1^{ere} Année-Diplôme d'ingénieur
TD 4

Exercice 1 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre n. Montrer que X_n converge en probabilité vers 0.

Exercice 2 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la densité de X_n est donnée par $f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2}$.

1/ Démontrer que f_n est une densité.

2/ Peut on calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

3/ Démontrer que X_n converge en probabilité vers 0.

Exercice 3 : Un joueur mise une somme m avec une probabilité de gagner $\frac{1}{2}$. Il adopte la stratégie suivante : s'il gagne il s'arrête de jouer et s'il perd il double sa mise et il rejoue avec la même stratégie. Démontrer que le joueur récupère presque sûrement sa mise. (On notera par $G_n(\omega)$ le gain à l'issue de l'étape n et montrera que G_n converge presque sûrement vers m).

Exercice 4 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour $n \geq 1$, on considère la variable aléatoire définie par

$$\begin{cases} Y_n = 2^n & \text{si } \ 0 \leq X \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1/ Etudier la converge presque sure de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2/ Etudier la convergence en norme L^p de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3/ Etudier la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4/ Quelle leçon tirer de cet exercice.

Exercice 5 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires absolument continues. La densité de probabilité du couple est la fonction de deux variables x et y définie par :

$$h(x, y) = \begin{cases} kx^2y & \text{si} \quad (x, y) \in [-1, 1][0, 1] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1/ Déterminer en fonction de la constante k les densités marginales $f(x)$ et $g(y)$ des variables aléatoires X et Y. En déduire la valeur de la constante k.

2/ Déterminer la densité de la variable aléatoire X conditionnée par l'événement $[Y = y]$ et celle de la variable Y conditionnée par l'événement $[X = x]$.

3/ Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes en probabilité?

Exercice 6 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires absolument continues. La densité de probabilité du couple est la fonction de deux variables x et y définie par :

$$h(x,y) = \begin{cases} ke^{-y} & \text{si} \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \end{cases} \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1/ Déterminer en fonction de la constante k les densités marginales $f(x)$ et $g(y)$ des variables aléatoires X et Y. En déduire la valeur de la constante k.

2/ Déterminer la densité de la variable aléatoire X conditionnée par l'événement $[Y = y]$ et celle de la variable Y conditionnée par l'événement $[X = x]$.

3/ Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes en probabilité?

Exercice 7 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires absolument continues. La densité de probabilité du couple est la fonction de deux variables x et y définie par :

$$h(x,y) = \begin{cases} kx^2ye^{-(x+y)} & \text{si} \quad (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1 Déterminer les densités marginales $f(x)$ et $g(y)$ des variables aléatoires X et Y. En déduire la valeur de la constante k.

2 Déterminer la densité de la variable aléatoire X conditionnée par l'événement $[Y = y]$ et celle de la variable Y conditionnée par l'événement $[X = x]$.

3 Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes en probabilité?

4 Soit $Z = X + Y$, déterminer la densité $s(z)$ de la variables aléatoire Z.

Exercice 8 : Soit $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$une suite de V.A.R. exponentielles de paramètre $a > 0$ .On suppose que les T_i sont mutuellement indépendantes.

1 Soit $S_2 = T_1 + T_2$. Déterminer la loi de S_2.

2 Soit $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$. Déterminer la loi de S_n et $\mathbb{E}(S_n)$.

Exercice 9 : Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0, a]$. Calculer la loi de $X + Y$ par deux méthodes différentes.

Exercice 10 : Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires absolument continues. La densité de probabilité du couple est la fonction à deux variables x_1 et x_2 définie par :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si}(x_1, x_2) \in [0, 1][0, 1] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Déterminer la densité du couple $Y = (Y_1, Y_2)$ avec $Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$ et $Y_2 = X_1 + X_2$.

Exercice 11 : Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées selon la loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la densité du vecteur $Y = (Y_1, Y_2)$ donné par $Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$, et $Y_2 = X_1^2 + X_2^2$.

Exercice 12 : Montrer que pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la fonction

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

est une densité de probabilité. Une variable aléatoire X qui a pour densité cette fonction est appelée une variable aléatoire γ de paramètres α et β, notée $\gamma(\alpha, \beta)$.

Soit X_1 une variable aléatoire de loi $\gamma(\alpha_1, 1)$ et X_2 une variable aléatoire de loi $\gamma(\alpha_2, 1)$. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes. Déterminer la densité du vecteur $Y = (Y_1, Y_2)$ donné par $Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$, et $Y_2 = Y_1 + Y_2$.. Que peut-on dire de Y_1 et Y_2.

Exercice 13 : Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

et

$$f_Y(y) = \begin{cases} y e^{-\frac{y^2}{2}} & \text{si} \quad y > 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Trouver la loi de $XY = Z$.