet processes and related self-similar and semistable ones. En collabaration avec Thierry Huillet. *Chaos, Solitons and Fractals* , 14(5), 57-76, (2002).

A8 : On max-multiscaling distributions as extended max-semistable ones. En collabaration avec Thierry Huillet. *Stochastic Models* , 20(4), 493-512, (2004).

A9 : On a functional equation genelatizing the class of semistable distributions. En collabaration avec Thierry Huillet. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* , 57(4), 817-831, (2005).

A10 : Probabilistic approximation of a nonlinear parabolic equation occuring in rheology. En collabaration avec Benjamin Jourdain. *Journal of Applied Probability* 44(2), 528-546, (2007).

A11 : On an extension of min-semistable distributions. En collabaration avec Thierry Huillet et Anna Porzio. *Probab. Math. Statist.* 27(2), 303-323, (2007).

A12 : Parameter estimation for the square root diffusions : ergodic and nonergodic cases. En collabaration avec Ahmed Kebaier. *Stochastic Models* (2012).

Prépublications

P1 : Asymptotic behavior of the maximumm likelihood estimator For ergodic and nonegodic square root diffusions. En collabaration avec Ahmed Kebaier.
P2 : Central limit Theorem for the multilevel Monte Carlo Euler method and Applications to Asian options. En collabaration avec Ahmed Kebaier.

Thèse

T : Les théorèmes ergodiques en simulation. *Thèse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées* , sous la direction de Nicolas Bouleau, (1992).

Contrats de recherche

R1992 : Contrat d'expertise sur une méthode d'évaluation statistique de l'incertitude associée à un logiciel de thermohydraulique accidentelle. *Rapport EDF*, mai 1992. Avec Électricité de France EDF.
R1993 : Optimisation des méthodes statistiques dans l'évaluation de l'incertitude d'un logiciel de thermohydraulique accidentelle. *Rapport EDF*, septembre 1993. Avec Électricité de France EDF.

Communications orales dans des conférences internationales depuis 2007

C1 : Mathematical Issues in Complex Fluids, Oct. 15 - 19, 2007, Beijing, China.
C2 : Advanced Mathematical Methods in Finance, May 4-8, 2010, Bled, SLOVENIA
C3 : Journée "Statistique et Finance", 18 Juin 2010, Université d'Évry Val d'Essonne.
C4 : Wokshop on Stochastic Modelling and Applications to Finance, June 27-30, 2011, Beijing, China.
C5 : International Conference on Stochastic Analysis and Applications, October 10-15, 2011 Hammamet, Tunisie

Première partie

Contributions aux probabilités numériques

Chapitre 1

La méthode du décalage

L'usage du théorème ergodique de Birkhoff pour le calcul d'espérance n'est pas très fréquent en simulation. Cependant, dans le cas de la transformation du décalage, dite aussi du shift, et à cause des particularités de l'implémentation informatique de l'algorithme, cette méthode se trouve être plus efficace que la méthode de Monte Carlo classique (voir [A1] et [A2]). Cette idée a été proposée par Nicolas Bouleau [8] et a fait l'objet de la partie principale de ma thèse (voir [T]).

1.1 Présentation de la méthode du décalage

La simulation des phénomènes aléatoires fait souvent intervenir des processus à temps discret et très souvent ces processus sont des chaînes de Markov. On considère l'exemple générique suivant

$$Z_0 = x, \quad Z_{n+1} = H(Z_n, n, X_{n+1}),$$

où les X_n sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi μ sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. On est parfois ramené à calculer des quantités de la forme : $\mathbb{E}(T)$, $\mathbb{E}(Z_T)$, $\mathbb{E}[G(Z_T, T)]$, où G est une fonction numérique et T est un temps aléatoire, $\mathbb{E}\sum_{k=1}^{T} C(Z_k, Z_{k+1})$, où C est une fonction représentant des coûts et T est un temps aléatoire. Plus généralement, $\mathbb{E}(F)$ avec F une fonctionnelle $\mathcal{F}_T-$mesurable et T est un temps d'arrêt.

Ainsi le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une représentation sur $((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^{\otimes\mathbb{N}}, \mu^{\otimes\mathbb{N}})$ et on veut calculer l'espérance d'une fonctionnelle des trajectoires du processus. L'idée de la méthode du shift est de simuler F aux points successifs $X, \theta(X), \theta^2(X), \ldots$

et de prendre la moyenne empirique. Ces points sont des éléments de $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$

$$\begin{array}{rcl} X & = & (X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots) \\ \theta(X) & = & (X_2, X_3, \cdots, X_{n+1}, \cdots) \\ & \vdots & \end{array}$$

Les $(X_n)_{n\geq 0}$ peuvent être vu comme des projections canoniques (pour tout $\omega := (\omega_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ on a $X_n(\omega) := \omega_n$) et $X_n \circ \theta = X_{n+1}$. Au point de vue mathématique, θ est une transformation mélangeante qui préserve la mesure $\mu^{\otimes\mathbb{N}}$, l'espace canonique $((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^{\otimes\mathbb{N}}, \mu^{\otimes\mathbb{N}})$ est ergodique, et l'espérance $\mathbb{E}(F)$ peut être calculée par le théorème de Birkhoff (Voir Krengel [35]). Dès que $F \in L^1$, on a, lorsque $n \to +\infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F \circ \theta^k \to \mathbb{E}(F) \quad \mu^{\otimes\mathbb{N}} - p.s. \tag{1.1}$$

L'intérêt de cette méthode est dans l'implémentation de son algorithme qui exploite de façon essentielle la notion de stockage. Pour appliquer la formule (1.1) à la fonctionnelle, $F = G(Z_T, T)$, où T est un temps d'arrêt fini presque sûrement, ou plus généralement si F admet une représentation sur $(\mathbb{R}^d)^{(\mathbb{N})} = \cup_{n\geq 1}(\mathbb{R}^d)^n$, ce qu'on suppose ici, les calculs des termes intermédiaires des $(X_k)_{k\geq 1}$ sont mis dans une boîte de stockage, lorsqu'on passe d'une trajectoire à une autre. Comme F admet une représentation sur $(\mathbb{R}^d)^{(\mathbb{N})} = \cup_{n\geq 1}(\mathbb{R}^d)^n$ les calculs des $(X_k)_{k\geq 1}$ sont faits d'une façon partielle et la suite est rallongée au fur et à mesure qu'on itère les simulations de F. En la comparant à la méthode de Monte Carlo classique, la méthode du décalage économise le temps de calcul et économise le générateur de nombres aléatoires. Il est important de rappeler que la consommation de nombres aléatoires doit être limitée à une certaine fraction du générateur pour en préserver la qualité.

Pendant ma thèse, j'ai testé l'efficacité de cette méthode et j'ai mis en évidence par des exemples l'économie de temps de calcul (voir [T], [A1] et [A2]). En la comparant à la méthode de Monte Carlo classique et pour un même nombre d'itérations, j'ai montré que la méthode du décalage était nettement plus rapide que la méthode de Monte Carlo classique. Le gain du temps C.P.U était en moyenne de l'ordre de 90%, sur des exemples où la simulation des innovations se faisait en dimension petite. Ce gain peut être plus important si l'on considère des situations où la simulation des X_n est donnée par des méthodes lentes ; par exemple : la méthode du rejet ou schéma de résolution d'une équation différentielle stochastique.

1.2 Les résultats sur la vitesse de convergence

Le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff ne dispose pas de résultat général sur la vitesse de convergence. Des études sur le comportement asymptotique dans ce théorème (voir [36], [27]), montrent que la vitesse de convergence peut être arbitrairement lente comme elle peut être proche de $0(\frac{1}{n})$. Cependant, l'intérêt de ces résultats est essentiellement théorique et j'ai obtenu des estimations de la vitesse de convergence pour des classes de fonctions couramment employées en pratique. Grâce au Théorème de Gál et Koksma (voir [19]), j'ai déterminé une vitesse de convergence dans le théorème de Birkhoff qui peut être formuler dans le cadre de l'opérateur de décalage de la façon suivante. Soit

$$\sigma^2(F) := \mathrm{Var}(F) + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{Cov}(F, F\circ\theta^k)$$

si la série est convergente, et $\sigma^2(F) := +\infty$ sinon, où Var désigne la variance et Cov la covariance. On a alors le résultat suivant :

Proposition 1 *Pour $F \in L^2$, si $\sigma^2(F)$ est fini alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Var}(\sum_{n=0}^{N-1} F\circ\theta^n) = \sigma^2$$

et

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F\circ\theta^k - \mathbb{E}(F) = o\left(n^{\frac{1}{2}}(\log(n))^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right) \quad \mu^{\otimes\mathbb{N}}\text{-}a.s.$$

Il est évident que les estimations données par le théorème du logarithme itéré sont plus fortes que le résultat de la proposition précédente. L'intérêt de ce résultat est de donner une estimation assez voisine du logarithme itéré mais sous des hypothèses plus faibles et assez naturelles dans le cadre de la simulation. En effet, en simulation soit la fonctionnelle F ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées, on dit que F est cylindrique, et on a bien sûre le résultat. Soit on arrive à approcher F par une suite de fonctions cylindriques avec une vitesse suffisante pour que la condition de finitude de $\sigma^2(F)$ soit vérifiée (voir [T] et [A2]).

Parmi, les classes de fonctionnelles que j'ai étudiées, en cohérence avec le principe du dispositif informatique, j'ai considéré des fonctions $\mathcal{F}_T-$mesurable où T est un temps d'arrêt, $\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty \,/\, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}\}$, et $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la filtration associée au processus canonique $(X_k)_{k\geq 1}$ et j'ai obtenu le résultat suivant.

Théorème 1 *Si T admet un moment d'ordre $2+\rho$, $\rho > 0$, alors pour toute fonctionnelle $F \in L^2(\mathcal{F}_T)$, on a $\sigma^2(F)$ est une série absolument convergente et par conséquent*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F\circ\theta^k - \mathbb{E}(F) = o\left(n^{\frac{1}{2}}(\log(n))^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right) \quad \mu^{\otimes\mathbb{N}}\text{-}a.s.$$

Puis, j'ai étudié le comportement en loi de l'erreur de cette méthode pour les mêmes classes de fonctions. Lorsque F est cylindrique ne dépendant que des m premières coordonnées, le processus $(F\circ\theta^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un processus $m-$dépendant. Par conséquent, on peut le voir comme un processus mélangeant (voir Billingsley [7]) et on a le théorème de la limite centrale. Pour une fonction F quelconque, on l'approche par une suite $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions cylindriques avec une vitesse suffisante pour que les théorèmes de la limite centrale sur F_k passe à F. Ceci nous a permis, notamment, de traiter les fonctions $\mathcal{F}_T-$mesurables considérées ci-dessus et j'ai obtenu le résultat suivant.

Théorème 2 *Soit T un temps d'arrêt de moment d'ordre $2+\rho$, $\rho > 0$ et $F \in L^2(\mathcal{F}_T)$. Si $\sigma^2(F) > 0$ alors*

$$\frac{1}{\sigma(F)\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(F\circ\theta^k - \mathbb{E}(F)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1),$$

où $\mathcal{N}(0;1)$ désigne la loi normale centrée réduite et $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ la convergence en loi.

Enfin, pour avoir la loi du logarithme itéré, j'ai appliqué des résultats de W. Phillip et W. Stout dans [52] où ils ont étudié la somme partielle de plusieurs suites de variables aléatoires faiblement dépendantes et ils ont proposé des principes d'invariances pour différentes classes de fonctions. Pour les fonctions $\mathcal{F}_T-$mesurables et avec des hypothèses légèrement plus faibles, j'ai obtenu le résultat suivant.

Théorème 3 *si T admet un moment à tous les ordres (on peut légèrement l'affaiblir) et si F est une fonction de $L^{2+\delta}$, avec $\delta > 0$, alors F vérifie :*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(F\circ\theta^k - \mathbb{E}(F)\right)}{\sigma(F)\sqrt{2n\log\log n}} = 1$$

et

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(F\circ\theta^k - \mathbb{E}(F)\right)}{\sigma(F)\sqrt{2n\log\log n}} = -1.$$

Pour contourner les difficultés techniques rencontrées, on peut considérer l'algorithme associé à la transformation du shift à droite (voir [9]) où N. Bouleau a étudié le système dynamique $((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}}, \mu^{\otimes\mathbb{Z}}, \theta^*)$, avec $X_n \circ \theta^* = X_{n-1}$. Ainsi en considérant $L^1((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, \mu^{\otimes\mathbb{N}})$ comme sous espace de $L^1((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}}, \mu^{\otimes\mathbb{Z}})$, on déduit que

$$\forall\, F \in L^1((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, \mu^{\otimes\mathbb{N}}), \qquad \mu^{\otimes\mathbb{N}}\text{-}p.s. \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F \circ (\theta^*)^k \longrightarrow \mathbb{E}(F) = \int F d\mu^{\otimes\mathbb{N}}.$$

Dans [9], le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré ont été établis pour une certaine classe de fonctions dite classe de **Gordin**. Dans ma thèse, j'ai montré que les fonctionnelles introduites ci-dessus pour la méthode du shift sont dans la classe de Gordin ; ceci améliore le résultat de N. Bouleau (voir [9]) pour les fonctions dépendant d'un temps d'arrêt.

1.3 Extension de la méthode au cas markovien

Ce travail, en collaboration avec Gilles Pagès [A4], s'inscrit dans la lignée de ma thèse, mais cette fois les innovations sont supposées Markoviennes plutôt qu'indépendantes. En probabilités numériques, lorsqu'on considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec une probabilité invariante ν et on cherche à approcher $\mathbb{E}_\nu(F(X_0,\cdots,X_{\ell-1}))$, $\ell \in \mathbb{N}$, on utilise les théorèmes ergodiques pour les chaînes de Markov, à savoir que sous des hypothèses convenables on a pour tout $F : (\mathbb{R}^d)^\ell \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F(X_k,\cdots,X_{k+\ell-1}) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_\nu(F(X_0,\cdots,X_{\ell-1})) \qquad \mathbb{P}_x\text{-}a.s.,$$

et les vitesses de convergence sont contrôlées par des théorèmes de type théorème de la limite centrale et loi du logarithme itéré (voir par exemple M. Duflo [15]).

Dans notre cas F est une fonctionnelle définie sur tout l'espace canonique $((\mathbb{R}^d)^{\otimes\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^{\otimes\mathbb{N}}, \mathbb{P}_\nu)$ et $(X_k)_{k\geq 0}$ sont les projections canoniques (pour tout $\omega := (\omega_k)_{k\geq 0} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ on a $X_k(\omega) := \omega_k$). Le système dynamique $((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^{\otimes\mathbb{N}}, \mathbb{P}_\nu, \theta)$ est ergodique et on peut encore appliquer le théorème de Birkhoff, et approcher $\mathbb{E}_\nu(F)$ par $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F \circ \theta^k$, $\mathbb{P}_\nu - p.s.$. Pour contrôler les vitesses de convergence, on avait besoin d'hypothèse de mélange. Il existe plusieurs notions de mélange dans la litérature (voir P. Doukhan [13]) et on a choisi le $\alpha-$mélange. C'est la notion qui était la plus adaptée à notre contexte et en plus c'est la plus faible des mélanges.

Définition 1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* $\alpha := (\alpha(n)_{n\in\mathbb{N}})$ *une suite de réels. On dit qu'un processus* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, défini sur cet espace, est* $\alpha-$*mélangeant* *si pour tout* k, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$\forall A \in \mathcal{F}_0^k,\ \forall B \in \mathcal{F}_{k+n}^{\infty}, \qquad |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \alpha(n).$$

Intuitivement, si $\alpha(n)$ est petit alors B et A sont presque indépendant, ainsi le processus est asymptotiquement indépendant. Historiquement le théorème de la limite centrale pour des processus $\alpha-$mélangeants remonte à Ibragimov (1962) (voir [13] et [28]) et il est donné pour un processus strictement stationnaire, c'est à dire pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X_{n+k})_{n\in\mathbb{N}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sous l'hypothèse, il existe $\delta > 0$, tel que

$$\sum_{n\geq 0} \alpha^{\frac{\delta}{2+\delta}}(n) < +\infty.$$

Plus précisement on a le théorème suivant :

Théorème 4 Ibragimov.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un processus strictement stationnaire* $\alpha-$*mélangeant. S'il existe* $\delta > 0$*, tel que* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n)^{\frac{\delta}{2+\delta}} < +\infty$ *et* $\mathbb{E}|X_0|^{2+\delta} < +\infty$ *alors*

$$\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Cov}(X_0, X_k)$$

est absolument convergent. En plus, si $\sigma > 0$*, alors*

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (X_k - \mathbb{E}(X_0)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ainsi, nous avons considéré un système dynamique $((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^{\otimes\mathbb{N}}, \mathbb{P}, \theta)$ ergodique, $\mathbb{P} \circ \theta = \mathbb{P}$, où nous avons supposé que les projections canoniques $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires et $\alpha-$mélangeantes avec $\alpha := (\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Lorsque F est cylindrique le processus $(F \circ \theta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste $\alpha-$mélangeant et son coefficient de mélange vérifie la propriété d'Ibragimov si $(\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$ le vérifie et nous avons pu lui appliquer le théorème d'Ibragimov pour obtenir la finitude de $\sigma^2(F)$ et le théorème de la limite centrale. Puis comme dans le cas des innovations indépendantes, dans le cas général nous avons cherché à approcher F par une suite de fonctions cylindriques et avec une vitesse suffisante pour obtenir les mêmes résultats que dans le cas où F est cylindrique.

Concernant nos fonctionnelles $\mathcal{F}_T-$mesurables avec T un temps d'arrêt, nous avons montré que s'il existe $\delta > 0$, tel que l'hypothèse d'Ibragimov soit vérifiée, à savoir $\sum_{n\geq 0} \alpha^{\frac{\delta}{2+\delta}}(n) < +\infty$, et si $T \in L^p((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ pour $p > \frac{2+\delta}{1+\delta}$ alors, pour tout $F \in L^{2+\delta}((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, on a

• $\sigma^2(F)=\mathrm{Var}(F) + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{Cov}(F, F\circ\theta^k)$ est absolument convergent, ceci implique :

• Le théorème de Gàl-Koksma :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F\circ\theta^k - \mathbb{E}(F) = o\left(n^{\frac{1}{2}}(\log(n))^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right) \quad \mathbb{P}\text{-}a.s.$$

• Le théorème de la limite centrale : si $\sigma(F)\neq 0$,

$$\frac{1}{\sigma(F)\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\big(F\circ\theta^k - \mathbb{E}(F)\big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1).$$

Enfin, nous avons aussi utilisé les résultats de W. Phillip et W. Stout dans [52] pour établir la loi du logarithme itéré dans le cas du mélange. Avec une condition drastique sur le coefficient de mélange, $\alpha(n) = o\left(n^{-168(1+\frac{2}{\delta})}\right)$, $\delta \in]0,2]$, qui est essentiellement satisfaite dans un cadre géométrique, et si T admet des moments à tous les ordres (on peut légèrement l'affaiblir), nous avons la loi du logarithme itéré pour tout $F \in L^{2+\delta}$.

