Master : Economie et Finance Internationales, spécialité : Ingénieries Financières et Modélisation (IFIM), Université Paris13.
Processus stochastiques à temps discret (2012-2013)

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 *Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires intégrables. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \cdots, Y_n)$. Montrer que les suites $(X_n)_{n\geq 1}$ suivantes sont des martingales relativement à $\mathcal{F}_n$:*

1. *$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ où $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes centrées.*
2. *$X_n = (\sum_{k=1}^{n} Y_k)^2 - n\sigma^2$ où $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes centrées et de variance σ^2.*
3. *Rapport de vraisemblance : Soient f_0 et f_1 deux densités de probabilités ($f_0 > 0$) et $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de densité f_0. On prend*
$$X_n = \frac{f_1(Y_1) \cdots f_1(Y_n)}{f_0(Y_1) \cdots f_0(Y_n)}.$$
Si $f_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $f_0 \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ que vaut X_n.

Exercice 2 *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux martingales (respectivement sur ou sous martingales), montrer que pour tous réels a et b (respectivement pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$), $aX_n + bY_n$ est encore une martingale (respectivement une sur ou sous martingale).*

Exercice 3 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{2}{3} - a_n$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(X_n = 1) = a_n$, où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels à valeurs dans $]0, \frac{2}{3}[$. On pose $S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, \ k \leq n)$.*

1. *Donner une condition sur la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ pour que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une sur-martingale (respectivement une sous-martingale, respectivement une martingale) par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n$.*
2. *Pour une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose $M_n = S_n - \alpha_n$. Trouver $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une martingale nulle en 0 ($M_0 = 0$).*
3. *Montrer qu'il existe une suite réelle $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(M_n^2 - \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.*
4. *Soit $T = \inf\{n \geq 1, \quad S_n > 0\}$. Calculer M_T.*