Master : Economie et Finance Internationales, spécialité : Ingénieries Financières et Modélisation (IFIM), Université Paris13.
Processus stochastiques à temps discret (2012-2013)

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 *Soit* $X = {}^t(X_1, \cdots, X_n)$ *un vecteur aléatoire de* $\mathbb{R}^n$

1. *Montrer que si les composantes de* X *sont des variables alétoires gaussiennes indépendantes alors* X *est un vecteur gaussien.*

2. *Si* X *est un vecteur gaussien alors ces composantes sont des variables gaussiennes.*

Exercice 2 *Soient* X *une variable aléatoire réelle de loi* $\mathcal{N}(0, 1)$ *et* ε *une variable aléatoire réelle de loi* $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}$.

1. *Montrer que la variable* $Y = \varepsilon X$ *est gaussienne et que* $Cov(X, Y) = 0$.

2. *Les variables aléatoires* X *et* Y *sont elles indépendantes?*

3. *Le vecteur aléatoire* ${}^t(X, Y)$ *est-il gaussien?*

Exercice 3 *Soit* $V = {}^t(X, Y, Z)$ *un vecteur aléatoire de dimension 3. On suppose que la loi de* V *est* $\mathcal{N}(0, \Gamma)$*, où* Γ *est la matrice définie par*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Quelle est la fonction caractéristique de* V *?*

2. *Montrer que le couple* (X, Y) *est indépendant de* Z.

3. *Quelles sont les lois marginales? Donner la loi du couple* (X, Y).

4. *Le couple* (X, Y) *admet-t-il une densité? Si oui la calculer.*

5. *Déterminer l'espérance conditionnelle* $\mathbb{E}(X|Y)$.

6. *Déterminer la loi du couple* $(X - \mathbb{E}(X|Y), \mathbb{E}(X|Y))$.

7. *Déterminer la loi de* X *sachant* Y.