Chapitre 2

Méthode particulaire

L'interprétation probabiliste des équations aux dérivées partielles consiste à représenter la solution à l'aide d'un processus stochastique. Lorsque ce modèle de diffusion est non-linéaire, on utilise un système de particules linéarisé associé qui deviennent asymptotiquement indépendant et dont chaque particule converge en loi vers le processus de diffusion.

Ma publication, en collaboration avec Benjamin Jourdain (voir [A10]), sur l'interprétation probabiliste d'une équation de Fokker-Planck non-linéaire, motivée par des applications en rhéologie, m'a permis d'utiliser les méthodes particulaires dans le cadre d'une EDP non-linéaire.

2.1 Introduction

La rhéologie est une partie de la physique qui étudie le comportement de la matière sous l'effet d'une contrainte. La suspension très concentrée de particules colloïdales dans un solvant donne lieu à des produits très complexes. Ces matériaux présentent la caractéristique que sous une contrainte de cisaillement ces solides plastiques deviennent des fluides.

Hébraux et Lequeux (voir [29]) considèrent la matière à l'échelle mésoscopique comme un assemblage de blocs suffisamment grand pour supposer la contrainte de cisaillement constante sur chaque bloc. Au point de vue mathématique, on a une équation de Fokker-Planck représentant la densité de probabilité $p(t,x)$, pour qu'un bloc subisse à l'instant t la contrainte de cisaillement x : $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t}(t,x) = -b(t)\frac{\partial p}{\partial x}(t,x) + D(p(t))\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t,x) - \mathbf{1}_{[-1,1]^c}(x)p(t,x) + \frac{2}{\sigma^2}D(p(t))\delta_0(x) \\ p \geq 0 \\ p(0,x) = \rho_0(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

où pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit

$$D(f) := \frac{\sigma^2}{2} \int_{|x|>1} f(x)dx, \quad \sigma > 0,$$

$b(t) \in L^2[0,T]$ et on note par $\mathbf{1}_{[-1,1]^c}$ la fonction indicatrice du complémentaire de l'intervalle fermé $[-1,1]$, δ_0 la mesure de Dirac en 0, et par ρ_0 une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. D'un point de vue physique lorsque la contrainte de cisaillement est petite, ne dépassant pas un seuil, choisi pour la simplicité égal à 1, la matière se comporte comme un solide plastique, il croît avec un taux de variation $b(t)$ et diffuse avec avec un coefficient $D(p(t))$, lorsqu'il dépasse ce seuil les blocs deviennent instables et leur contrainte de cisaillement s'annule.

Motivé par l'intérêt de ce modèle en physique, Cancès, Catto et Gati (voir [11]) ont étudié l'existence et l'unicité d'une solution faible de l'équation (2.1). Il s'agit d'une EDP non-linéaire, puisque le coefficient de diffusion $D(p(t))\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t,x)$ utilise la solution p. En plus, ce coefficient peut s'annuler ce qui rend le problème plus difficile à étudier. Par solution faible, on veut dire une fonction intégrable $p : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $\psi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ à support compact,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \psi(t,x)p(t,x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \psi(0,x)\rho_0(x)dx \\ &+ \int_{[0,t]\times\mathbb{R}} \left(p\frac{\partial\psi}{\partial s} + bp\frac{\partial\psi}{\partial x} + D(p)p\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \right)(s,x)dsdx \\ &+ \int_{[0,t]\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{|x|>1\}} p(s,x)\left(\psi(s,0) - \psi(s,x)\right) dsdx.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Notation :

– Soit $\tau > 0$, on note par $L_t^\infty([0,\tau], L_x^1 \cap L_x^2)$ l'espace des fonctions $f : [0,\tau] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t,x)|dx \right) < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{t\in[0,\tau]} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t,x)|^2 dx \right) < \infty.$$

– On note par $L_t^2([0,\tau], H_x^1)$ l'espace des fonctions $f : [0,\tau] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où la dérivée de f par rapport à x au sens des distributions est une fonction qu'on note $\frac{\partial f}{\partial x}$ en plus

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}} |f(t,x)|^2 + |\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)|^2 dx < \infty.$$

– On dira que la densité de probabilité ρ_0 satisfait la condition (H) si

$$\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} |x|\rho_0(x)dx < +\infty, \quad \text{et} \quad D(\rho_0) > 0.$$

Dans le théorème suivant on rappelle l'énoncé du Théorème 1.1 de Cancès, Catto et Gati [11] sur l'existence et l'unicité de l'équation (2.1).

Théorème 5 *On suppose que la densité initiale ρ_0 satisfait la condition (H). On a pour tout $T > 0$, il existe une solution unique ρ à l'équation (2.1), au sens faible, dans $L_t^\infty([0,T], L_x^1 \cap L_x^2) \cap L_t^2([0,T], H_x^1)$. En outre, pour tout $t \in [0,T]$, $\int_{\mathbb{R}} \rho(t,x)dx = 1$, il existe une constante $\nu > 0$ telle que*

$$\frac{2}{\sigma^2} D(\rho(t)) > \nu, \qquad \forall t \in [0,T] \tag{2.3}$$

et

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}} |x|\rho(t,x)dx < \infty. \tag{2.4}$$

Il est important de noter qu'on peut déduire le résultat suivant.

Corollaire 1 *Il existe $\alpha > 1$ telle que*

$$\int_{|x|>\alpha} \rho(t,x)dx \geq \frac{\nu}{2}, \quad \forall t \in [0,T].$$

2.2 Interprétation probabiliste

Pour donner une interprétation probabiliste à l'EDP (2.1), on lui a associé un problème de martingale non-linéaire. Soit $D([0,T], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions numériques définies sur $[0,T]$, continues à droite et limitées à gauche, et X le processus canonique sur cet espace.

Définition 2 *Une mesure de probabilité P sur $D([0,T], \mathbb{R})$ avec des marginales $(P_t)_{0\leq t\leq T}$ résout le problème de martingale non-linéaire (MP) si $P_0(dx) = \rho_0(x)dx$ et $\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R})$,*

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \left(b(s)\phi'(X_s) + \frac{\sigma^2}{2} P_s([-1,1]^c)\phi''(X_s) \right) ds$$
$$- \int_0^t (\phi(0) - \phi(X_s)) \mathbf{1}_{\{|X_s|>1\}} ds, \tag{2.5}$$

est une $P-$martingale sur l'intervalle $[0,T]$.

Comme le coefficient de diffusion $\frac{\sigma^2}{2} P_s([-1,1]^c)$ dépend de la loi marginale P_s de la solution, le problème de martingale est non-linéaire. On veut montrer qu'il existe une unique solution P qui n'est autre que la loi de la solution, au sens de McKean, de l'EDS

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma\sqrt{P_s([-1,1]^c)}dW_s + \int_0^t b(s)ds - \int_0^t Y_{s^-}\mathbf{1}_{\{|Y_{s^-}|>1\}}dN_s, \qquad (2.6)$$

avec $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien et $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson, Y_0 est une variable aléatoire de densité ρ_0. On suppose Y_0, $(W_t)_{t\geq 0}$ et $(N_t)_{t\geq 0}$ sont indépendants. Dans ce cas en appliquant la formule d'Itô, on a pour tout $\psi \in C_b^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
&\psi(t,Y_t) - \psi(0,Y_0) = \int_0^t \left(\psi(s,0) - \psi(s,Y_s)\right)\mathbf{1}_{\{|Y_s|>1\}}ds \\
&+ \int_0^t \left(\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,Y_s) + b(s)\frac{\partial\psi}{\partial x}(s,Y_s) + \frac{\sigma^2}{2}P_s([-1,1]^c)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(s,Y_s)\right)ds \\
&+ \int_0^t \frac{\partial\psi}{\partial x}(s,Y_s)\sigma\sqrt{P_s([-1,1]^c)}dW_s + \int_0^t \left(\psi(s,0) - \psi(s,Y_{s^-})\right)\mathbf{1}_{\{|Y_{s^-}|>1\}}d(N_s - s)
\end{aligned}$$

Comme les intégrales stochastiques sont des martingales sur $[0,T]$, en prenant l'espérance on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \psi(t,x)P_t(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \psi(0,x)\rho_0(x)dx \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial s} + b\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}P_s([-1,1]^c)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)(s,x)P_s(dx)ds \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{|x|>1\}}\left(\psi(s,0) - \psi(s,x)\right)P_s(dx)ds.
\end{aligned}$$

En la comparant à la relation (2.2), on déduit le lien avec l'EDP.

Lemme 1 *Si P est solution du problème de martingale nonlinéaire (MP) alors $t \to P_t$ est solution faible de l'EDP.*

L'idée principale est que si P est solution du problème de martingale, non-linéaire (MP) alors en posant $a(s) = \frac{\sigma^2}{2}P_s([-1,1]^c)$, P est aussi la solution du problème de martingale linéaire (LMP) de loi initiale $\rho_0(x)dx$ où on remplace dans la relation (2.5) le terme non-linéaire $\frac{\sigma^2}{2}P_s([-1,1]^c)$ par une fonction positive $a(s)$. Le problème devient plus simple et une étude préalable du problème de martingale linéaire s'impose.

Définition 3 *Une mesure de probabilité P sur $D([0,T],\mathbb{R})$ avec des marginales $(P_t)_{0\leq t\leq T}$ résout le problème de martingale linéaire (LMP) de loi initiale λ si*

$P_0 = \lambda$ *et* $\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R})$,

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t (b(s)\phi'(X_s) + a(s)\phi''(X_s))\,ds \\ - \int_0^t (\phi(0) - \phi(X_s))\,\mathbf{1}_{\{|x|>1\}}ds, \quad (2.7)$$

est une $P-$*martingale sur l'intervalle* $[0,T]$*, avec* a *une fonction positive donnée.*

On associe au problème de martingale linéaire l'EDS :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \gamma(s)dW_s + \int_0^t b(s)ds - \int_0^t Y_{s^-}\mathbf{1}_{\{|Y_{s^-}|>1\}}dN_s \quad (2.8)$$

avec $\gamma(s) = \sqrt{2a(s)}$. L'existence et l'unicité de cette équation nous a permis de conclure, en utilisant Lepeltier et Marchal [41], que la loi de la solution de l'EDS (2.8) ci-dessus est solution du problème de martingale linéaire et ceci pour toute loi initiale $\lambda \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Puis on a obtenu un résultat en cohérence avec le théorème 5 d'analyse de Cancès, Catto et Gati à savoir que si la loi initiale admet une densité dans $L^2(\mathbb{R})$ et si le coefficient de diffusion est minoré par une constante strictement positive sur un intervalle $[0,\tau]$, $\tau > 0$ alors la loi marginale du processus P_t admet une densité par rapport à la densité de Lebesgue, $P_t(dx) = p(t,x)dx$, et la fonction $p(t,x)$ appartient au bon espace $L_t^\infty([0,\tau], L_x^1 \cap L_x^2) \cap L_t^2([0,\tau], H_x^1)$ où vit la solution ρ de l'EDP.

Pour le problème de martingale non-linéaire (MP), en utilisant ce résultat et le corollaire 1, on a montré que lorsque ρ_0 vérifie la condition (H), il existe τ tel que les lois marginales de la solution de l'EDS non-linéaire (2.6) ont pour tout $t \in [0,\tau]$ une densité $p(t,x)$, cette densité appartient au bon espace et donc $p(t,.) = \rho(t,.)$. Comme la densité $p(\tau,x)$ vérifie elle aussi la condition (H) on a montré de proche en proche le résultat sur tout l'intervalle. Plus précisément on a obtenu le premier résultat sur le problème de martingale non-linéaire (MP) suivant.

Proposition 2 *On suppose* ρ_0 *vérifie la condition* (H)*. Si* P *est solution faible de l'EDS non-linéaire alors pour tout* $t \in [0,T]$*,* P_t *a pour densité* $\rho(t,.)$*.*

Ceci nous a permis d'établir un théorème d'existence et d'unicité concernant le problème de martingale (MP) et donc de l'EDS non-linéaire (2.6).

Théorème 6 *On suppose* ρ_0 *vérifie la condition* (H)*. L'EDS non-linéaire admet une solution unique. En plus,* $\forall t \in [0,T]$*,* $P_t(dx) = \rho(t,x)dx$*, où* $(P_t)_{t\geq 0}$ *sont les lois marginales de l'unique solution* P*.*

2.3 Loi des grands nombres

On a défini un système de n particules par le système d'EDS suivant

$$Y_t^{i,n} = Y_0^i + \sigma \int_0^t \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{|Y_s^{j,n}|>1\}} \vee \frac{1}{n}} dW_s^i + \int_0^t b(s)ds$$
$$- \int_0^t Y_{s^-}^{i,n}\mathbf{1}_{\{|Y_{s^-}^{i,n}|>1\}} dN_s^i, \ 1 \le i \le n \quad (2.9)$$

avec $(W^i)_{1\le i\le n}$ sont n-mouvements Brownien indépendants, $(N^i)_{1\le i\le n}$ sont n-processus de Poisson indépendants d'intensité 1, $(Y_0^i)_{1\le i\le n}$ sont n-variables aléatoires indépendantes de loi $\rho_0(x)dx$, et on suppose que $(W^i)_{1\le i\le n}$, $(N^i)_{1\le i\le n}$ et $(Y_0^i)_{1\le i\le n}$ sont indépendants.

Existence et unicité du système de particules : comme la mesure empirique de l'ensemble $[-1,1]^c$, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{|Y_s^{j,n}|>1\}}$, peut s'annuler on a pris le sup avec $\frac{1}{n}$ pour avoir une matrice de diffusion non dégénérée. Entre les sauts le système de particules $(Y^{1,n}, ..., Y^{n,n})$ évoluent comme une diffusion de $\mathbb{R}^n$ avec une matrice de diffusion constante par morceaux et non dégénérée. Ainsi notre diffusion rentre dans le cadre de Bass et Pardoux [5] et on peut l'utiliser pour en déduire l'unicité. Par l'exercice 7.3.2 p. 191 dans Stroock et Varadhan [58], on peut obtenir l'existence. Pour résumer on a l'existence et l'unicité en loi pour le système de particule définie par la relation (2.9) ci-dessus.

Soit $\mu^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{Y^{i,n}}$ la mesure empirique du système de particule. μ^n est une variable aléatoire à valeur dans l'espace des probabilités $\mathcal{P}(D([0,T],\mathbb{R}))$.

Théorème 7 *On suppose que la loi initiale de densité ρ_0 vérifie la condition (H). Lorsque n tend vers l'infini, la suite des variables aléatoires μ^n converge en probabilité vers P, la loi de l'unique solution de l'EDS non-linéaire.*

La contrainte de cisaillement macroscopique $\tau(t)$ est égale à l'espérance des contraintes mésoscopique,

$$\tau(t) := \int_{\mathbb{R}} x\rho(t,x)dx,$$

et on peut la simuler grâce au système de particule.

Corollaire 2 *On suppose que ρ_0 vérifie la condition (H). On a*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_t^{i,n} - \int_{\mathbb{R}} x\rho(t,x)dx\right| = 0.$$

2.4 Résultats numériques

Nous avons considéré des exemples stationnaires donnés dans l'article de Cancès, Catto et Gati. Lorsque $b(t) = b$, l'EDP (2.1) admet une solution stationnaire explicite qu'on a utilisé pour tester nos résultats. Pour n fixé et afin de simuler n particules en interaction données par la l'équation (2.9), nous avons discrétisé le temps et nous avons considéré n positions $(\hat{Y}^{i,n}_{k\frac{T}{K}})_{1\leq i\leq n}$ pour les instants $k\frac{T}{K}$, $0 \leq k \leq K$, avec K est un entier fixer. A l'instant initial, on a simulé n particules indépendantes de densité $\rho_0(x)$. Pour $k \in \{1, \cdots, K\}$, on a associé n particules en itérant l'algorithme suivant : $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$

$$\text{si } |\hat{Y}^{i,n}_{(k-1)\frac{T}{K}}| > 1 \text{ et } U^i_k \leq \tfrac{T}{K} \text{ alors } \hat{Y}^{i,n}_{k\frac{T}{K}} = 0$$
$$\text{sinon } \hat{Y}^{i,n}_{k\frac{T}{K}} = \hat{Y}^{i,n}_{(k-1)\frac{T}{K}} + \sigma D_{(k-1)\frac{T}{K}}\sqrt{\tfrac{T}{K}}G^i_k + b\tfrac{T}{K},$$

avec $D_{(k-1)\frac{T}{K}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{|\hat{Y}^{i,n}_{(k-1)\frac{T}{K}}|>1\}}}$.

- $\{G^i_k, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq K\}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes de loi gaussienne centrée réduite.
- $\{U^i_k, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq K\}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.
- $\{G^i_k, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq K\}$ et $\{U^i_k, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq K\}$ sont indépendants.

On a approximé la contrainte de cisaillement moyen $\tau(t) = \int_{\mathbb{R}} xp(t, x)dx$ aux points $k\frac{T}{K}$, $k \in \{0, \cdots, K\}$, par la moyenne empirique

$$\tau(k\frac{T}{K}) \approx \tau^n_{k\frac{T}{K}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{Y}^{i,n}_{k\frac{T}{K}}.$$

Ainsi, on a testé notre convergence L^1, on a observé la convergence de $\mathbb{E}(|\tau^n_1 - \int_{\mathbb{R}} xp(x)dx|)$, cette erreur décroît en $\frac{C}{\sqrt{n}}$, puis on a vérifié le théorème de la limite centrale expérimentalement par rapport au nombre n de particules. Enfin on a observé sur l'exemple stationnaire que $\mathbb{E}(\tau^n_1)$ converge en $\frac{C}{K}$ par rapport K.

