Licence Economie Gestion 2
1^{er} semestre 2012-2013
STATISTIQUES

Feuille 2

Exercice 1 *Soient $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ avec les probabilités :*

x	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$3a$	$2a$	a	$2a$	$3a$

1. *Montrer que $a = \frac{1}{11}$.*
2. *Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.*
3. *Calculer et tracer la fonction de répartition de X.*
4. *On pose $Y = |X|$, trouver la loi de Y.*
5. *Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $Var(Y)$.*

Exercice 2 *Soit X une variable aléatoire prenant des valeurs $k = 1, 2, 3, \cdots$, avec les probabilités $\mathbb{P}(X = k) = a^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Calculer a, $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.*
2. *Calculer la fonction de répartition de X.*

Exercice 3 *Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans le noir, avec 3 clefs dont une est la bonne. On suppose qu'il essaie les clefs une à une, sans utiliser deux fois la même, et on note par X le nombre d'essais nécessaires.*

1. *Montrer que la loi de X est donnée par*
$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{3}.$$
2. *Tracer la fonction de répartition de X.*
3. *Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.*

Exercice 4 *Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives $1, 2, \cdots, n, \cdots$. On suppose que les sauts sont indépendants et de probabilité de sucées $\frac{1}{n}$ au $n^{\text{ème}}$ saut. Il est éliminé à son premier échec.*

1. *Soit $n \geq 1$, on note par Y_n la variable aléatoire réelle qui prend 1 si le sauteur a franchi le $n^{\text{ème}}$ saut avec sucées et 0 sinon; donner la loi de Y_n.*

2. *X est la variable aléatoire du numéro de son dernier saut réussi.*

   (a) *Interpréter l' événement $(X = n)$ à l'aide de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ et trouver la loi de X. Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X = n) = 1$.*

   (b) *Calculer $\mathbb{E}(X + 1)$ et en déduire $\mathbb{E}(X)$.*

Exercice 5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_n = 3^n - 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ de loi $\mathbb{P}_X(\{u_n\}) = \mathbb{P}(X = u_n) = a\frac{2^n}{n!}$, avec a une constante positive. Déterminer a et calculer $\mathbb{E}(X)$.*

Exercice 6 *Quelles sont les lois, les espérances et les variances des lois suivantes:*

- *Loi Uniforme sur $\{1, ..., n\}$*
- *Loi de Bernoulli de paramètre p*
- *Loi Binômiale de paramètre n et p*
- *Loi de Poisson de paramètre λ*
- *Loi Géométrique de paramètre p*

Exercice 7 *Soit X une variables aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq 1$, on ait $\mathbb{P}(X = n-1) = \frac{1}{4}n\mathbb{P}(X = n)$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{4^n}{n!}\mathbb{P}(X = 0)$. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance. Calculer $\mathbb{E}(\frac{1}{X+1})$.*

Exercice 8 *On lance simultanément 3 dés équilibrés. Soit X la variable aléatoire: "Nombre de 6 obtenus".*

1. *Quelle est la loi de X?*
2. *Définissons un succès comme étant l'évènement: "obtenir au moins deux 6".*

On jette 5 fois les dès simultanément. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois succès?

Exercice 9 *On lance une pièce de monnaie de façon indépendante, jusqu'à ce qu'on obtienne "pile". On appelle X la v.a. associée au nombre de jets pour avoir un "pile". On admet que la probabilité d'avoir "pile" et d'avoir "face" sont égales.*

1. *Quelle est la loi de X*
2. *Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.*

Exercice 10 *Une région comporte 10 hôpitaux, chacun ayant une capacité opératoire journalière de 10 patients. Le nombre de personnes se présentant chaque jour pour être opérée dans chacun de ses hôpitaux suit une loi de Poisson de paramètre 8, ces nombres étant indépendants d'un hôpital à l'autre. On considère un jour donné.*

1. *Quelle est la probabilité qu'un hôpital donné soit obligé de refuser un patient?*
2. *Quelle est la probabilité que l'un au moins des hôpitaux soit obligé de refuser un patient?*