1^{ere} Année-Diplôme d'ingénieur
TD
Tribus et Variables aléatoires absolument continue

1 Tribus et événements

Exercice 1 Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux tribus sur un ensemble Ω. Montrer que $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ est une tribu sur Ω. Montrer que ce résultat se généralise à une intersection non vide quelconque de tribus sur Ω.

Exercice 2 Ω est un ensemble et $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. On note $\sigma(\mathcal{C})$ l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$.
1/ Montrer que $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu sur Ω.
2/ Montrer que $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{C}$ (au sens de l'inclusion). On l'appelle la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. 3/ Déterminer $\sigma(\mathcal{C})$ dans les cas suivant

- $\mathcal{C} = A$.
- $\mathcal{C}$ est une partition dénombrable de Ω. On montrera que si $\mathcal{C} = \{A_i, i \in I\}$ avec I dénombrable alors $\sigma(\mathcal{C}) = \{\cup_{j\in J} A_j / J \in \mathcal{P}(I)\}$.

Exercice 3 On appelle tribu des boréliens la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles. Nous la noterons $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et c'est celle que nous utiliserons lorsque nous travaillerons sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu engendrée par les intervalles de type $]a, b[(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b)$. On montre encore que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu engendrée par les intervalles de type $]\infty, x], x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 Soient A, B, C trois événements. Exprimer à l'aide des opérations sur les événements, les événements suivants et calculer leurs indicatrices en fonction de celles de A, B, C:
"A est réalisé seul."
"A et B sont réalisés mais pas C."
"Un des trois événements est réalisé."
"Deux événements au plus sont réalisés."
"aucun événement n'est réalisé."

Exercice 5 Soit (A_n) une suite d'événements, écrire à l'aide des opérations $\cup$ et $\cap$ les événements suivant :

- l'ensemble des points appartenant à tous les A_n sauf au plus à un nombre fini. On le note $\liminf_{n\to\infty} A_n$
- l'ensemble des points appartenant à une infinité de A_n noté $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

Calculer l'indicatrice de $\liminf_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n$ en fonction de celles des A_n.

Exercice 6 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. Prouver que $\sup_{n\in N} X_n$, $\inf_{n\in N} X_n$, $\liminf_{n\to\infty} X_n$ et $\limsup_{n\to\infty} X_n$ sont des variables aléatoires.

Exercice 7 1/ Montrer qu'une fonction continue de R dans R est mesurable.
2/ Soient $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Pour $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{A}' = \{\Omega', \emptyset\}$ quelles sont les fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega', \mathcal{A}')$.

2 Variables aléatoires absolument continue

Exercice 8 Soit X la variable aléatoire absolument continue dont la densité de probabilité $f(x)$ est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} k\, e^{-\frac{x}{t}} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1/ Calculer la valeur de la constante k.
2/ Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ de la variable aléatoire X.
2/ Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 9

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{u^2} e^{-\frac{x}{u}} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1/Montrer que f est bien une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire de densité f :
2/ Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ de la variable aléatoire X.
3/ Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 10 Soit X une V.A.R centrée réduite, sa densité $f(x)$ est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1/ Déterminer la fonction de répartition $G_1(y)$ et la densité $g_1(y)$ de la V.A.R $Y_1 = |X|$. Calculer $\mathbb{E}(Y_1)$.
2/ Déterminer la fonction de répartition $G_2(y)$ et la densité $g_2(y)$ de la V.A.R $Y_2 = X^2$. Calculer $\mathbb{E}(Y_2)$.
3/ Déterminer la fonction de répartition $G_3(y)$ et la densité $g_3(y)$ de la V.A.R $Y_3 = e^X$. Calculer $\mathbb{E}(Y_3)$.
3/ Déterminer la fonction de répartition $G_4(y)$ et la densité $g_4(y)$ de la V.A.R $Y_4 = aX + b$.

Calculer $\mathbb{E}(Y_4)$.

Exercice 11. La durée de vie d'un certain bien économique est une variable aléatoire absolument continue X dont la densité de probabilité est la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

A /
1/ Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ de la variable aléatoire X.
2/ Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

B/ Sachant que la durée de vie du bien a déjà atteint la valeur a, on appelle durée de survie la durée de vie au delà du temps a. c'est une variable aléatoire absolument continue que l'on notera X_a.
1/ Déterminer la fonction de répartition $G_a(x)$ de la variable aléatoire X_a.
2/ Déterminer la densité de probabilité $g_a(x)$ de la variable aléatoire X_a.
3/ Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X_a)$ de la variable aléatoire X_a.
4/ Que remarque-t-on ?