Chapitre 3

Estimation des paramètres du CIR

Plus récemment et en collaboration avec Ahmed Kebaier, on s'est intéressé au problème de calibration dans le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Dans ce travail nous avons considéré les estimateurs du maximum de vraisemblance et on a étudié leur comportement asymptotique, en temps long, dans un cadre général couvrant les deux cas ergodique et non-ergodique. En plus, des algorithmes numériques pour la simulation exacte de ces estimateurs ont été proposés. Cette activité a mené à la rédaction de deux articles, [A12] et [P1] qui ont été présentés dans les conférences internationales de mathématiques financières, [C2], [C3], [C4] et [C5].

3.1 Introduction

le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), très utilisé en mathématiques financières pour modéliser l'évolution des taux d'intérêt à court terme est représenté par l'EDS

$$dX_t = (a - bX_t)dt + \sqrt{2\sigma|X_t|}dW_t, \tag{3.1}$$

avec $X_0 = x > 0$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard. On sait que cette équation admet une solution unique positive et le cas $b = 0$ avec $\sigma = 2$ correspond au carré de Bessel de dimension a. Il est aussi connu que pour $a \geq \sigma$, ce processus ne visite pas l'état 0. Par contre si $a < \sigma$, le processus visite l'état 0 presque sûrement, si $b \geq 0$, et avec une probabilité comprise entre $]0, 1[$, si $b < 0$. Au point de vue ergodique, pour $b > 0$, le CIR admet pour probabilité invariante $\pi \rightsquigarrow \Gamma(a/\sigma, \sigma/b)$ et pour tout $h \in L^1(\pi)$,

$$\frac{1}{t}\int_0^t h(X_s)ds \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} h(x)\pi(dx) \quad p.s.$$

Fournié et Talay ont étudié l'estimateur du maximum de vraisemblance (emv) du CIR, dans un cadre continu où on suppose qu'on observe le processus sur tout l'intervalle $[0, T]$ et dans le cas particulier $b > 0$ et $a > \sigma$. Dans ce cas le processus est ergodique et les asymptotiques obtenues sont basées sur l'usage du théorème de la limite centrale pour les martingales. Il est important de rappeler que la plus part des résultats dans la litérature concernant l'estimation du paramètre du drift sont données dans un cadre régulier sous l'hypothèse d'ergodicité. L'idée principale pour étudier l'emv des paramètres du drift dans un cadre ergodique et non-ergodique est que l'erreur de l'estimateur est de la forme $(\langle M\rangle_t)^{-1}M_t$, avec $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale Brownienne et $\langle M\rangle_t$ et sa variation quadratique. Une étude préalable de l'asymptotique du couple $(M_t, \langle M\rangle_t)$ nous a permis d'obtenir des résultats originaux concernant les vitesses de convergence et les limites obtenues. Comme la variation quadratique introduit les quantités $\int_0^t X_s ds$ et $\int_0^t \frac{ds}{X_s}$, nous avons étudié dans un premiers temps les asymptotiques de ces intégrales.

3.2 Comportement asymptotique de $\int_0^t X_s ds$ et $\int_0^t \frac{ds}{X_s}$

L'outil principal pour déterminer les asymptotiques est la transformée de Laplace des quantités à étudier. Suivant les cas $b = 0$ ou $b \neq 0$, nous avons obtenu les résultats suivant.

3.2.1 Cas $b = 0$

Concernant l'asymptotique de $\int_0^t X_s ds$, si l'on considère $(X_t)_{t\geq 0}$ avec $b = 0$

$$dX_t = adt + \sqrt{2\sigma X_t}dW_t, \tag{3.2}$$

alors on a montré que

$$\left(\frac{X_t}{t}, \frac{1}{t^2}\int_0^t X_s ds\right) \xrightarrow{loi} (R_1, I_1),$$

avec $(R_t)_{t\geq 0}$ est un processus partant de 0 solution de (3.2) et $I_t = \int_0^t R_s ds$.

Plus généralement une étude de l'asymptotique du triplet $(X_t, \int_0^t X_s ds, \int_0^t \frac{ds}{X_s})$ nous a donné

1. $\mathbb{P}_x\left(\int_0^t \frac{ds}{X_s} < \infty\right) = 1$ si et seulement si $a \geq \sigma$.
2. si $a > \sigma$ alors

$$\left(\frac{X_t}{t}, \frac{1}{t^2}\int_0^t X_s ds, \frac{1}{\log t}\int_0^t \frac{ds}{X_s}\right) \xrightarrow{law} \left(R_1, I_1, \frac{1}{a-\sigma}\right)$$

3. si $a = \sigma$ alors
$$(\frac{X_t}{t}, \frac{1}{t^2}\int_0^t X_s ds, \frac{1}{(\log t)^2}\int_0^t \frac{ds}{X_s}) \xrightarrow{law} (R_1, I_1, \tau_1).$$
où $\tau_1 := \inf\{t > 0 \,:\, W_t = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}}\}$ est une variable indépendante de (R_1, I_1).

Pour déterminer la transformée de Laplace du triplet $(X_t, \int_0^t X_s ds, \int_0^t \frac{ds}{X_s})$, nous avons utilisé des résultats récents de Craddock et Lennox et nous avons obtenu que pour $\rho \geq 0, \lambda \geq 0$, $\mu > 0$ et $\eta \in]-k-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left(X_t^\eta e^{-\rho X_t - \lambda\int_0^t X_s ds - \mu\int_0^t \frac{ds}{X_s}}\right) &= \frac{\Gamma(\eta + k + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} x^\eta \,(z(t))^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}-k-\eta} \\ \times \left(\frac{\sqrt{\sigma\lambda}x}{\sigma\sinh(\sqrt{\sigma\lambda}t)}\right)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}-k-\eta} &\exp\left(-\frac{\sqrt{\sigma\lambda}x}{\sigma}\coth(\sqrt{\sigma\lambda}t)\right) \\ &\times {}_1F_1\left(\eta + k + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, \nu+1, \frac{\sqrt{\sigma\lambda}x}{\sigma\sinh(\sqrt{\sigma\lambda}t) z(t)}\right)\end{aligned}$$

avec $z(t) = \Big((\sqrt{\sigma}\rho/\sqrt{\lambda})\sinh(\sqrt{\sigma\lambda}t) + \cosh(\sqrt{\sigma\lambda}t)\Big)$, $k = \dfrac{a}{2\sigma}$ et $\nu = \dfrac{1}{\sigma}\sqrt{(a-\sigma)^2 + 4\mu\sigma}$.

3.2.2 Cas $b \neq 0$

Concernant l'asymptotique de $\int_0^t X_s ds$, si l'on reprend le modèle général avec $b \neq 0$, à savoir
$$dX_t = (a - bX_t)dt + \sqrt{2\sigma X_t} dW_t, \tag{3.3}$$
on a suivant le signe de b,

1. si $b > 0$ alors $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t X_s ds \xrightarrow{\mathbb{P}} \dfrac{a}{b}$,
2. si $b < 0$ alors $\left(e^{bt}X_t, e^{bt}\displaystyle\int_0^t X_s ds\right) \xrightarrow{loi} (R_{t_0}, t_0 R_{t_0})$,
   où $t_0 = -1/b$ et $(R_t)_{t\geq 0}$ est solution de (3.2), partant de x
$$dR_t = adt + \sqrt{2\sigma R_t} dW_t, \quad R_0 = x.$$

Plus généralement, nous avons déterminé l'asymptotique du triplet $(X_t, \int_0^t X_s ds, \int_0^t \frac{ds}{X_s})$ et on a obtenu.

1. $\mathbb{P}_x\left(\displaystyle\int_0^t \frac{ds}{X_s} < \infty\right) = 1$ si et seulement si $a \geq \sigma$.

2. Si $b > 0$ et $a > \sigma$ alors $\left(\frac{1}{t}\int_0^t X_s ds, \frac{1}{t}\int_0^t \frac{ds}{X_s}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \left(\frac{a}{b}, \frac{b}{a-\sigma}\right)$.
3. Si $b > 0$ et $a = \sigma$ alors $\left(\frac{1}{t}\int_0^t X_s ds, \frac{1}{t^2}\int_0^t \frac{ds}{X_s}\right) \xrightarrow{law} \left(\frac{a}{b}, \tau_2\right)$, avec $\tau_2 := \inf\{t > 0 : W_t = \frac{b}{\sqrt{2\sigma}}\}$.
4. Si $b < 0$ et $a \geq \sigma$ alors $\left(e^{bt}X_t, e^{bt}\int_0^t X_s ds, \int_0^t \frac{ds}{X_s}\right) \xrightarrow{law} (R_{t_0}, t_0 R_{t_0}, I_{t_0})$.

On a aussi utilisé les résultats de Craddock et Lennox pour obtenir la transformée suivante. Pour $\rho \geq 0, \lambda \geq 0$ et $\mu > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left(e^{-\rho X_t - \lambda\int_0^t X_s ds - \mu\int_0^t \frac{ds}{X_s}}\right) &= \frac{\Gamma(k+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{Ax}{2\sigma\sinh(At/2)}\right)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}-k} \\
&\times \exp\left(\frac{b}{2\sigma}(at+x) - \frac{Ax}{2\sigma}\coth(At/2)\right)(z(t))^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}-k} \\
&\times {}_1F_1\left(k+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}, \nu+1, \frac{Ax}{2\sigma\sinh(At/2)\,(z(t))}\right)
\end{aligned}$$

où $z(t) = \frac{2\sigma\rho + b}{A}\sinh(At/2) + \cosh(At/2)$,
$k = \frac{a}{2\sigma}$, $A = \sqrt{b^2 + 4\sigma\lambda}$ et $\nu = \frac{1}{\sigma}\sqrt{(a-\sigma)^2 + 4\mu\sigma}$.

3.3 Estimation à partir des observations continues

Lorsqu'on considère une diffusion $(X_t)_{t\geq 0}$ solution de l'EDS

$$dX_t = b(\theta, X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0,$$

avec $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, est un paramètre à estimer, on peut considérer l'estimateur du maximum de vraisemblance à savoir

$$\hat{\theta}_T = argmax(L_T^{\theta,\theta_0})$$

avec L_T^{θ,θ_0} est le rapport de vraisemblance,

$$L_T^{\theta,\theta_0} = \exp\left\{\int_0^T \frac{b(\theta, X_s) - b(\theta_0, X_s)}{\sigma^2(X_s)}dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{b^2(\theta, X_s) - b^2(\theta_0, X_s)}{\sigma^2(X_s)}ds\right\}.$$

Lorsqu'on estime b et on suppose a connu, on a l'emv $\hat{b}_T = \dfrac{aT + x - X_T}{\int_0^T X_s ds}$. Ainsi l'erreur est bien une martingale brownienne sur son crochet $\hat{b}_T - b = -\sqrt{2\sigma}\dfrac{\int_0^T \sqrt{X_s} dW_s}{\int_0^T X_s ds}$.
et en utilisant la dynamique de X_t nous avons $\hat{b}_T - b = \dfrac{aT + x - X_T - b\int_0^T X_s ds}{\int_0^T X_s ds}$.
A l'aide des asymptotiques sur le couple $(X_T, \int_0^T X_s ds)$, nous avons obtenu.

1. Cas $b > 0$: $\mathcal{L}_b\left\{\sqrt{T}(\hat{b}_T - b)\right\} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2\sigma\frac{b}{a})$.
2. Cas $b = 0$: $\mathcal{L}_b\left\{T(\hat{b}_T - b)\right\} \Longrightarrow \dfrac{a - R_1}{I_1}$, avec (R_t) est un processus partant de 0 solution de l'équation (3.2) et $I_t = \int_0^t R_s ds$.
3. Cas $b < 0$: $\mathcal{L}_b\left\{e^{-bT/2}(\hat{b}_T - b)\right\} \Longrightarrow \dfrac{G}{R}$, avec
$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda G - \mu R}\right) = \left(\frac{b}{\mu\sigma/b + b}\right)^{\frac{a}{\sigma}} \exp\left(x\frac{\sigma\lambda^2/b + \mu}{\mu\sigma/b + b}\right),$$
pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \geq 0$.

Lorsqu'on estime a et on suppose b connu, l'emv $\hat{a}_T$ existe si et seulement si $\mathbb{P}_a(\int_0^T \frac{ds}{X_s} < \infty) = 1$, soit $a \geq \sigma$, et $\hat{a}_T = \dfrac{bT + \int_0^T \frac{dX_s}{X_s}}{\int_0^T \frac{ds}{X_s}}$. Là aussi l'erreur est bien une martingale brownienne sur son crochet $\hat{a}_T - a = \sqrt{2\sigma}\dfrac{\int_0^T \frac{dW_s}{\sqrt{X_s}}}{\int_0^T \frac{ds}{X_s}}$, et en utilisant la dynamique de $\log X_T$ nous avons $\hat{a}_T - a = \dfrac{\log X_T - \log x + bT + (\sigma - a)\int_0^T \frac{ds}{X_s}}{\int_0^T \frac{ds}{X_s}}$.
Les asymptotiques sur le couple $(\log X_T, \int_0^T \frac{ds}{X_s})$, nous ont permis de montrer les résultats suivants.

1. Si $b > 0$ et $a > \sigma$: $\mathcal{L}_a\left\{\sqrt{T}(\hat{a}_T - a)\right\} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \dfrac{2\sigma(a-\sigma)}{b})$.
2. Si $b > 0$ et $a = \sigma$: $\mathcal{L}_a\left\{T(\hat{a}_T - a)\right\} \Longrightarrow \dfrac{b}{\tau_2}$, avec $\tau_2 = \inf\{t > 0 : W_t = \frac{b}{\sigma\sqrt{2}}\}$.
3. Si $b = 0$ et $a > \sigma$: $\mathcal{L}_a\left\{\sqrt{\log T}(\hat{a}_T - a)\right\} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2\sigma(a - \sigma))$.
4. Si $b = 0$ et $a = \sigma$: $\mathcal{L}_a\left\{(\log T)(\hat{a}_T - a)\right\} \Longrightarrow \dfrac{1}{\tau_1}$, avec $\tau_1 = \inf\{t > 0 : W_t = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}}\}$.

5. Si $b < 0$ et $a \geq \sigma$: l'emv $\hat{a}_T$ de a est non consistant.

Enfin lorsqu'on estime globalement le paramètre $\theta = (a, b)$, l'emv $\hat{\theta}_T$ existe si et seulement si $a \geq \sigma$, et

$$\hat{\theta}_T = \begin{cases} \dfrac{\int_0^T X_s ds \int_0^T \frac{dX_s}{X_s} - T(X_T - x)}{\int_0^T \frac{ds}{X_s} \int_0^T X_s ds - T^2} \\ \\ \dfrac{T \int_0^T \frac{dX_s}{X_s} - (X_T - x) \int_0^T \frac{ds}{X_s}}{\int_0^T \frac{ds}{X_s} \int_0^T X_s ds - T^2} \end{cases}$$

L'erreur $\hat{\theta}_T - \theta$ est égale à

$$= \begin{cases} \sqrt{2\sigma} \dfrac{\int_0^T X_s ds \int_0^T \frac{dW_s}{\sqrt{X_s}} - T \int_0^T \sqrt{X_s} dW_s}{\int_0^T \frac{ds}{X_s} \int_0^T X_s ds - T^2} \\ \\ \sqrt{2\sigma} \dfrac{T \int_0^T \frac{dW_s}{\sqrt{X_s}} - \int_0^T \frac{ds}{X_s} \int_0^T \sqrt{X_s} dW_s}{\int_0^T \frac{ds}{X_s} \int_0^T X_s ds - T^2} \end{cases}$$

La dynamique du couple $(\log X_T, X_T)$ nous ont permis d'écrire l'erreur

$$= \begin{cases} \dfrac{\left(\log(X_T/x) + (\sigma - a) \int_0^T \frac{ds}{X_s}\right) \int_0^T X_s ds - T \left(X_T - x - aT\right)}{\int_0^T \frac{ds}{X_s} \int_0^T X_s ds - T^2} \\ \\ \dfrac{T \left(\log(X_T/x) + bT + \sigma \int_0^T \frac{ds}{X_s}\right) - \left(X_T - x + b \int_0^T X_s ds\right) \int_0^T \frac{ds}{X_s}}{\int_0^T \frac{ds}{X_s} \int_0^T X_s ds - T^2} \end{cases}$$

A l'aide des asymptotiques précédentes nous avons montré que dans le cas ergodique

1. si $b > 0$ et $a > \sigma$:
$$\mathcal{L}_\theta \left\{ \sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta) \right\} \Longrightarrow \mathcal{N}_{\mathbb{R}^2} \left(0, 2\sigma C^{-1}\right),$$
avec $C = \begin{pmatrix} \frac{b}{a-\sigma} & -1 \\ -1 & \frac{a}{b} \end{pmatrix}$.
2. Si $b > 0$ et $a = \sigma$:
$$\mathcal{L}_\theta \left\{ \mathrm{diag}(T, \sqrt{T})(\hat{\theta}_T - \theta) \right\} \Longrightarrow \left(\frac{b}{\tau_2}, \sqrt{2b} G \right)$$
avec G est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite indépendante de $\tau_2 = \inf\{t > 0 \,:\, W_t = \frac{b}{\sqrt{2\sigma}}\}$.

Dans le cas non-ergodique nous avons obtenu

1. si $b = 0$ et $a > \sigma$:
$$\mathcal{L}_\theta \left\{ \mathrm{diag}(\sqrt{\log T}, T)(\hat\theta_T - \theta) \right\} \Longrightarrow \left(\sqrt{2\sigma(a-\sigma)}G, \frac{a - R_1}{I_1} \right)$$
avec G est une variable aléatoire de loi normale indépendante des variables (R_1, I_1) définies précédemment.
2. Si $b = 0$ et $a = \sigma$:
$$\mathcal{L}_\theta \left\{ \mathrm{diag}(\log T, T)(\hat\theta_T - \theta) \right\} \Longrightarrow \left(\frac{1}{\tau_1}, \frac{a - R_1}{I_1} \right)$$
avec $\tau_1 := \inf\{t > 0 \,:\, W_t = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}}\}$ est une variable independante de (R_1, I_1).
3. Si $b < 0$ et $a \geq \sigma$ alors l'emv est non consistant.

