Master : Economie et Finance Internationales, spécialité : Ingénieries Financières et Modélisation (IFIM), Université Paris13.
Processus stochastiques à temps discret (2012-2013)

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 1. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes, montrer que*

$$\mathbb{E}(h(X, Y)/Y) = \varphi(Y)$$

avec

$$\varphi(y) = \sum_x h(x, y)\mathbb{P}(X = x|Y = y).$$

2. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à densité, montrer que*

$$\mathbb{E}(h(X, Y)/Y) = \varphi(Y)$$

avec

$$\varphi(y) = \int h(x, y) f_X^{[Y=y]}(x)dx.$$

3. *On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. En déduire des questions précedentes que $\mathbb{E}(h(X, Y)/Y) = \varphi(Y)$ avec $\varphi(y) = \mathbb{E}(h(X, y))$.*

Exercice 2 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. On définit la covariance conditionnelle par rapport à $\mathcal{B}$ de deux variables aléatoires réelles X et $Y \in L^2$ par*

$$Cov^{\mathcal{B}}(X, Y) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}}\left[\left(X - \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)\right)\left(Y - \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Y)\right)\right]$$

1. *Vérifier que $Cov^{\mathcal{B}}(X, Y) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(XY) - \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Y)$.*
2. *Montrer que $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(Cov^{\mathcal{B}}(X, Y)) + Cov(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X), \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Y))$.*

Soit $k_X^{\mathcal{B}} = \sqrt{\frac{Var(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X))}{Var(X)}}$. Montrer que $0 \leq k_X^{\mathcal{B}} \leq 1$ et que :

1. *X et $\mathcal{B}$ sont indépendantes alors $k_X^{\mathcal{B}} = 0$.*
2. *X est $\mathcal{B}-$mesurable si et seulement si $k_X^{\mathcal{B}} = 1$.*

Que devient la formule de la deuxième question si $X = X' + f(Z)$ et $Y = Y' + g(Z)$ pour un couple (X', Y') indépendant de la variable aléatoire Z et en prenant $\mathcal{B} = \sigma(Z)$.