

**Master : Economie et Finance Internationales, spécialité : Ingénieries
Financières et Modélisation (IFIM), Université Paris13.
Processus stochastiques à temps discret (2012-2013)**

Feuille d'exercices 6

Exercice 1 Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration de \mathcal{F} . Les martingales et les sous martingales sont toujours définies relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous martingale intégrable.

(a) On définit A_n par la formule : $A_0 = 0$,

$$A_{n+1} - A_n = \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n).$$

Montrer que A_n est croissant et A_n est prévisible.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = X_n - A_n$. Montrer que M_n est une martingale intégrable.

Le couple (M_n, A_n) s'appelle la décomposition de Doob de X_n et (A_n) le compensateur de X_n .

2. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$, $S_0 = 0$, et pour $n \geq 1$ $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Montrer que S_n est une martingale.

3. En déduire que S_n^2 est une sous martingale intégrable et calculer son compensateur. On remarque que ce compensateur est aussi le processus croissant associé à la martingale de carré intégrable S_n .

4. On note par $\text{sign}(x)$ la fonction $\text{sign}(x) = 1$ si $x > 0$, $\text{sign}(x) = -1$ si $x < 0$ et $\text{sign}(0) = 0$. On considère le processus $M_n = \sum_{k=1}^n \text{sign}(S_{k-1})Y_k$, $n \geq 1$ et $M_0 = 0$. Montrer que M_n est une martingale.

5. En déduire que M_n^2 est une sous martingale intégrable, et calculer son compensateur. On remarque que ce compensateur est aussi le processus croissant associé à la martingale de carré intégrable M_n .

6. Evaluer $|S_{n+1}| - |S_n|$ sur $(S_n > 0)$, $(S_n = 0)$ et $(S_n < 0)$.

7. Montrer que $|S_n|$ est une sous martingale intégrable. Quelle est le compensateur de la sous martingale $|S_n|$.