3.4 Estimation à partir des observations discrètes

Dans cette partie, on suppose qu'on observe le processus aux instants $(t_k = k\Delta_n)_{0\le k\le n}$ que $\Delta_n \to 0$ et $n\Delta_n \to \infty$. Une des méthodes connues est de considérer une discrétisation de la log vraisemblance, soit le contraste

$$L_{t_n}^{\Delta_n} = \frac{1}{2\sigma}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a - bX_{t_k}}{X_{t_k}}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) - \frac{1}{4\sigma}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_n \frac{(a - bX_{t_k})^2}{X_{t_k}}$$

et de prendre son $argmax$. Notre approche est un peu différente puisqu'on a plutôt discrétisé l'emv obtenu à partir des observations continues. Nous avons $\hat\theta_{t_n}^{\Delta_n} = (\hat a_{t_n}^{\Delta_n}, \hat b_{t_n}^{\Delta_n}) =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left(\log X_{t_n} - \log x + \sigma \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta_n}{X_{t_k}}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_n X_{t_k} - t_n\left(X_{t_n} - x\right)}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta_n}{X_{t_k}} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_n X_{t_k} - t_n^2} \\[3ex] \dfrac{t_n\left(\log X_{t_n} - \log x + \sigma \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta_n}{X_{t_k}}\right) - (X_{t_n} - x)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta_n}{X_{t_k}}}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta_n}{X_{t_k}} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_n X_{t_k} - t_n^2}. \end{array} \right.$$

Pour contrôler les normes L^1 de $\int_0^{t_n} X_s ds - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_n X_{t_k}$ et $\int_0^{t_n} \frac{ds}{X_s} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta_n}{X_{t_k}}$, nous avons calculé les moments des accroissement du CIR. Ceci nous a permis de transférer les vitesses de convergence obtenues dans le cadre continu au cadre discret. Nous a avons obtenu.

Cas ergodique : Pour $b > 0$ et $a > 2\sigma$, si $n\Delta_n^2 \to 0$ alors

$$\mathcal{L}_\theta \left\{ \sqrt{t_n}(\hat{\theta}_{t_n}^{\Delta_n} - \theta) \right\} \Longrightarrow \mathcal{N}_{\mathbb{R}^2}\left(0, 2\sigma\Gamma^{-1}\right), \text{ avec } \Gamma = \begin{pmatrix} \frac{b}{a-\sigma} & -1 \\ -1 & \frac{a}{b} \end{pmatrix}.$$

La démonstration est basée sur les convergences suivantes

$$\sqrt{t_n}\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} X_s ds - \frac{1}{t_n}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_n X_{t_k} \right) \xrightarrow{L^1} 0$$

et

$$\sqrt{t_n}\left(\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \frac{1}{X_s} ds - \frac{1}{t_n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta_n}{X_{t_k}} \right) \xrightarrow{L^1} 0,$$

Cas non-ergodique Pour $b = 0$ et $a > 2\sigma$, si $\max\left(n\Delta_n^2, \frac{n\Delta_n^{\frac{3}{2}}}{\log(n\Delta_n)} \right) \to 0$ alors

$$\mathcal{L}_\theta \left\{ \operatorname{diag}(\sqrt{\log t_n}, t_n)(\hat{\theta}_{t_n}^{\Delta_n} - \theta) \right\} \Longrightarrow \left(\sqrt{2\sigma(a-\sigma)}G, \frac{a - R_1}{I_1} \right).$$

La démonstration est basée sur les convergences suivantes :

$$\text{si } n\Delta_n^2 \to 0 \text{ alors } t_n\left(\frac{1}{t_n^2}\int_0^{t_n} X_s ds - \frac{1}{t_n^2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_n X_{t_k} \right) \xrightarrow{L^1} 0$$

$$\text{si } \frac{n\Delta_n^{\frac{3}{2}}}{\log(n\Delta_n)} \to 0 \text{ alors } t_n\left(\frac{1}{\log t_n}\int_0^{t_n} \frac{1}{X_s} ds - \frac{1}{\log t_n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta_n}{X_{t_k}} \right) \xrightarrow{L^1} 0.$$

3.5 Simulations numériques

Pour illustrer nos résultats asymptotiques sur les les vitesses de convergence de l'emv avec des observations continues, nous avons simulé les couples $(X_T, \int_0^T X_s ds)$ et $(X_T, \int_0^T \frac{ds}{X_s})$ avec des méthodes exactes. Pour le premier, nous avons utilisé la méthode de Broadie et Kaya et pour le deuxième, nous avons déterminé la transformée de Laplace conditionnelle de $\int_0^T \frac{ds}{X_s}$ sachant X_T, puis nous avons proposé une méthode de simulation similaire.

Algorithme pour simuler $(X_T, \int_0^T X_s ds)$ La transformée de Laplace conditionnelle de $\int_0^t X_s ds$ sachant X_t, est donnée par

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) = \mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda\int_0^t X_s ds}|X_t = y\right) &= \frac{\gamma(\lambda)}{b}\frac{\sinh(bt/2)}{\sinh(\gamma(\lambda)t/2)} \\ &\times \exp\left(\frac{x+y}{2\sigma}\left[b\coth(bt/2) - \gamma(\lambda)\coth(\gamma(\lambda)t/2)\right]\right) \\ &\times \frac{I_\nu\left(\frac{\gamma(\lambda)}{\sigma}\sqrt{xy}/\sinh(\gamma(\lambda)t/2)\right)}{I_\nu\left(\frac{b}{\sigma}\sqrt{xy}/\sinh(bt/2)\right)}, \quad \lambda \geq 0\end{aligned}$$

avec $\gamma(\lambda) = \sqrt{b^2 + 4\lambda\sigma}$ et $\nu = \dfrac{a}{\sigma} - 1$. A l'aide de ce résultat, Broadie et Kaya ont proposé l'algorithme de simulation exacte suivant.

étape 1 Générer X_T avec la loi de chi2 décentrée

$$X_T \stackrel{law}{=} \frac{\sigma(1-e^{-bT})}{2b}\chi'^2_{\frac{2a}{\sigma}}\left(\frac{2be^{-bT}}{\sigma(1-e^{-bT})}x\right).$$

étape 2 Générer $\int_0^T X_s ds$ sachant X_T à l'aide d'une approximation de la fonction de répartition F de la loi conditionnelle.

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ux)}{u}\mathrm{Re}\left[\Phi(-iu)\right]du. \\ &\simeq \frac{hx}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\frac{\sin(hjx)}{j}\mathrm{Re}\left[\Phi(hj)\right]\end{aligned}$$

Pour le couple $(X_T, \int_0^T \frac{ds}{X_s})$, on a déterminé la transformée de Laplace conditionnelle et on a obtenu, pour $\lambda > 0$,

$$\mathbb{E}_x\left(e^{-\lambda\int_0^t \frac{ds}{X_s}}|X_t = y\right) = \frac{I_{\gamma(\lambda)}\left(\frac{b}{\sigma}\sqrt{xy}/\sinh(bt/2)\right)}{I_\nu\left(\frac{b}{\sigma}\sqrt{xy}/\sinh(bt/2)\right)}$$

avec $\gamma(\lambda) = \sqrt{(a-\sigma)^2 + 4\lambda\sigma}/\sigma$ et $\nu = \dfrac{a}{\sigma} - 1$. Puis on a proposé un algorithme de simulation exacte similaire à celui de de Broadie et Kaya. Ces algorithmes nous ont permis d'illustrer les convergences des erreurs de $\hat{b}_T - b$ et $\hat{a}_T - a$.

Chapitre 4

La méthode Multilevel Monte Carlo

Introduite par Giles [21], la méthode de Multilevel Monte Carlo permet de réduire efficacement la complexité par rapport à la méthode de Monte Carlo classique. Cette méthode peut être interprétée aussi comme une méthode de réduction de variance dans le calcul d'espérance de fonctionnelle de processus discrétisé. Dans ce cadre de recherche et en collaboration avec Ahmed Kebaier nous obtenons un théorème de la limite centrale pour l'algorithme Multilevel Monte Carlo, de type Lindeberg-Feller, permettant d'avoir une description précise du choix optimal des paramètres de cette méthode. Nous étendons également les théorèmes limites obtenus par cette méthode pour l'évaluation des prix des options asiatiques en discrétisant l'intégrale figurant dans le payoff par la méthode des trapèzes et la méthode de Riemann. Ces résultats ont fait l'objet de la prépublication [P2].

4.1 Introduction

Soit $X := (X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, donné par l'EDS

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^d,$$

avec $W := (W_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement Brownien standard sur $\mathbb{R}^q$, $q \geq 1$, $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times q}$ deux fonctions qu'on suppose globalement Lipschitziennes pour assurer l'existence et l'unicité. Lorsqu'on cherche à calculer numériquement $\mathbb{E}f(X_T)$ la méthode de Monte Carlo se trouve être une méthode efficace. Elle consiste à approximer dans un premier temps le processus X par un processus $X^n := (X^n_t)_{0\leq t\leq T}$, puis d'approximer par la loi forte des grands nombres $\mathbb{E}f(X^n_T)$ par $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(X^n_{T,i})$ avec $X^n_{\cdot,i}$ sont des copies indépendantes de même loi que X^n. Ainsi, on a deux types d'erreur, l'erreur de discrétisation et l'erreur statistique

$$\varepsilon_n := \mathbb{E}f(X_T^n) - \mathbb{E}f(X_T) \quad \text{et} \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_{T,i}^n) - \mathbb{E}f(X_T^n).$$

Lorsqu'on considère le schéma d'Euler continu comme processus approximant, autrement dit pour un pas de discrétisation $\delta := T/n$

$$dX_t^n = b(X_{\eta_n(t)})dt + \sigma(X_{\eta_n(t)})dW_t, \quad \eta_n(t) = [t/\delta]\delta,$$

sous certaines conditions de régularité, Talay et Tubaro [59] montrent que l'erreur $\varepsilon_n = O(\frac{1}{n})$. Concernant l'erreur statistique, elle est donnée par le théorème central limite et elle est de l'ordre de $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$. Cependant, on peut choisir la taille de l'échantillon d'une façon plus fine en la prenant comme une fonction du pas de discrétisation. D'après Duffie et Glynn [14], on a globalement pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ si $\lim_{n\to\infty} n\varepsilon_n = C_f$ alors

$$n\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n^2} f(X_{T,i}^n) - \mathbb{E}\, f(X_T)\Big) \Rightarrow \mathcal{N}(C_f, Var(f(X_T)).$$

Ainsi, on peut conclure que la méthode de Monte Carlo classique pour un schéma d'Euler a pour complexité $C_{MC} = O(n^3)$.

Afin d'améliorer la performance de cette méthode, Kebaier [33] a proposé une nouvelle méthode appelée Romberg Statistique. L'idée est d'introduire deux pas de discrétisation T/n et T/n^β, $\beta \in (0,1)$ et d'approximer $\mathbb{E}\, f(X_T)$ par

$$\frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1} f(\hat{X}_{T,i}^{n^\beta}) + \frac{1}{N_2}\sum_{i=1}^{N_2}\Big(f(X_{T,i}^n) - f(X_{T,i}^{n^\beta})\Big),$$

où X_T^n et $X_T^{n^\beta}$ sont des approximations de pas respectif T/n et T/n^β calculées à partir du même Brownien et $\hat{X}_T^{n^\beta}$ est un deuxième schéma d'Euler de pas T/n^β indépendant des premières approximations. D'après Kebaier [33], on a un théorème central limite sur l'erreur, du même type que celui de Duffie et Glynn, pour $\beta = 1/2$, $N_1 = n^2$ et $N_2 = n^{3/2}$. Ainsi, la complexité de la méthode de Romberg Statistique pour un schéma d'Euler réduit celle de Monte Carlo classique et elle est égale à $C_{SR} = O(n^{5/2})$. Ces résultats ont été développés dans un cadre plus général en prenant l'erreur $\varepsilon_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$, $\alpha \in [1/2, 1]$.

Plus récemment, Giles [21] a généralisé la méthode Romberg Statistique en considérant une suite décroissante de pas de discrétisation T/m^ℓ, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\ell \in \{0,\cdots,L\}$ et $n = m^L$ et en approximant $\mathbb{E}\, f(X_T)$ par

$$Q_n = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N_0} f(X_{T,k}^1) + \sum_{\ell=1}^{L}\frac{1}{N_\ell}\sum_{k=1}^{N_\ell}\Big(f(X_{T,k}^{m^\ell}) - f(X_{T,k}^{m^{\ell-1}})\Big).$$

Pour chaque échantillon indépendant identiquement distribué de taille N_ℓ les simulations X^{m^ℓ} et $X^{m^{\ell-1}}$ sont faites à partir du même Brownien toute en tenant compte de l'indépendance entre les différents échantillons. En raison de l'hypothèse d'indépendance entre les échantillons (inter-échantillon) et à l'intérieur des échantillons (intra-échantillon), la variance de l'estimateur de la méthode Multilevel Monte Carlo est donnée par

$$Var(Q_n) = N_0^{-1} Var(f(X_T^1)) + \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-1} \sigma_\ell^2, \tag{4.1}$$

avec $\sigma_\ell^2 = Var\left(f(X_T^{m^\ell}) - f(X_T^{m^{\ell-1}})\right)$. Pour le schéma d'Euler, globalement, $\sigma_\ell^2 \leq c_2 m^{-\ell}$, $c_2 > 0$, et d'après Giles [21], le choix optimal dans ce cas qui minimise la complexité de l'algorithme est donné par

$$N_\ell = 2c_2 n^2 \left(\frac{\log n}{\log m} + 1\right) \frac{T}{m^\ell}, \quad \ell \in \{0, \cdots, L\}. \tag{4.2}$$

Ainsi, la complexité de la méthode de Multilevel Monte Carlo pour le schéma d'Euler $C_{MMC} = n^2 (\log n)^2$. On montre également que pour un schéma de discrétisation de second ordre où $\sigma_\ell^2 \leq c_2 m^{-2\ell}$, $c_2 > 0$, le choix optimal est donné par

$$N_\ell = 2c_2 n^2 \sqrt{T} \left(\frac{\sqrt{m} - 1}{\sqrt{m}}\right) \left(\frac{T}{m^\ell}\right)^{3/2}, \quad \ell \in \{0, \cdots, L\}. \tag{4.3}$$

Dans ce cas la complexité de la méthode est égale à n^2.

Les résultats obtenus sont essentiellement basés sur la relation (4.1) et la complexité de l'algorithme et cette approche ne permet pas d'établir un théorème central limite sur l'erreur. L'un des objectifs du papier est de prouver un théorème central limite de type Lindeberg-Feller pour la méthode de Multilevel Monte Carlo associée à la discrétisation d'Euler.

4.2 Vitesse de convergence dans le cadre du schéma d'Euler

Dans l'approche Kebaier [33] pour établir un théorème central limite de type Lindeberg-Feller pour la méthode de Romberg Statistique associée à la discrétisation d'Euler, le théorème de Jacod et Protter [31] sur la convergence stable de l'erreur du schéma d'Euler joue un rôle important. Dans [31], ils montrent que l'erreur renormalisée par $\sqrt{n}$ converge stablement, $\sqrt{\frac{n}{T}}(X^n - X) \Longrightarrow^{stable} U$, où U est un processus bien défini. On rappelle qu'une suite de variables $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge stablement vers Y si $\mathbb{E}(Uh(Y_n)) \to \mathbb{E}(Uh(Y))$ pour toute fonction numérique continue bornée h et toute variable aléatoire réelle bornée U. Pour le schéma de Multilevel Monte Carlo nous avons besoin de prouver d'abord un théorème de convergence stable, dans l'esprit de Jacod-Protter, sur le comportement asymptotique du schéma d'Euler entre deux pas consécutifs de la grille multilevel. Plus précisement, pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, nous avons avons montré que

$$\sqrt{\frac{m^\ell}{(m-1)T}}(X^{m^\ell} - X^{m^{\ell-1}}) \Rightarrow^{stable} U, \quad \text{quand} \quad \ell \to \infty,$$

où U est le même processus que celui obtenu par Jacod-Protter. Une fois ce résultat établi on est en mesure d'étudier l'erreur de la méthode Multilevel Monte Carlo. Nous commençons par introduire une famille de tailles d'échantillons, N_ℓ, en prenant

$$N_0 = n^2, \quad N_\ell = \frac{n^2(m-1)T}{m^\ell a_\ell}\sum_{\ell=1}^{L} a_\ell \quad \text{et} \quad L = \frac{\log n}{\log m}. \tag{4.4}$$

Ici $(a_\ell)_{\ell\geq 1}$ est une suite de termes positifs vérifiant

$$(\mathcal{W}) \ \lim_{L\to\infty}\sum_{\ell=1}^{L} a_\ell = \infty \text{ et } \lim_{L\to\infty}\frac{1}{\left(\sum_{\ell=1}^{L} a_\ell\right)^{p/2}}\sum_{\ell=1}^{L} a_\ell^{p/2} = 0, \text{ avec } p > 2.$$

Le théorème central limite peut être formulé de la façon suivante.

Théorème 8 *Si f est globalement de classe $\mathcal{C}^1$ et $\lim_{n\to\infty} n\varepsilon_n = C_f(T)$, alors, pour le choix de N_ℓ, $\ell \in \{0,1,\cdots,L\}$ donné par la relation (4.4), on a*

$$n\Big(Q_n - \mathbb{E}f(X_T)\Big) \Rightarrow \mathcal{N}\left(C_f(T), \sigma^2\right)$$

avec $\sigma^2 = Var(f(X_T^1)) + Var\big(\nabla f(X_T)U_T\big)$.

