1^{ere} Année-Diplôme d'ingénieur
TD 1

Exercice 1 *Soit* $\phi = \phi_X$ *une fonction caractéristique; montrer l'équivalence:*
a) $\phi(x_0) = 1$ *pour* $x_0 \in R^+$
b) $\phi(x + x_0) = \phi(x), \ \ \forall x \in R$
c) X *est à valeurs dans les multiples de* $\frac{2\pi}{x_0}$.

Exercice 2 *Soit* X *une variable aléatoire on pose pour* $t \in R$, $h(t) = \mathbb{E}(\exp itX)$. *Montrer que* h *est définie sur* R. *On suppose que* X^k *est intégrable. Montrer que* h *est* k *fois dérivable en 0. Calculer* $h^{(k)}(0)$. *Application: Calculer les moments de la loi normale centrée réduite.*

Exercice 3 *Soient* X *une variable aléatoire qui suit la loi de cauchy* $C(a)$, *de densité* $\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$, *et* Y *de loi* $C(b)$. *Trouver à l'aide des fonctions caractéristiques la loi de la somme* $X + Y$.

Exercice 4 *Soient* X *une variable aléatoire qui suit la loi normale* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, *de densité* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$, *et* Y *de loi* $\mathcal{N}(m', \sigma'^2)$. *Trouver à l'aide des fonctions caractéristiques la loi de la somme* $X + Y$.

Exercice 5 *Soit* $(X_i)_{1 \le i \le n}$, *des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre* λ. *En utilisant les fonctions caractéristiques, trouver la loi de la somme* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Exercice 6 *Soit* f *une fonction continue et bornée sur* $\mathbb{R}^+$ *montrer que :*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k \ge 0} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f(\frac{k}{n}) = f(\lambda).$$

Démontrer que si f *est continue sur* $[0, 1]$ *et* $p \in [0, 1]$ *alors*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k \ge 0}^{n} C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} f(\frac{k}{n}) = f(p).$$

Exercice 7 *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires indépendantes telles que*

$$P(X_n = \sqrt{n}) = P(X_n = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$$

On pose $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$.
a) Calculer la fonction caractéristique de Y_n.
b) Etablir pour $|a_k| \le 1, \ \ |b_k| \le 1, \ \ k = 1 \ldots n$ *l'inégalité* $|\prod_1^n a_k - \prod_1^n b_k| \le \sum_1^n |a_k - b_k|$. *En déduire une estimation de* $|\phi_{Y_n}(t) - \prod_1^n \exp(-\frac{t^2 k}{2n^2})|$ *puis la limite en loi de* (Y_n).

Exercice 8 *Soient* (a_n) *et* (b_n) *2 suites réelles,* $b_n > 0$*. Etudier la convergence en loi des suites* (δ_{a_n}) *et* $\mathcal{N}(a_n, b_n)$*.*

Exercice 9 *Soit* (X_n) *une suite de variables indépendantes de même loi* $e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$*.*
a) Calculer la loi de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$*.*
b) On pose $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$*; calculer* ϕ_{Z_n} *ainsi que sa limite quand* n *tend vers l'infini.*
c)Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} dx = \frac{1}{2}.$$