1^{ere} Année-Diplôme d'ingénieur

Convergences. Loi forte des grands nombres.

TD 2 de Statistiques

Exercice 1 *Inégalité exponentielle. Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables indépendantes et de même loi définie par: $\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}(X_j = -1) = \dfrac{1}{2}$. On pose: $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.*

1. *Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq \exp -ax\mathbb{E}(\exp xS_n), \ \ \forall a, x \geq 0$.*
2. *Démontrer l'inégalité $\mathrm{ch}x \leq \exp \frac{x^2}{2}$ et déduire de a) que $\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq \exp -\frac{a^2}{2n}$.*

Exercice 2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la densité de X_n est donnée par $f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2}$. Démontrer que X_n converge en probabilité vers 0.*

Exercice 3 *Un joueur mise une somme m avec une probabilité de gagner $\frac{1}{2}$. Il adopte la stratégie suivante : s'il gagne il s'arrête de jouer et s'il perd il double sa mise et il rejoue avec la même stratégie. Démontrer que le joueur récupère presque sûrement sa mise. (On notera par $G_n(\omega)$ le gain à l'issue de l'étape n et montrera que G_n converge presque sûrement vers m).*

Exercice 4 *Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour $n \geq 1$, on considère la variable aléatoire définie par $Y_n = 2^n \mathbf{1}_{0\leq X\leq \frac{1}{n}}$. Etudier la converge presque sûre, L^2, L^1 et en probabilité de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 5 *Soient (X_n) et (Y_n) 2 suites de variables aléatoires qui convergent en probabilité vers X et Y. Montrer que si $f \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est uniformément continue alors $f(X_n, Y_n)$ converge en probabilité vers $f(X, Y)$.*

Exercice 6 *Soient $X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n, \ldots$ des v.a.r. indépendantes et intégrables. On suppose que les X_i sont i.i.d. et que les Y_i le sont également. On note $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ et $\mathbb{E}(Y_1) = \nu$. Soit $S_n = \sum_{m=1}^{n} X_m$, $T_n = \sum_{m=1}^{n} X_m Y_m$. Quel est le comportement asymptotique des variables*

$$\frac{S_n}{n}, \ \ \text{et} \ \ \frac{T_n}{n}$$

Exercice 7 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes d'espérance 1 qui prennent deux valeurs a et b strictement positives ($a \neq b$) avec probabilité p et $1-p$ respectivement ($0 < p < 1$). On pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. Vérifier que $\mathbb{E}(\log(X_1)) < 0$. Montrer que la suite Y_n converge presque sûrement et donner sa limite. (appliquer la loi forte des grands nombres à la suite $(\log(X_n)_{n\in\mathbb{N}})$.)*

Exercice 8 *L'hypothèse de variables intégrables ne peut être supprimée dans la loi (forte, ou faible) des grands nombres :*
Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées suivant la loi de Cauchy de paramètre a.
a) Quelle est la loi de $Y_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$?
b) Quelle est la loi de $Y_{n+p} - Y_n$.
c) En déduire que Y_n ne converge pas en probabilité donc pas non plus presque sûrement.