Puis une analyse de complexité de la méthode de Multilevel Monte Carlo dans le cadre du schéma d'Euler donne

$$\begin{aligned} C_{MMC} &= C \times \left(n^2 + \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell(m^\ell + m^{\ell-1})\right) \quad \text{avec} \quad C > 0 \\ &= C \times \left(n^2 + n^2\frac{(m^2-1)T}{m}\sum_{\ell=1}^{L}\frac{1}{a_\ell}\sum_{\ell=1}^{L} a_\ell\right). \end{aligned}$$

Puisque $L^2 \leq \sum_{\ell=1}^{L} \frac{1}{a_\ell} \sum_{\ell=1}^{L} a_\ell$, le choix optimal des poids $a_\ell^* = 1$, $\ell \in \{1, \cdots, L\}$, nous donne la complexité optimale

$$C_{MMC} = C \times \left(n^2 + n^2 (\log n)^2 \frac{m^2 - 1}{m (\log m)^2} \right) = O \left(n^2 (\log n)^2 \right).$$

Ce choix optimal est en concordance avec celui proposé par Giles et correspond aux tailles suivantes

$$N_\ell = \frac{(m-1) T n^2 \log n}{m^\ell \log m}, \quad \ell \in \{1, \cdots, L\}.$$

4.3 Applications aux options asiatiques

Dans ce paragraphe on considère le modèle de Black & Scholes

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t, \qquad \text{with } t \in [0, T], \quad T > 0.$$

On pose

$$I_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_u \, du.$$

Notre objectif est d'évaluer $e^{-rT} \mathbb{E} f(I_T)$, pour une fonction f donnée. Pour approcher I_T, on considère la méthode de Riemann et celle des trapèzes. On introduit

$$I_T^n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_{k\delta}, \text{ et } J_T^n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_{k\delta} + S_{(k+1)\delta}}{2}, \text{ où } \delta = \frac{T}{n}.$$

On rappelle les résultats suivants (voir Lapeyre et Temam [38]) sur l'approximation forte et l'approximation faible de ces deux schémas. On a pour $p \geq 1$, il existe $K_p(T) > 0$ tel que

$$\left| \sup_{t \in [0,T]} |I_t^n - I_t| \right|_{L^{2p}} \leq \frac{K_p(T)}{n} \quad \text{et} \quad \left| \sup_{t \in [0,T]} |J_t^n - I_t| \right|_{L^{2p}} \leq \frac{K_p(T)}{n}.$$

Alors que l'erreur faible est $O(\frac{1}{n})$ pour les deux approximations.

Convergence stable Ici la méthode de Multilevel Monte Carlo sera appliquée sur le pas de discrétisation de l'intégrale et non sur le pas de discrétisation du processus puisqu'on utilise la solution exacte de Black & Scholes. Cependant, pour obtenir le théorème de la limite centrale, nous avons procédé de la même façon que pour le schéma d'Euler en établissant d'abord la convergence stable sur le comportement asymptotique des deux shémas entre deux pas consécutifs de la grille multilevel. Pour l'approxiamtion Riemannienne, on introduit le processus

$$I_t^n = \frac{1}{T}\int_0^t S_{\eta_n(u)}du = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{[t/\delta]-1} S_{k\delta} + \frac{t-\eta_n(t)}{T}S_{\eta_n(t)},$$

avec $\eta_n(t) = [t/\delta]\delta$, et on montre que sur deux pas consécutifs

$$\frac{mn}{\sqrt{m^2-1}}(I^{mn} - I^n) \Rightarrow^{stable} \xi,$$

avec $\xi_t := \sqrt{\frac{m-1}{m+1}}\frac{S_t - S_0}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^t \sigma S_u dB_u$, et $B := (B_t)_{t\geq 0}$ est un Brownian standard indépendant de W.

L'approximation par la méthode des trapèzes vérifie un résultat du même type. En introduisant

$$J_t^n = \frac{1}{T}\int_0^t \frac{S_{\eta_n(u)} + S_{(\eta_n(u)+\delta)\wedge t}}{2}du,$$

on a également

$$\frac{mn}{\sqrt{m^2-1}}(J^{mn} - J^n) \Rightarrow^{stably} \chi$$

avec $\chi_t := \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^t \sigma S_u dB_u$. Une fois ces résultats établis on est en mesure d'étudier l'erreur de la méthode Multilevel Monte Carlo pour les deux approximations.

Théorème de la limite Centrale Nous commençons par introduire une famille de tailles d'échantillons, N_ℓ, en prenant $N_0 = n^2$ et

$$N_\ell = \frac{n^2(m^2-1)}{m^{2\ell}a_\ell}\sum_{\ell=1}^{L} a_\ell, \quad \ell \in \{1,\cdots,L\} \quad \text{et} \quad L = \frac{\log n}{\log m}. \tag{4.5}$$

La suite $(a_\ell)_{\ell\geq 1}$ est définie de la même façon que dans le cas du schéma d'Euler par les conditions $(\mathcal{W})$ ci dessus. Pour l'approximation Riemannienne, l'algorithme associé à la méthode Mulilevel Monte Carlo est donné par

$$Q_n = f(s_0) + \sum_{\ell=1}^{L}\frac{1}{N_\ell}\sum_{k=1}^{N_\ell}\left(f(I_{T,k}^{m^\ell}) - f(I_{T,k}^{m^{\ell-1}})\right). \tag{4.6}$$

Le théorème central limite peut être formulé de la façon suivante.

Théorème 9 *Si f est globalement de classe $\mathcal{C}^1$ alors*

$$n\big(Q_n - \mathbb{E}f(I_T)\big) \Rightarrow \mathcal{N}\left(C_f^I, \sigma^2\right)$$

avec $\sigma^2 = Var\big(f'(I_T)\xi_T\big)$.

L'algorithme Multilevel Monte Carlo associé à la méthode des trapèzes s'écrit

$$\tilde{Q}_n = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N_0} f\left(\frac{S_0 + S_{T,k}}{2}\right) + \sum_{\ell=1}^{L}\frac{1}{N_\ell}\sum_{k=1}^{N_\ell}\left(f(J_{T,k}^{m^\ell}) - f(J_{T,k}^{m^{\ell-1}})\right),$$

et le théorème central limite peut être formulé de la façon suivante.

Théorème 10 *Si f est globalement de classe $\mathcal{C}^1$ alors*

$$n\big(\tilde{Q}_n - \mathbb{E}\left(f(I_T)\right)\big) \Rightarrow \mathcal{N}\left(C_f^J, \sigma^2\right)$$

avec $\sigma^2 = Var\left(f\left(\frac{S_0 + S_T}{2}\right)\right) + Var\big(f'(I_T)\chi_T\big)$.

Analyse de la complexité Ainsi, la complexité de la méthode Multilevel Monte Carlo pour l'approximation Riemannienne et celle de la méthode des trapèzes (plus généralement celle d'un schéma d'order 2) est donnée par

$$\begin{aligned} C_{MMC} &= C \times \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell(m^\ell + m^{\ell-1}) \quad \text{avec} \quad C > 0 \\ &= C \times \frac{(m+1)^2(m-1)}{m} n^2 \sum_{\ell=1}^{L}\frac{1}{m^\ell a_\ell}\sum_{\ell=1}^{L} a_\ell. \end{aligned}$$

Puisque $\left(\sum_{\ell=1}^{L} m^{-\ell/2}\right)^2 \leq \sum_{\ell=1}^{L}\frac{1}{m^\ell a_\ell}\sum_{\ell=1}^{L} a_\ell$, le choix optimal des poids $a_\ell^* = m^{-\ell/2}$, $\ell \in \{1, \cdots, L\}$, nous donne la complexité optimale

$$C_{MMC}^{a_\ell^*} = C \times \frac{(m+1)^2(m-1)}{m} n^2 \left(\sum_{\ell=1}^{L} m^{-\ell/2}\right)^2 = O\left(n^2\right).$$

Ce choix optimal est en concordance avec celui de Giles et correspond aux tailles suivantes

$$N_\ell = \frac{m^2 - 1}{m^{3\ell/2}(1 - \sqrt{m})} n^2. \tag{4.7}$$

Cependant, ce choix optimal ne vérifie pas la condition $(\mathcal{W})$ qui nous garantie le théorème de la limite centrale. De ce point de vue, nous avons proposé trois choix avec des poids vérifiant la condition $(\mathcal{W})$ et avec une complexité très proche de $O\left(n^2\right)$. sans vraiment l'atteindre.

a) Pour $a_{\ell,1} = 1$, on a $C_{MMC}^{a_{\ell,1}} = O\left(n^2 \log n\right)$.
b) Pour $a_{\ell,2} = 1/\ell$, on a $C_{MMC}^{a_{\ell,2}} = O\left(n^2 \log\log n\right)$.
c) Pour $a_{\ell,3} = 1/(\ell \log \ell)$, on a $C_{MMC}^{a_{\ell,3}} = O\left(n^2 \log\log\log n\right)$.

Deuxième partie

Extensions des lois stables et max-stables

Chapitre 5

Lois semistables et max-semistables

Au cours des dernières décennies, nous avons observé dans le monde scientifique un intérêt renouvelé pour l'usage des lois à queue lourdes. C'est dans ce cadre que nous avons mené un travail de synthèse pour la notion de loi stable, max-stable et leur extension en semistable et max-semistable. On a repris les définitions et les propriétés de ces lois toute en mettant l'accent sur leur intérêt en modélisation. Ce travail a fait l'objet des publications [A5], [A6] en collaboration avec Thierry Huillet et Anna Porzio et la publication [A7] est en collaboration avec Thierry Huillet.

5.1 Introduction

Les lois stables et max-stables jouent un rôle important en statistique et dans la modélisation des phénomènes à queue lourde, je vais les rappeler brièvement.

5.1.1 Les lois stables

Les lois stables sont présentées comme des lois vérifiant l'identité : pour tout $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, il existe $c > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $c_1 X_1 + c_2 X_2 \overset{loi}{=} cX + b$, avec $X \overset{loi}{=} X_1 \overset{loi}{=} X_2$ sont des variables aléatoires independantes. Lorsque $b = 0$, on dit que X est strictement stable. Les lois stables représentent une sous classe des lois infiniment divisibles et elles peuvent être caractérisées par leur transformée de Fourier voire leur transformée de Laplace lorsque la variable aléatoire est positive (voir [18], [6], [55]). Elles représentent les seules lois limites possibles de somme de variables aléatoires *iid* correctement renormalisée (voir par exemple [60]). Dans le sens que si X est une variable aléatoire et si $(\mathcal{X}_m)_{m\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires *iid*, de même loi que $\mathcal{X}$, telle qu'il existe deux suites $x_n \in \mathbf{R}$ et $\sigma_n > 0$, vérifiant $\sum_{m=1}^{n} \frac{\mathcal{X}_m - x_n}{\sigma_n} \overset{loi}{\to} X$, quand $n \uparrow +\infty$, alors X est une variable aléatoire de loi stable. On dit que $\mathcal{X}$ appartient au domaine d'attraction (DA) de X.

Exposant $\alpha \in (0,1)$

Une variable aléatoire positive X^+ est strictement stable d'indice $\alpha \in (0,1)$, si sa transformée de Laplace

$$\varphi_{X^+}(p) := \mathbb{E}\left(e^{-pX^+}\right) = \exp\left(-s_0 p^\alpha\right), \; s_0 > 0, \; p \geq 0. \tag{5.1}$$

Prenant $s_0 := \kappa \Gamma(1-\alpha)$, on obtient la représentation de *Lévy-Khintchine*

$$\varphi_{X^+}(p) = \exp\left(-\int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-px}\right) d\pi(x)\right)$$

avec une mesure de *Lévy* , $d\pi(x)$, donnée par la fonction spectrale

$$\pi(x) := -\kappa x^{-\alpha}, \; \kappa > 0, \; x \in (0, +\infty). \tag{5.2}$$

Puis, on peut obtenir la transformée de *Fourier* d'une variable aléatoire stable à support $\mathbb{R}$ et d'indice $\alpha \in (0,1)$, en considérant la différence de deux variables aléatoires positives strictement stables X_1^+ et X_2^+, $X = X_1^+ - X_2^+$, et de mesure spectrale respective $\pi_l(x) = -\kappa_l x^{-\alpha}$, $\kappa_l > 0$, $l = 1, 2$, $x > 0$. En utilisant l'équation (5.1), nous avons la fonction characteristique de X est donnée par

$$\phi_X(\lambda) = \exp\left(-s|\lambda|^\alpha \left(1 - i\rho \operatorname{sign}(\lambda) \tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) \tag{5.3}$$

avec $s = \Gamma(1-\alpha)(\kappa_1 + \kappa_2)\cos\frac{\pi\alpha}{2} > 0$ et $\rho = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \in [-1, +1]$ est un paramètre de symétrie. Sous l'hypothèse $\alpha \in (0,1)$, comme $x_1 := \int_{|x| \leq 1} x d\pi(x) < +\infty$, on obtient la représentation de *Lévy-Khintchine* à savoir

$$\phi_X(\lambda) = \exp\left(i\lambda x_1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + i\lambda x \mathbf{1}(|x| \leq 1) - e^{i\lambda x}\right) d\pi(x)\right)$$

avec $\pi(x) = \pi_1(x)\mathbf{1}(x > 0) - \pi_2(-x)\mathbf{1}(x < 0)$. Pour obtenir toutes les variables aléatoires stables d'indice $\alpha \in (0,1)$, on considère les variables $\widetilde{X} = X + x$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \phi_{\widetilde{X}}(\lambda) &= \exp\left(i\lambda\widetilde{x} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + i\lambda x \mathbf{1}(|x| \leq 1) - e^{i\lambda x}\right) d\pi(x)\right) \\ &= \exp\left(i\lambda(\widetilde{x} - x_1) - s|\lambda|^\alpha \left(1 - i\rho\, sign(\lambda) \tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

avec $\widetilde{x} := x + x_1$. Les variables strictement stables sont obtenues pour $\widetilde{x} = x_1$.

Exposant $\alpha \in (1,2)$

Par le théorème *Bernstein* (voir [18]), lorsque $\alpha > 1$, $\varphi_{X^+}(p)$ de la relation (5.1) n'est plus la transformée de *Laplace* d'une variable aléatoire positive et la construction ci-dessus n'est plus valable. Cependant grâce à l'identité

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - px - e^{-px}\right) d\pi_l(x) = \kappa_l \Gamma(1-\alpha) p^\alpha,\ l = 1, 2,\ p \geq 0,$$

on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + i\lambda x - e^{i\lambda x}\right) d\pi(x) = s|\lambda|^\alpha \left(1 - i\rho \operatorname{sign}(\lambda) \tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) \tag{5.4}$$

avec encore $s = \Gamma(1-\alpha)(\kappa_1 + \kappa_2)\cos\frac{\pi\alpha}{2} > 0$ et $\rho = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \in [-1, +1]$. On remarque que pour $\alpha \in (1,2)$, $\Gamma(1-\alpha) < 0$ ([45] page 590) et $\cos\frac{\pi\alpha}{2} < 0$. Maintenant, on pose $x_1 := -\int_{|x|>1} x d\pi(x) < \infty$, en utilisant la représentation de *Lévy-Khintchine*, on définit une variable stable d'indice $\alpha \in (1,2)$, notée $\widetilde{X}$, par sa fonction caractéristique

$$\begin{aligned}
\phi_{\widetilde{X}}(\lambda) &= \exp\left(i\lambda\widetilde{x} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + i\lambda x \mathbf{1}(|x| \leq 1) - e^{i\lambda x}\right) d\pi(x)\right) && (5.5)\\
&= \exp\left(i\lambda(\widetilde{x} - x_1) - s|\lambda|^\alpha \left(1 - i\rho \operatorname{sign}(\lambda)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) && (5.6)
\end{aligned}$$

avec $\widetilde{x} \in \mathbf{R}$. Lorsque $\widetilde{x} = x_1$ on obtient la transformée de *Fourier* d'une variable aléatoire strictement stable.

Exposant $\alpha = 1$

Grâce à l'identité

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - p\sin x - e^{-px}\right) \frac{1}{x^2} dx = -p\log p \tag{5.7}$$

on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + i\lambda \sin x - e^{i\lambda x}\right) d\pi(x) = \frac{\pi}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)|\lambda| \left(1 + i\rho\frac{2}{\pi}\operatorname{sign}(\lambda)\log|\lambda|\right)$$

Ici, on pose $x_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} (x\mathbf{1}(|x| \leq 1) - \sin x)\, d\pi(x) < \infty$, en utilisant encore la représentation de *Lévy-Khintchine*, on définit une variable stable d'indice $\alpha = 1$, notée $\widetilde{X}$, par sa fonction caractéristique

$$\begin{aligned}
\phi_{\widetilde{X}}(\lambda) &= \exp\left(i\lambda\widetilde{x} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + i\lambda x \mathbf{1}(|x| \leq 1) - e^{i\lambda x}\right) d\pi(x)\right) && (5.8)\\
&= \exp\left(i\lambda(\widetilde{x} - x_1) - \frac{\pi}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)|\lambda| \left(1 + i\rho\frac{2}{\pi}\operatorname{sign}(\lambda)\log|\lambda|\right)\right) && (5.9)
\end{aligned}$$

avec $\widetilde{x} \in \mathbf{R}$. Lorsque $\rho = 0$, on obtient la transformée de *Fourier* d'une variable aléatoire strictement stable d'indice $\alpha = 1$.

Enfin on peut considérer le cas $\alpha = 2$ en rajoutant les variables de loi normale de moyenne $\widetilde{x} \in \mathbb{R}$ et de variance 2κ, $\kappa > 0$,

$$\phi_{\widetilde{X}}(\lambda) = \exp\left(i\lambda\widetilde{x} - \kappa\lambda^2\right), \, \phi_X(\lambda) = \exp\left(-\kappa\lambda^2\right). \tag{5.10}$$

5.1.2 Les lois max-stables

Les lois max-stables sont présentées comme des lois vérifiant l'identité : pour tout $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, il existe $c > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $max(c_1X_1, c_2X_2) \overset{loi}{=} cX + b$, avec $X \overset{loi}{=} X_1 \overset{loi}{=} X_2$ sont des variables aléatoires independantes. Lorsque $b = 0$, on dit que X est strictement max-stable. Les lois max-stables sont caractérisées par leur fonction de répartition et elles sont connus par le trio *Fréchet-Weibull-Gumbel*. Elles représentent les seules lois limites possibles de maximum de variables aléatoires *iid* correctement renormalisée (voir par exemple [22], [26], [20], [17]). Dans le sens que si X est une variable aléatoire et si $(\mathcal{X}_m)_{m\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires *iid*, de même loi que $\mathcal{X}$, telle qu'il existe deux suites $x_n \in \mathbf{R}$ et $\sigma_n > 0$, vérifiant $\max_{m=1,\cdots,n} \frac{\mathcal{X}_m - x_n}{\sigma_n} \overset{loi}{\to} X$, quand $n \uparrow +\infty$, alors X est une variable aléatoire de loi max-stable. On dit que $\mathcal{X}$ appartient au maximum domaine d'attraction (MDA) de X. Donc, pour le maximum, les lois max-stables jouent le rôle des lois stables pour la somme dans le théorème de la limite centrale.

Les lois de *Fréchet*

Une variable aléatoire positive V^+ est strictement max-stable d'indice $\alpha > 0$, si sa fonction de répartition est donnée par

$$F_{V^+}(v) = \exp\left(-sv^{-\alpha}\right), \, v > 0. \tag{5.11}$$

On dit que V^+ suit la loi de *Fréchet* et pour obtenir toutes les variables aléatoires max-stables d'indice $\alpha > 0$ et de type *Fréchet*, on considère les variables $X^+ := V^+ + x^+$, $x^+ \in \mathbb{R}$. Cette variable a pour support $(x^+, +\infty)$ et pour fonction de répartition

$$F_{X^+}(x) = \exp\left(-s\left(x - x^+\right)^{-\alpha}\right), \, x > x^+. \tag{5.12}$$

Les lois de *Weibull*

Une variable aléatoire négative V^- est strictement max-stable d'indice $\alpha > 0$, si sa fonction de répartition est donnée par

$$F_{V^-}(v) = \exp\left(-s\left(-v\right)^{\alpha}\right), \, v < 0. \tag{5.13}$$

On dit que V^- suit la loi de *Weibull* et pour obtenir toutes les variables aléatoires max-stables d'indice $\alpha > 0$ et de type *Weibull*, on considère les variables $X^- := V^- + x^-$, $x^- \in \mathbb{R}$. Cette variable a pour support $(-\infty, x^-)$ et pour fonction de répartition

$$F_{X^-}(x) = \exp\left(-s\left(x^- - x\right)^\alpha\right), \; x < x^-. \tag{5.14}$$

Les lois de *Gumbel*

Une variable aléatoire à support tout $\mathbb{R}$ est max-stable d'indice $\alpha > 0$, si sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \exp\left(-se^{-\alpha x}\right) \tag{5.15}$$

On dit que X suit la loi de *Gumbel*.

5.2 Les lois semistables

Nous avons repris la notion de loi semistable comme une extension de la classe des lois stables. Cette notion de loi *semistable* pour la somme a été introduite par *Paul Lévy* in 1937 ([51] ; voir [44] page 45 et le livre de Sato [55] pour un survey sur le sujet). Les lois semistables sont des lois infiniment divisibles dont la transformée de *Fourier* est solution de l'équation

$$\phi(\lambda) = e^{i\lambda\beta}\phi(c\lambda)^\gamma, \; \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.16}$$

Lorsque $\beta = 0$, on parle de loi strictement semistable. Pour expliciter les solutions, on considère l'indice $\alpha > 0$ donnée par

$$\gamma c^\alpha = 1. \tag{5.17}$$

On a nécessairement l'indice $\alpha \in (0, 2)$ voir $(0, 1)$ si on suppose que notre variable aléatoire est positive.

Exposant $\alpha \in (0, 1)$

L'ensemble des variables aléatoires positives dont la transformée de *Laplace* est solution de l'équation

$$\varphi_{X^+}(p) = \varphi_{X^+}(cp)^\gamma, \; p \geq 0. \tag{5.18}$$

est formellement identifié à

$$\varphi_{X^+}(p) = \exp\left(-p^\alpha e^{\alpha\zeta(\log p)}\right) \tag{5.19}$$

avec $\zeta(q)$, $q := \log p$, $p > 0$, est une fonction périodique de période $-\log(c)$, avec une condition moins naturelle à identifier à savoir $\left(1+\zeta'(\log p)\right)e^{\alpha\zeta(\log p)}$ est complètement monotone. Ceci généralise l'équation (5.1). De même, une généralisation de l'équation (5.2) a été explicitement donnée. En effet, la mesure de *Lévy* d'une variable positive semistable

$$\pi(x) = -x^{-\alpha}e^{\alpha\nu(\log x)},\ x \in (0,+\infty), \tag{5.20}$$

avec $\nu(z)$, $z := \log x$, $x > 0$ est une fonction périodique bornée de période $-\log(c)$, telle que $z - \nu(z)$ est une fonction croissante.

Le développement en série de Fourier de $\exp \alpha\nu(\log x)$, nous a permis d'exprimer la mesure de *Lévy* d'une loi semistable à support $\mathbb{R}_+$. On a

$$\pi(x) = -\sum_{n\in\mathbf{Z}} \kappa_n x^{-\alpha_n} := \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_n(x) \tag{5.21}$$

avec $\kappa_n := \int_{\log c}^{-\log c} e^{\alpha\nu(z)}e^{2i\pi nz}dz$, $n \in \mathbf{Z}$ sont les coefficient de *Fourier* et $\alpha_n = \alpha + in\alpha_c$, $n \in \mathbf{Z}$, $\alpha_c := 2\pi/\log c$, une suite d'exposants complexes.

Prenant $s_n := \kappa_n\Gamma(1-\alpha_n)$, $n \in \mathbf{Z}$, avec la version complexe de la fonction d'*Euler* ([45], Chapitre VII), on a par la représentation de *Lévy-Khintchine*

$$\varphi_{X^+}(p) = \exp\left(-\int_0^{+\infty}\left(1-e^{-px}\right)d\pi(x)\right) = \exp\left(-\sum_{n\in\mathbf{Z}} s_n p^{\alpha_n}\right)$$

Puis, comme pour les lois stables on a obtenu la transformée de *Fourier* d'une variable aléatoire semistable à support $\mathbb{R}$ et d'indice $\alpha \in (0,1)$, en considérant la différence de deux variables aléatoires positives strictement semistables X_1^+ et X_2^+, $X = X_1^+ - X_2^+$, et de mesure spectrale respective

$$\pi_l(x) = -x^{-\alpha}e^{\alpha\nu_l(\log x)} = -\sum_{n\in\mathbf{Z}} \kappa_{n,l}x^{-\alpha_n},\ \kappa_{n,l} > 0,\ l = 1,2,\ x > 0.$$

Les fonctions ν_l, $l = 1,2$ sont périodiques de période $-\log c$ et $\kappa_{n,l}$ sont leur coefficient de *Fourier* respective. En prenant $s_{n,l} = \kappa_{n,l}\Gamma(1-\alpha_n) := |s_{n,l}|\,e^{i\varpi_{n,l}}$, on a

$$\phi_X(\lambda) = \exp\left(-\sum_{n\in\mathbf{Z}} s_n(\lambda)\,|\lambda|^{\alpha}\left(1+i\rho_n(\lambda)\right)\right) \tag{5.22}$$

avec

$$s_n(\lambda) = |s_{n,1}|\,e^{n\frac{\pi}{2}\alpha_c \operatorname{sign}(\lambda)}\cos\psi_{n,1} + |s_{n,2}|\,e^{-n\frac{\pi}{2}\alpha_c \operatorname{sign}(\lambda)}\cos\psi_{n,2} \tag{5.23}$$

et

$$\rho_n(\lambda) = \frac{1}{s_n(\lambda)}\left[|s_{n,1}|\,e^{n\frac{\pi}{2}\alpha_c \operatorname{sign}(\lambda)}\sin\psi_{n,1} + |s_{n,2}|\,e^{-n\frac{\pi}{2}\alpha_c \operatorname{sign}(\lambda)}\sin\psi_{n,2}\right] \tag{5.24}$$

Les "phases" $\psi_{n,1}$ et $\psi_{n,2}$ sont données par

$$\begin{array}{rcl}\psi_{n,1} & = & n\alpha_c \log|\lambda| - \frac{\pi}{2}\alpha \mathrm{sign}(\lambda) + \varpi_{n,1} \\ \psi_{n,2} & = & n\alpha_c \log|\lambda| + \frac{\pi}{2}\alpha \mathrm{sign}(\lambda) + \varpi_{n,2}.\end{array}$$

La formule (5.22) pour les variables aléatoires de loi strictement semistable est une extension de la formule (5.3) qui caractérise les variables aléatoires de loi strictement stable. Ici, on a un nombre dénombrable de fonctions de λ, $(s_n(\lambda), \rho_n(\lambda))_{n\geq 1}$ définies par (5.23, 5.24), qui représentent les paramètres de symétrie et d'échelle. Le cas symétrique a été étudié et des formules explicites ont été données dans l'article [A6].

Enfin pour obtenir toutes les variables aléatoires semistables d'indice $\alpha \in (0,1)$, on a considéré les variables $\widetilde{X} = X + x$, $x \in \mathbb{R}$. Ces variables sont semistables et l'équation fonctionnelle (5.16) est vérifié avec $\beta = x(1-\gamma c)$. On a également établi les représentations suivantes

$$\begin{array}{rcl}\phi_{\widetilde{X}}(\lambda) & = & \exp\left(i\lambda\widetilde{x} - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 + i\lambda x \mathbf{1}(|x|\leq 1) - e^{i\lambda x}\right)d\pi(x)\right) \\ & = & \exp\left(i\lambda(\widetilde{x} - x_1) - \sum_{n\in\mathbf{Z}} s_n(\lambda)|\lambda|^{\alpha}(1 + i\rho_n(\lambda))\right)\end{array}$$

avec $\widetilde{x} := x + x_1$ et $x_1 = \int_{|x|\leq 1} x d\pi(x)$. Les variables strictement semistables sont obtenues pour $\widetilde{x} = x_1$.

Exposant $\alpha \in (1,2)$

Comme pour les lois stables, cette construction, valable au cas $\alpha \in (0,1)$, peut être étendu au domaine $\alpha \in (1,2)$. En utilisant l'identité

$$\int_0^{+\infty}\left(1 - px - e^{-px}\right)d\pi_l(x) = p^{\alpha}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\kappa_{n,l}\Gamma(1-\alpha_n)p^{in\alpha_c} = p^{\alpha}e^{\alpha\zeta_l(\log p)}, \quad (5.25)$$

pour $p \geq 0$ et $l = 1,2$, on peut étendre la formule (5.4) et obtenir

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 + i\lambda - e^{i\lambda x}\right)d\pi(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} s_n(\lambda)|\lambda|^{\alpha}(1 + i\rho_n(\lambda)). \quad (5.26)$$

Puis on généralise la relation (5.6) et on déduit qu'une variable aléatoire semistable d'indice $\alpha \in (1,2)$, notée $\widetilde{X}$, a pour fonction caractéristique

$$\phi_{\widetilde{X}}(\lambda) = \exp\left(i\lambda\widetilde{x} - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 + i\lambda x \mathbf{1}(|x|\leq 1) - e^{i\lambda x}\right)d\pi(x)\right) \quad (5.27)$$

$$= \exp\left(i\lambda(\widetilde{x} - x_1) - \sum_{n\in\mathbf{Z}} s_n(\lambda)|\lambda|^{\alpha}(1 + i\rho_n(\lambda))\right) \quad (5.28)$$

avec $x_1 := -\int_{|x|>1} x d\pi(x) < \infty$ et $\widetilde{x} \in \mathbf{R}$. Lorsque $\widetilde{x} = x_1$ on obtient la fonction caractéristique d'une variable aléatoire strictement semistable.

Exposant $\alpha = 1$

Dans ce cas, on établit pour $p \geq 0$ l'identité

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - p\sin x - e^{-px}\right) d\pi_l(x) = -p\log p e^{\nu_l(\log p)},\ l = 1, 2 \tag{5.29}$$

avec $\pi_l(x) = -x^{-1}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \kappa_{n,l} x^{-in\alpha_c} := -x^{-1}e^{\nu_l(\log x)}$. Il résulte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + i\lambda\sin x - e^{i\lambda x}\right) d\pi(x) = i\lambda\log(-i\lambda)\, e^{\nu_1(\log -i\lambda)} - i\lambda\log(i\lambda)\, e^{\nu_2(\log i\lambda)} \tag{5.30}$$

On définit une variable aléatoire semistable d'indice $\alpha = 1$, notée $\widetilde{X}$, par sa fonction caractéristique

$$\begin{aligned} \phi_{\widetilde{X}}(\lambda) &= \exp\left(i\lambda\widetilde{x} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + i\lambda x\mathbf{1}(|x| \leq 1) - e^{i\lambda x}\right) d\pi(x)\right) \\ &= \exp\left(i\lambda(\widetilde{x} - x_1) - \left(i\lambda\log(-i\lambda)\, e^{\nu_1(\log -i\lambda)} - i\lambda\log(i\lambda)\, e^{\nu_2(\log i\lambda)}\right)\right) \end{aligned}$$

avec $\widetilde{x} \in \mathbf{R}$ et $x_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} (x\mathbf{1}(|x| \leq 1) - \sin x)\, d\pi(x) < \infty$. Lorsque $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, on obtient la transformée de *Fourier* d'une variable aléatoire strictement stable d'indice $\alpha = 1$.

5.3 Les lois max-semistables

Nous avons repris la notion de loi max-semistable comme une extension de la classe des lois max-stables (voir par exemple [23], [49], [50] comme références sur le sujet). Les lois max-semistables sont des lois de variables aléatoires dont la fonction de répartition est solution de l'équation

$$F(v) = F\left(\frac{v}{c} + \beta\right)^\gamma \tag{5.31}$$

pour $c > 0$, $\beta \in \mathbf{R}$, $\gamma \geq 1$.

Les lois max-semistables de type I

Une variable aléatoire positive V^+ est strictement max-stable, si sa fonction de répartition est solution de l'équation fonctionnelle

$$F_{V^+}(v) = F_{V^+}(v/c)^\gamma, \tag{5.32}$$

$c \in (0,1)$ et $\gamma \geq 1$. Comme pour les lois semistables, pour résoudre cette équation fonctionnelle, on considère l'indice $\alpha > 0$ donnée par la relation (5.17), à savoir

$$\gamma c^{\alpha} = 1. \tag{5.33}$$

Les solutions de (5.32) sont formellement identifiées à

$$F_{V^+}(v) = \exp\left(-s(v)\, v^{-\alpha}\right) \tag{5.34}$$

avec α solution de (5.33) et le paramètre d'échelle s est une fonction positive log-périodique de période $-\log c$. Plus précisement

$$\log(s(v)) = \alpha\nu(\log v) \tag{5.35}$$

pour une fonction périodique ν, bornée, continue à droite, et telle que $x - \nu(x)$ est croissante.

Les lois obtenues sont des extension des lois de *Fréchet* et pour obtenir toutes les variables aléatoires max-semistables d'indice $\alpha > 0$ et de type I, on considère les variables $X^+ := V^+ + x^+$, $x^+ \in \mathbb{R}$. Cette variable a pour support $(x^+, +\infty)$ et pour fonction de répartition

$$F_{X^+}(x) = \exp\left(-s\left(x - x^+\right)\left(x - x^+\right)^{-\alpha}\right),\ x > x^+. \tag{5.36}$$

L'équation fonctionnelle (5.31) est vérifié pour $\beta = x^+(1 - 1/c)$.

Les lois max-semistables de type II

Soit $V^- := -1/V^+ < 0$. Par la relation (5.34), on déduit que la fonction de répartition de V^- est donnée par

$$F_{V^-}(v) = \exp\left(-s_{V^-}(v)(-v)^{\alpha}\right) \tag{5.37}$$

avec une fonction d'échelle $s_{V^-}(v) := s_{V^+}(-1/v)$. Les variables négatives obtenues sont des extensions des lois de *Weibull* et elles sont *max-semistable*, leur fonction de répartition vérifie l'équation fonctionnelle

$$F_{V^-}(v) = F_{V^-}(vc)^{\gamma}. \tag{5.38}$$

Pour obtenir toutes les variables aléatoires max-semistables de type II, on considère les variables $X^- := V^- + x^-$, $x^- \in \mathbb{R}$. Cette variable a pour support $(-\infty, x^-)$ et pour fonction de répartition

$$F_{X^-}(x) = \exp\left(-\left(x^- - x\right)^{\alpha} s_{V^-}\left(x - x^-\right)\right),\ x < x^-. \tag{5.39}$$

Cette fonction de répartition vérifie une équation fonctionnelle de type (5.31) à savoir

$$F_{X^-}(x) = F_{X^-}(cx)^{\gamma},\ x < x^-$$

avec $\beta = x^-(1 - c)$.

Les lois max-semistables de type III

On considère la variable $X = \log V^+$. Par la relation (5.34), la fonction de répartition de X est donnée par

$$F_X(x) = \exp\left(-s_X(x)\, e^{-\alpha x}\right) \tag{5.40}$$

avec $\log(s_X(x)) = \log(s_{V^+}(e^x))$.

Les lois des variables obtenues ont pour support $\mathbb{R}$ et sont une extension des lois de *Gumbel* avec un paramètre d'échelle log-periodique. La fonction de répartition (5.40) vérifie l'équation fonctionnelle de type (5.31) à savoir

$$F_X(x) = F_X(x+\beta)^\gamma,\ x \in \mathbf{R} \tag{5.41}$$

avec $\beta = -\log c > 0$.

5.4 Propriétés des lois (max)-semistables

Dans les papiers [A4], [A5] et [A6] on a souligné l'importance des lois semistables et max-semisatbles en physique et sciences de l'ingénieur en général en insistant sur les propriétés de loi limite en statistiques et les propriétés d'autosimilarités et de semi-autosimilarités introduites par Sato [55].

5.4.1 Propriétés comme loi limite en statistiques

Les semistables, respectivement max-semistables, sont les seules lois limites possibles de somme, respectivement de maximum, d'un échantillon de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées correctement normalisées et qui croît géométriquement. Plus précisement, on peut rappeler les deux résultats suivants pour les lois semistables et max-semistables.

Les lois semistables comme loi limite en statistiques : Les lois semistables représentent les seules lois limites possibles de somme géométrique de variables aléatoires *iid* correctement renormalisée (voir par exemple [60]). Dans le sens que si X est une variable aléatoire et si $(\mathcal{X}_m)_{m\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires *iid*, de même loi que $\mathcal{X}$, telle qu'il existe deux suites $x_n \in \mathbf{R}$ et $\sigma_n > 0$, vérifiant

$$\sum_{m=1}^{\gamma_n} \frac{\mathcal{X}_m - x_n}{\sigma_n} \overset{loi}{\to} X \text{ quand } n \uparrow +\infty, \tag{5.42}$$

avec γ_n est une suite d'entiers qui croît vers l'infini et qui vérifie $\lim_{n\to\infty} \gamma_{n+1}/\gamma_n = \gamma \geq 1$, alors X est une variable aléatoire de loi semistable. Pour le domaine d'attraction des lois semistables on peut citer Grinevich et Khokhlov[24], Kruglov [61], Pillai [54] et Shimizu [56].

Les lois max-semistables comme loi limite en statistiques : De même les lois max-semistabes représentent dans la théorie des valeurs extrêmes les seules lois limites possibles de maximum géométrique de variables *iid* correctement renormalisée. Plus présisement, si dans l'équation précédente (5.42) on remplace la somme par le max, à savoir

$$\max_{m=1,..,\gamma_n} \frac{\mathcal{X}_m - x_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} X \text{ as } n \uparrow +\infty \tag{5.43}$$

alors X est une variable aléatoire de loi max-semistable. Pour le domaine d'attraction des lois max-semistables, on peut citer Grinevich [23] et Mejzler [48].

5.4.2 Processus autosimilaire et semi-autosimilaire

On rappelle qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit autosimilaire si pour tout $a > 0$, il existe $b > 0$, tel que $\{X_{at}, t \geq 0\} = \{bX_t, t \geq 0\}$ et il est autosimilaire au sens large si $\{X_{at}, t \geq 0\} = \{bX_t + k(t), t \geq 0\}$ avec $k(t)$ est une fonction numérique. Les lois stables et max-stables nous permettent de construire des processus autosimilaires dans le sens strict lorsqu'elles sont strictement stables et max-stables et au sens large lorsque ces propriétés sont prises au sens large. En effet les processus de Lévy associés aux lois stables et les processus extrémaux associés aux lois max-stables ainsi que ses inverses sont tous autosimilaires. De même on peut considérer une notion plus large que l'autosimilarité à savoir la semi-autosimilarité où on dit qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est semi-autosimilaire au sens strict et au sens large si les propriétés d'autosimilarité rappelées ci-dessus sont vérifiées pour certaines valeurs de a et non plus pour tout a. Avec cette nouvelle notion, on a les processus de Lévy associés aux loi semistables et les processus extrémaux associés aux lois max-semistables ainsi que ses inverses sont tous semi-autosimilaires. Dans les papiers [A4], [A5] nous avons rappelé ces propriétés avec un langage de variable aléatoire sans parler des processus associés. Par contre dans le papier [A6], nous avons considéré le processus de Lévy, le processus extrémal et son inverse et nous avons donné la structure, les propiétés de ces processus et le lien entre ces trois processus. La notion de subordination de processus a été également abordé et elle nous a permis de construire d'autres processus autosimilaires.

Chapitre 6

Extension des lois (max)-semistables

Les lois semistables et max-semistables sont définies à partir des solutions des équations fonctionnelles (5.16) et (5.31). Dans le but d'étendre ces notions, nous avons considéré des équations fonctionnelles plus générales et nous avons étudié leurs solutions. Ceci a fait l'objet des trois publications [A8], [A9] et [A11]. Les deux premiers sont en collaboration avec Thierry Huillet et le dernier est en Collaboration avec Thierry Huillet et Anna Porzio.

6.1 Introduction

L'origine du problème est motivé par le calcul des lois infiniment divisibles (ID) des variables aléatoires positives dont les transformées de Laplace-Stieltjes (LST) vérifient l'équation fonctionnelle

$$\varphi\left(p\right)=\prod_{i=1}^{m}\varphi^{\gamma_{i}}\left(c_{i}p\right) \tag{6.1}$$

avec $m \geq 1$, $c_i > 0$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, .., m$. C'est une extension des lois semistables à support $[0, +\infty[$ dont la transformée de Laplace-Stieltjes vérifient l'équation (6.1) avec $m = 1$. Dans la littérature, on trouve par exemple des contributions du même type dans Ramachandran et Rao [53] et Shimizu [57]. Plus précisément, dans le travail de Shimizu, l'équation fonctionnelle (6.1) a été considéré pour des fonctions caractéristiques mais avec la condition $\max|c_i| < 1$; on cherche donc des variables aléatoires à support $\mathbb{R}$. On a ainsi introduit dans l'article [A9] une classe de lois infiniment divisibles qui contient les lois stables et semistables. On les a appelé les lois semistables généralisées (GSS). Une solution complète de ces lois avec un lien avec les lois semistables a été donnée. On a également discuté la propriété d'autosimilarité et on les a présentées comme des lois limites de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées avec une condition de croissance géométrique aléatoire. Les Théorèmes de convergence établis sont comparables à ceux de Grinevich [24].

Puis de la même façon, nous avons cherché à généraliser la notion de max-semistable, en considérant l'équation (6.1) pour des fonctions de répartition. Ainsi, nous avons introduit dans le papier [A8] une notion plus générale que la notion de max-stable et max-semistable, on a obtenu une classe de lois plus large qu'on a appelé la classe des lois max-multiscaling.

Plus précisément, on a trois types de solutions suivant le support de la loi : les lois strictement max-multiscaling de type I dont le support est égale à $[0,+\infty[$ et la fonction de répartition est solution de l'équation fonctionnelle

$$F(v) = \prod_{i=1}^{m} F(v/c_i)^{\gamma_i} \tag{6.2}$$

avec $m \geq 1$, $c_i \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, .., m$, les lois strictement max-multiscaling de type II dont le support est égale à $]-\infty, 0]$ et la fonction de répartition est solution de la même équation fonctionnelle et puis les lois max-multiscaling de type III dont le support est égale à $\mathbb{R}$ et la fonction de répartition est solution de l'équation fonctionelle $F(x) = \prod_{i=1}^{m} F(x+\beta_i)^{\gamma_i}$ avec $m \geq 1$, $\beta_i \in \mathbf{R}^*$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, .., m$. Les autres lois sont obtenues par une transformation de décalage et elles sont toute solution de l'équation fonctionelle $F(v) = \prod_{i=1}^{m} F(v/c_i + \beta_i)^{\gamma_i}$ avec $m \geq 1$, $c_i \in \mathbf{R}_+^*$, $\beta_i \in \mathbf{R}$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, .., m$.

On a aussi discuté l'intérêt de ces modèles en physique en soulignant la propriété d'autosimilarité et on a présenté les lois multiscaling comme des lois limites maximales pour des échantillons géométriquent grand. Les Théorèmes de convergence établis sont comparables à ceux de Grinevich [23].

6.2 Les lois semistables généralisées

La solution de l'équation fonctionnelle (6.1) est caractérisé par la fonction structure

$$\tau(q) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i c_i^q,\ q \in \mathbb{R}$$

et le nombre $|\mathcal{S}_1|$, avec $\mathcal{S}_1 = \{\alpha \in (0,1) : \tau(\alpha) = 1\}$. On montre que les valeurs de α tel que $\tau(\alpha) = 1$ sont des exposants caractéristiques de lois semistables qui interviennent dans les solutions de (6.1). Ainsi, les valeurs de $\alpha \geq 1$ pour lesquels $\tau(\alpha) = 1$ sont exclues. Plus précisément, on a démontré le résultat suivant.

Théorème 11 *Soit X une variable aléatoire de loi infiniment divisible et de support $[a,\infty)$, $a>-\infty$. Si sa transformé de Laplace est solution de l'équation fonctionnelle (6.1), alors $a=0$ et sa mesure de Lévy est donnée par*

$$\pi(x) = -\sum_{\alpha_l \in \mathcal{S}_1} x^{-\alpha_l} s_l(\log x).$$

et pour chaque $\alpha_l \in \mathcal{S}_1$ la paire $(\alpha_l, s_l(.))$ vérifie des conditions d'admissibilité.

En plus, en exploitant les propriétés des fonctions $s_l(\log x)$, la solution dépend de la commensurabilité de la suite $(\log c_i,\ i=1,...,m)$. Plus précisément, on a

- *si $(\log c_i,\ i=1,...,m)$ sont commensurables de période commune $\log c$, alors :*
  (i) $|\mathcal{S}_1| = 1$ est la solution est une loi semistable.
  (ii) $|\mathcal{S}_1| = 2$ et la solution est le produit de convolution de deux lois semistables.
- *Si $(\log c_i,\ i=1,...,m)$ ne sont pas commensurables, alors :*
  (i) $|\mathcal{S}_1| = 1$ et la solution est une loi stable.
  (ii) $|\mathcal{S}_1| = 2$ et la solution est le produit de convolution de deux lois stables.

Puis en exploitant la Formule de Lévy-Khintchine, nous avons donné la solution explicite de l'équation fonctionnelle (6.1).

Proposition 3 *Soit X une variable aléatoire de loi semistable généralisée (GSS) avec une mesure de Lévy*

$$\pi(x) = -\sum_{\alpha_l \in \mathcal{S}_1} x^{-\alpha_l} s_l(\log x) \tag{6.3}$$

avec $\alpha_l \in \mathcal{S}_1$, $(\alpha_l, s_l(.))$ est admissible, et $s_l(.)$ est continue et dérivable à droite et à gauche de chaque point.

- *Si $(\log c_i,\ i=1,...,m)$ sont commensurables, alors les fonctions $s_l(.)$ sont constantes avec $s_l := s_l(.)$. On a*

$$\varphi_X(p) = \exp\left\{-\sum_{\alpha_l \in \mathcal{S}_1} \tilde{s}_l p^{\alpha_l}\right\},\ p \ge 0$$

avec $\tilde{s}_l = s_l \Gamma(1-\alpha)$.

- *Si $(\log c_i,\ i=1,...,m)$ sont commensurables de période $\log c$, alors les fonctions $s_l(.)$ sont périodiques de période $\log c$. Si on note par $(s_{n,l})_{n\in\mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier, alors,*

$$\varphi_X(p) = \exp\left\{-\sum_{\alpha_l \in \mathcal{S}_1} p^{\alpha_l} \tilde{s}_l(\log p)\right\},\ p \ge 0 \tag{6.4}$$

avec $\tilde{s}_l$ sont des fonctions positives périodiques de coefficients de Fourier $\tilde{s}_{n,l} := s_{-n,l}\Gamma\left(1-\alpha_l+\frac{2i\pi n}{\log c}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

On a aussi considéré les variables aléatoires à support $[x, \infty)$ pour $x > -\infty$ dont la transformée de Laplace satisfait l'équation fonctionnelle

$$\varphi(p) = e^{-p\beta} \prod_{i=1}^{m} \varphi^{\gamma_i}(c_i p)$$

pour $m \geq 1$, $c_i > 0$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, .., m$, $\beta \in \mathbb{R}$. Les solutions sont obtenues en décalant les solutions de l'équation fonctionnelle (6.1) par $x \in \mathbb{R}$, avec $x = \beta / \left(1 - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i c_i\right)$.

Enfin nous avons étudié le caractère autosimilaire des processus stationnaires associés et on a montré que les lois semistables généralisées peuvent être vues comme des lois limites de somme géométrique de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Dans une première construction et dans un cadre particulier le caractère géométrique a été construit à l'aide d'un processus de branchement multitype faisant intervenir les données de l'équation fonctionnelle. Dans un cadre plus général ce nombre était un processus de Poisson dont l'intensité vérifie une équation faisant intervenir les données du modèle.

6.3 Les lois max-multiscaling

Dans le papier ([A8]), nous avons une extension des lois max-semistables analogue à la généralisation des lois semistables. Les fonctions de répartition de ces lois, dites multiscaling, sont solutions d'une équation fonctionnelle semblable à (6.1) à savoir

$$F(x) = \prod_{i=1}^{m} F(x/c_i + \beta_i)^{\gamma_i} \tag{6.5}$$

avec $m \geq 1$, $c_i > 0$, $\gamma_i > 0$, $\beta_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, .., m$. L'étude ressemble à celle des lois semistables généralisées mais elle tient compte des particularités des valeurs extrêmes, elle dépend du support de la loi et elle donne trois types possibles.

Théorème 12 *Les solutions de l'équation fonctionnelle ci-dessus sont caractérisées.*

1/ Si $c_i \neq 1$, $\beta_i = \widetilde{x}(1 - 1/c_i)$ avec $\widetilde{x} \in \mathbf{R}$, $i = 1, .., m$, alors on a deux cas possibles :

(i) soit le support de la solution est $[\widetilde{x}, \infty[$ et avec $\mathcal{S}_1^+ = \{\alpha > 0 : \sum_{i=1}^{m} \gamma_i c_i^{\alpha} = 1\}$, on a les solutions de type I

$$F(x) = \exp - \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_1^+} (x - \widetilde{x})^{-\alpha} e^{\alpha \nu_\alpha (\log(x - \widetilde{x}))},\ x \geq \widetilde{x}. \tag{6.6}$$

(ii) soit le support de la solution est $]-\infty, \widetilde{x}]$ *et avec* $\mathcal{S}_2^+ = \left\{\alpha > 0 : \sum_{i=1}^m \gamma_i c_i^{-\alpha} = 1\right\}$, *on a les solutions de type II*

$$F(x) = \exp - \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_2^+} (\widetilde{x} - x)^\alpha \, e^{\alpha \nu_\alpha (\log 1/(\widetilde{x} - x))}, \; x \leq \widetilde{x}. \tag{6.7}$$

2/ Si $c_i = 1$, $\beta_i \neq 0$, $i = 1, .., m$, *le support de la solution est* $\mathbf{R}$ *avec* $\mathcal{S}_3^+ = \left\{\alpha > 0 : \sum_{i=1}^m \gamma_i e^{-\beta_i \alpha} = 1\right\}$, *on a les solutions de type III,*

$$F(x) = \exp - \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_3^+} e^{-\alpha(x - \nu_\alpha(x))}, \; x \in \mathbf{R} \tag{6.8}$$

(α, ν_α *sont admissibles. Plus précisement* ν_α *sont des fonctions périodiques bornées et continues à droites de périodes* $-\log c_i$, $i = 1, .., m$, *en plus* $x - \nu_\alpha(x)$ *sont croissantes.*

De la même façon que pour les lois semistables généralisées, on a discuté l'intérêt de ce modèle en mettant l'accent sur le caractère d'autosimilarité et en étudiant ses propriétés statistiques. On a montré comment les lois max-multiscaling peut être vues comme des lois limites de maximum d'une famille de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

6.4 Etude d'une équation fonctionnelle avec coefficients aléatoires

Dans le papier ([A11]), nous avons considéré l'équation fonctionnelle

$$\overline{F}(x) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^M \overline{F}(C_i x)^{\Gamma_i}\right]. \tag{6.9}$$

avec $\overline{F}$ est une fonction de répartition complémentaire à support $[0, \infty]$ ($\overline{F} := 1 - F$, où F est une fonction de répartition). On a $M \in \mathbb{N}^*$ est une variable aléatoire à valeurs entières et $(C_i, \, i \geq 1)$ et $(\Gamma_i, \, i \geq 1)$ sont des suites de variables aléatoires telle que $C_i > 0$, $\Gamma_i \geq 1$. La solution $\overline{F}$ de (6.9) est un point fixe de la transformation T, définie sur l'ensemble des fonctions de répartition complémentaire par

$$T\overline{F}(x) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^M \overline{F}(C_i x)^{\Gamma_i}\right].$$

Ceci est en lien avec l'équation fonctionnelle associée aux lois max-multiscaling, introduite ci-dessus et étudié dans le papier ([A8]). En effet, si G est solution de l'équation fonctionnelle

$$G(x) = \prod_{i=1}^{m} G(x/c_i)^{\gamma_i} \tag{6.10}$$

pour un entier $m \geq 1$, $c_i > 0$ et $\gamma_i > 0$, $i = 1, .., m$ alors en posant $\overline{F}(x) = G(1/x)$ pour $x > 0$ et $\overline{F}(x) = 1$ pour $x \leq 0$, la fonction de répartition complémentaire $\overline{F}$ est solution de

$$\overline{F}(x) = \prod_{i=1}^{m} \overline{F}(c_i x)^{\gamma_i}. \tag{6.11}$$

Ainsi on peut caractériser les solutions de l'équation (6.11) et les voir comme une extension des lois min-semistables et voir ainsi les solutions de notre équation (6.9) comme une extension des lois min-semistables.

Lorsque les $(\Gamma_i,\, i \geq 1)$ sont à valeurs entières, le relation (6.9) peut être représentée en terme de nouvelles variables aléatoires $N \in \mathbb{N}^*$ et $\{A_i, i \geq 1\}$ positive par l'identité en loi

$$X \stackrel{d}{=} \min_{1 \leq i \leq N} A_i X_i, \tag{6.12}$$

avec X_i sont des variables aléatoires i.i.d. de même loi que $X \geq 0$ et independantes des variables aléatoires $\{N, A_i, i \geq 1\}$. Cette identité a été considérée par Alsmeyer et Rösler [1] avec des coefficients déterministes. La question de trouver des conditions sous lesquelles une équation de type (6.12) admet des solutions non triviales a suscité de nombreux travaux dans le cadre de la somme en considérant l'identité en loi

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{N} A_i X_i. \tag{6.13}$$

ou plus généralement en considérant l'équation fonctionnelle (6.9) avec des transformées de Laplace au lieu des fonctions de répartition complémentaires. Nous citons par exemple et par ordre chronologique Mandelbrot [46], [47], Kahane et Peyrière [32], Holley et Liggett [30], Durrett et Liggett [16], Guivarc'h [25], Liu [42],[43] et Barral [4].

Sous des hypothèses techniques de type existence de moment, le comportement local de F en zéro et $\bar{F}$ est convexe, on montre l'existence de solution pour la relation (6.9) ; des résultats de caractérisation et d'unicité ont été également établis. Centrale à l'étude de cette équation fonctionnelle est la fonction structure

$$\tau(q) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{M} \Gamma_i C_i^q\right],\, q \in \mathbb{R}.. \tag{6.14}$$

On suppose $\tau(q) < \infty$ pour tout $q \geq 0$, et $\tau(0) > 1$. Le premier résultat d'existence concerne le cas $\tau(1) = 1$ et $\tau'(1) < 0$, dit le cas spécial. Dans ce cas particulier le comportement de la solution en 0 a été décrit. Puis, les résultats dans le cas général sont obtenus par des opérateurs de transport. Les techniques utilisées sont inspirées des articles de Durrett et Liggett [16] et Liu [42] [43]. Notre résultat sur l'existence est donné par le Théorème 2.2. du papier [A11].

Théorème 13 *Soit $0 < \alpha < \infty$ tel que $\tau(\alpha) = 1$ et $\tau'(\alpha) \leq 0$. Deux cas se présentent*

(i) Cas $\tau'(\alpha) < 0$: si $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{M} \Gamma_i C_i^{\alpha} \log_+ \left(\sum_{i=1}^{M} \Gamma_i C_i^{\alpha}\right)\right] < \infty$, alors il existe une solution non triviale à l'équation fonctionnelle (6.9).

(ii) Cas $\tau'(\alpha) = 0$: si $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{M} \Gamma_i C_i^{\beta} \log_+ \left(\sum_{i=1}^{M} \Gamma_i C_i^{\beta}\right)\right] < \infty$ pour tout $\beta < \alpha$, alors il existe une solution non triviale à l'équation fonctionnelle (6.9).

Le comportement des solutions au voisinage de zéro dépend du support des lois $\log C_i$, $i \geq 1$ et on dit qu'on est dans un cas *lattice* si le support est contenu dans $(\log c)\mathbb{Z}$, $c > 0$, sinon on dit qu'on est dans un cas *non-lattice*. On a un théorème de caractérisation pour les solutions grosso modo convexe sous la condition de moment (H_δ)

$$(H_\delta): \quad \exists \delta > 0 : \forall q \in \mathbb{R}_+, \ \sum_{i=1}^{M} \Gamma_i C_i^q \in \mathbb{L}_{1+\delta}.$$

Plus précisement, on établit le résultat pour les fonctions de répartition complémentaire appartenant à l'espace

$$\mathcal{F} := \{\overline{F} \in C^0(\mathbb{R}_+, [0,1]) : \exists \lambda > 0, \ c > 0, \ \text{tel que} \ \frac{F(ax)}{F(x)} \leq c a^{\lambda}, \ \forall a > 1, \ x > 0\}$$

qui contient l'espace des fonctions de répartition complémentaire convexe vérifiant $\infty < \overline{F}^{'}(0) < 0$.

Théorème 14 *Supposons que la condition (H_δ) est vérifiée et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\tau(\alpha) = 1$ et $\tau^{'}(\alpha) \leq 0$. Ensuite, si $\overline{F}$ est solution de l'équation fonctionnelle (6.9) et si $\overline{F} \in \mathcal{F}$, alors il existe une fonction $s(.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ qu'on la suppose continue périodique de période $-\log c$, $c > 0$, dans le cas lattice, et constante dans le cas non-lattice, vérifiant $x \to x^{\alpha} s(-\log x)$ est une fonction croissante, avec*

$$\frac{F(x)}{x^{\alpha} s(-\log x)} \to_{x \downarrow 0} 1, \quad si \quad \tau^{'}(\alpha) < 0$$

et

$$\frac{F(x)}{x^{\alpha} |\log x| \, s(-\log x)} \to_{x \downarrow 0} 1, \quad si \quad \tau^{'}(\alpha) = 0.$$

Inversement, lorsque $\tau(\alpha) = 1$ et $\tau'(\alpha) \leq 0$, on montre que pour toute fonction $s(.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ admissible on peut construire une solution $\bar{F}$ de l'équation fonctionnelle (6.9) qui a le comportement décrit dans le Théorème 14 ci-dessus. Par admissible, on suppose s vérifie

$\rightarrow$ dans le cas lattice : $s(x) := e^{-\alpha\nu(x)}$ avec ν une fonction continue à droite bornée et périodique de période $-logc$ avec $x - \nu(x)$ est une fonction croissante,

$\rightarrow$ et dans le cas non-lattice : $s(x) := s > 0$ est une fonction constante.

On a également établi dans les Théorèmes 4.1 et 4.2 sous la condition (H_δ) des résultats d'unicité dans le sens que si $\overline{F}_1$ et $\overline{F}_2$ sont deux solutions qui ont le même comportement en zéro alors $\overline{F}_1 = \overline{F}_2$.

Autres contributions

Dans le domaine des contrats industriels, j'ai mené avec Bernard Lapeyre entre 1992 et 1993 une étude pour le compte d'EDF portant sur une expertise des méthodes statistiques utilisées pour le calcul d'incertitude associé à un logiciel de thermohydraulique. Les rapports internes d'EDF [R1992] et [R1993] sont issues de ce travail.

Depuis octobre 2010, je co-encadre la thèse de Kaouther Hajji, étudiante de l'école polytechnique de Tunis, avec Eulalia Nualart et Ahmed Kebaier sur l'algorithme de Robbins-Monro et la réduction de variance. Cette thèse a obtenue une bourse de l'école doctorale de Paris 13.

Contrat de recherche

Mon travail a consisté à étudier des méthodes statistiques en thermohydraulique accidentelle. Au point de vue mathématique, on a une variable aléatoire qui représente la température et on veut évaluer ses queues de distribution. La simulation est donnée par un logiciel de thermohydraulique et les calculs sont lourds numériquement. On cherche à obtenir la meilleure approximation de ces queues de distribution avec un minimum de simulation. Enfin, j'ai comparé dans ce contexte les méthodes des suites à discrépance faible (Halton, Faure, les transformations irrationnelles du tore) et des méthodes de réduction de variance à la méthode classique de Monte Carlo. J'ai également testé l'algorithme de Robbins Monro. J'ai en particulier mis en évidence que la vitesse de convergence de ces différentes méthodes dépend de façon essentielle de la régularité de la quantité à calculer et de la dimension de notre espace de simulation.

Encadrement de thèse

Dans cette thèse, on s'intéresse à évaluer l'espérance d'une fonctionnelle de la solution d'une équation différentielle stochastique (EDS). Plus précisément, on veut calculer $\mathbb{E}[\phi(X_T)], T > 0$, avec $(X_t)_{t\geq 0}$ est solution d'une EDS multidimensionnelle, et où une simulation Monte Carlo est la seule méthode envisageable. Dans le but d'améliorer les performances des algorithmes, des méthodes de réduction de variance ont été préconisées dans la littérature. Récemment, deux nouvelles idées ont été développées séparément, la première est basée sur l'utilisation de l'algorithme de Robbins-Monro (voir, [2], [37], [40]) et la seconde utilise une extrapolation de type Richardson-Romberg sur l'erreur statistique (voir, [33]).

Dans la première partie de ce projet nous avons combiné les deux idées dans un même algorithme afin de construire une nouvelle méthode de réduction de variance. Une étude numérique et théorique a été menée et deux théorèmes de type limite centrale nous ont permis de décrire les choix optimaux des paramètres de l'algorithme. Une prépublication en collaboration avec Kaouther Hajji et Ahmed Kebaier est en stade avancé de rédaction.

Perspectives scientifiques

Comme on l'a déjà expliqué, un problème classique en finance mathématique est le calcul de $\mathbb{E}[\phi(X)]$, avec $X := (X_t)_{t\geq 0}$ est solution d'une EDS multidimensionnelle. Ce processus stochastique modélise l'actif sous-jacent risqué et ϕ le pay-off d'une option qui peut dépendre de la trajectoire de X. C'est le cas des options exotiques en finance comme les options américaines, les options asiatiques ou les options barrières. Une classe très riche en probabilité qui peut jouer le rôle de X et qui donne une extension naturelle aux processus classiques considérés, faisant intervenir uniquement le mouvement Brownien dans leur dynamique, est la classe des EDS dirigée par un processus de Lévy. Un exposé plus détaillé sur ce sujet peut être trouvé dans les livres de Boyarchenko et Levendorskiĭ [10] et Cont et Tankov[12]. Plus récemment cette classe de processus a également été largement utilisée dans la théorie moderne des mesures de risque, voir par exemple Asmussen et Albrecher [3] et Klüppelberg, Kyprianou et Maller [34]. Il y a aussi de nombreuses applications du processus de Lévy dans la théorie des files d'attente, la génétique et la biologie mathématique. Motivé par cet axe de recherche et en continuité avec mes travaux antérieurs, je compte aborder les points suivants.

- J'envisage d'étudier le problème d'estimation du drift dans un modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) avec sauts. En considérant l'EDS
$$dX_t = (a - bX_t)dt + \sqrt{2\sigma|X_t|}dW_t + dJ_t, \tag{6.15}$$
avec $X_0 = x > 0$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard et $(J_t)_{t\geq 0}$ est un processus à sauts indépendant du Brownien. Ceci me permettra d'aborder le problème d'estimation dans un modèle à sauts et le considérer comme une sous classe des processus affines. Par ailleurs et toujours sur la partie estimation, j'envisage d'étudier l'optimalité des estimateurs dans l'esprit de LeCam et Yang [39] où on cherchera à établir les propriétés LAN, LANM ou LAQ.
- Pour mon travail sur la méthode Multilevel Monte Carlo, j'envisage d'étudier cette méthode pour la discrétisation d'une équation différentielle dirigé par un processus de Lévy. J'envisage également d'étudier cette méthode dans le cadre du schéma de Milstein d'ordre 2.

- Enfin, je continurai à encadrer la thèse de Kaouther Hajji où nous envisageons de remplacer le mouvement Brownien par un processus de de Poisson composé voire un processus de Lévy et d'étudier si les méthodes de réduction de variance considérées dans le cas du Brownien s'adaptent à ce type de diffusions à sauts.

Recueil des articles

J'ai choisi les papiers [A4], [A8], [A9], [A10] et [A12] cités avec cette numérotation dans le chapitre liste des publications de ce document. J'invite également le lecteur de consulter les prépublications [P1] et [P2].

[A4] : Rate of convergence for computing expectations of stopping functionals of an $\alpha-$mixing process. En collaboration avec Gilles Pagès. *Advances in Applied Probability* , 30, 425-448(1998).

[A8] : On max-multiscaling distributions as extended max-semistable ones. En collabaration avec Thierry Huillet. *Stochastic Models* , 20(4), 493-512, (2004).

[A9] : On a functional equation genelatizing the class of semistable distributions. En collabaration avec Thierry Huillet. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* , 57(4), 817-831, (2005).

[A10] : Probabilistic approximation of a nonlinear parabolic equation occuring in rheology. En collabaration avec Benjamin Jourdain. *Journal of Applied Probability* 44(2), 528-546, (2007).

[A12] : Parameter estimation for the square root diffusions : ergodic and nonergodic cases. En collabaration avec Ahmed Kebaier, accepter à Stochastic Models.

[P1] : Asymptotic behavior of the maximumm likelihood estimator For ergodic and nonegodic square root diffusions. En collabaration avec Ahmed Kebaier.

[P2] : Central limit Theorem for the multilevel Monte Carlo Euler method and Applications to Asian options. En collabaration avec Ahmed Kebaier.

Bibliographie

[1] Gerold Alsmeyer and Uwe Rösler. A stochastic fixed point equation for weighted minima and maxima. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 44(1) :89–103, 2008.

[2] Bouhari Arouna. Adaptative Monte Carlo method, a variance reduction technique. *Monte Carlo Methods Appl.*, 10(1) :1–24, 2004.

[3] Søren Asmussen and Hansjörg Albrecher. *Ruin probabilities.* Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, 14. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, second edition, 2010.

[4] Julien Barral. Une extension de l'équation fonctionnelle de B. Mandelbrot. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(4) :421–426, 1998.

[5] R. F. Bass and É. Pardoux. Uniqueness for diffusions with piecewise constant coefficients. *Probab. Theory Related Fields*, 76(4) :557–572, 1987.

[6] Jean Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[7] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New-York, 1968.

[8] N. Bouleau. On effective computation of expectations in large or infinite dimension. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 31 :23–34, 1990. North-Holland.

[9] Nicolas Bouleau. On numerical integration by the shift and application to Wiener space. *Acta Appl. Math.*, 25(3) :201–220, 1991.

[10] Svetlana I. Boyarchenko and Sergei Z. Levendorskiĭ. *Non-Gaussian Merton-Black-Scholes theory*, volume 9 of *Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability.* World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2002.

[11] Eric Cancès, Isabelle Catto, and Yousra Gati. Mathematical analysis of a nonlinear parabolic equation arising in the modelling of non-Newtonian flows. *SIAM J. Math. Anal.*, 37(1) :60–82 (electronic), 2005.

[12] Rama Cont and Peter Tankov. *Financial modelling with jump processes.* Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[13] Paul Doukhan. *Mixing*, volume 85 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Properties and examples.

[14] Darrell Duffie and Peter Glynn. Efficient Monte Carlo simulation of security prices. *Ann. Appl. Probab.*, 5(4) :897–905, 1995.

[15] Marie Duflo. *Méthodes récursives aléatoires*. Techniques Stochastiques. [Stochastic Techniques]. Masson, Paris, 1990.

[16] Richard Durrett and Thomas M. Liggett. Fixed points of the smoothing transformation. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 64(3) :275–301, 1983.

[17] Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, and Thomas Mikosch. *Modelling extremal events*, volume 33 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. For insurance and finance.

[18] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.

[19] I. S. Gál and J. F. Koksma. Sur l'ordre de grandeur des fonctions sommables. *Indigationes Math.*, 12 :192–207, 1950.

[20] Janos Galambos. *The asymptotic theory of extreme order statistics*. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1978. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

[21] M. B. Giles. Multilevel Monte Carlo path simulation. *Oper. Res.*, 56(3) :607–617, 2008.

[22] B. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. of Math. (2)*, 44 :423–453, 1943.

[23] I. V. Grinevich. Domains of attraction for max-semistable laws under linear and power normalizations. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 38(4) :787–799, 1993.

[24] I. V. Grinevich and Yu. S. Khokhlov. Domains of attraction of semistable laws. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 40(2) :417–422, 1995.

[25] Yves Guivarc'h. Sur une extension de la notion de loi semi-stable. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 26(2) :261–285, 1990.

[26] E. J. Gumbel. *Statistics of extremes*. Columbia University Press, New York, 1958.

[27] G. Halász. Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem. *Acta Math. Acad. Hungar.*, 28 :389–395, 1976.

[28] P. Hall and C. C. Heyde. *Martingale limit theory and its application*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980. Probability and Mathematical Statistics.

[29] P. Hébraux and F. Lequeux. Mode-coupling theory for the pasty rheology of soft glassy materials. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :2934–2937, 1998.

[30] Richard Holley and Thomas M. Liggett. Generalized potlatch and smoothing processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 55(2) :165–195, 1981.

[31] Jean Jacod and Philip Protter. Asymptotic error distributions for the Euler method for stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, 26(1) :267–307, 1998.

[32] J.-P. Kahane and J. Peyrière. Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot. *Advances in Math.*, 22(2) :131–145, 1976.

[33] Ahmed Kebaier. Statistical Romberg extrapolation : a new variance reduction method and applications to option pricing. *Ann. Appl. Probab.*, 15(4) :2681–2705, 2005.

[34] Claudia Klüppelberg, Andreas E. Kyprianou, and Ross A. Maller. Ruin probabilities and overshoots for general Lévy insurance risk processes. *Ann. Appl. Probab.*, 14(4) :1766–1801, 2004.

[35] U. Krengel. *Ergodic Theorems.* de Gruyter Studies in Mathematics, Berlin, New-York, 1985.

[36] U. Krengel. On the speed of convergence in ergodic theorem. *Monatsh. Math.*, 86 :3–6, 1986.

[37] Bernard Lapeyre and Jérôme Lelong. A framework for adaptive Monte Carlo procedures. *Monte Carlo Methods Appl.*, 17(1) :77–98, 2011.

[38] Bernard Lapeyre and Emmanuel Temam. Competitive Monte carlo methods for the pricing of Asian options. *Journal of Computational Finance*, 5(1), 2001.

[39] Lucien Le Cam and Grace Lo Yang. *Asymptotics in statistics.* Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1990. Some basic concepts.

[40] Vincent Lemaire and Gilles Pagès. Unconstrained recursive importance sampling. *Ann. Appl. Probab.*, 20(3) :1029–1067, 2010.

[41] J.-P. Lepeltier and B. Marchal. Problème des martingales et équations différentielles stochastiques associées à un opérateur intégro-différentiel. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, 12(1) :43–103, 1976.

[42] Quansheng Liu. Sur une équation fonctionnelle et ses applications : une extension du théorème de Kesten-Stigum concernant des processus de branchement. *Adv. in Appl. Probab.*, 29(2) :353–373, 1997.

[43] Quansheng Liu. Fixed points of a generalized smoothing transformation and applications to the branching random walk. *Adv. in Appl. Probab.*, 30(1) :85–112, 1998.

[44] Eugene Lukacs. *Developments in characteristic function theory.* Macmillan Co., New York, 1983.

[45] Lavrentiev M. and Chabat B. *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe.* Modern Probability and Statistics. MIR, Moscou, 1972.

[46] Benoit Mandelbrot. Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 278 :289–292, 1974.

[47] Benoit Mandelbrot. Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire : quelques extensions. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 278 :355–358, 1974.

[48] D. Mejzler. On a certain class of limit distributions and their domain of attraction. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 117 :205–236, 1965.

[49] N. R. Mohan and S. Ravi. Max domains of attraction of univariate and multivariate p-max stable laws. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 37(4) :709–721, 1992.

[50] E. Pancheva. Max-semistable laws. *J. Math. Sci.*, 76(1) :2177–2180, 1995.

[51] Lévy Paul. *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* Gauthier Villars, Paris, 1937.

[52] W. Philipp and W. Stout. Almost sure invariance principles for partial sums of weakly dependent variables. Technical report, Memoirs of the America Mathematical Society, 1975.

[53] B. Ramachandran and C. Radhakrishna Rao. Some results on characteristic functions and characterizations of the normal and generalized stable laws. *Sankhyā Ser. A*, 30 :125–140, 1968.

[54] Pillai R.N. Semistable laws as limit distributions. *Ann. Math. Statist.*, 42 :780–783, 1971.

[55] Ken-iti Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1990 Japanese original, Revised by the author.

[56] Ryoichi Shimizu. On the domain of partial attraction of semi-stable distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 22 :245–255, 1970.

[57] Ryoichi Shimizu. Solution to a functional equation and its application to some characterization problems. *Sankhyā Ser. A*, 40(4) :319–332, 1978.

[58] Daniel W. Stroock and S. R. Srinivasa Varadhan. *Multidimensional diffusion processes*, volume 233 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[59] Denis Talay and Luciano Tubaro. Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. *Stochastic Anal. Appl.*, 8(4) :483–509 (1991), 1990.

[60] Vladimir V. Uchaikin and Vladimir M. Zolotarev. *Chance and stability*. Modern Probability and Statistics. VSP, Utrecht, 1999. Stable distributions and their applications, With a foreword by V. Yu. Korolev and Zolotarev.

[61] Kruglov V.M. On the extension of the class of stable distributions. *Theory Probab. Appl.*, 17 :685–694, 1972.