1^{ere} Année-Diplôme d'ingénieur

Quelques estimateurs empiriques

TD 3 de Statistiques

1 Echantillon d'une loi de Bernoulli

On observe X_1 et X_2 deux v.a indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\theta \in]0,1[$. Montrer qu'on ne peut pas trouver d'estimateur sans biais de $\frac{\theta}{1-\theta}$, fonction de X_1 et X_2.

2 n-échantillon d'une loi de Bernoulli

A l'aide d'un n-échantillon de loi de Bernoulli de paramètre θ, on cherche à estimer la variance $\theta(1-\theta)$; $\overline{X}$ étant la moyenne empirique, on propose l'estimateur $T = \overline{X}(1-\overline{X})$. Vérifier qu'il n'est pas sans biais et donner un estimateur sans biais de $\theta(1-\theta)$ multiple de T.

3 n-échantillon d'une loi de Poisson

On considère $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un n-échantillon d'une loi de Poisson de paramètre θ inconnu, $\theta \in [0, \infty[$.

1) On cherche à estimer θ.
a) L'estimateur $\overline{X} = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ est-il sans biais? Quel est son risque quadratique?
b) Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ?
2) On cherche maintenant à estimer $e^{-\ell\theta}$, probablité pour que sur ℓ expériences futures, on observe toujours 0.
a) On propose l'estimateur, $e^{-\ell\overline{X}}$? Est-il sans biais? Quel est son risque quadratique?

4 n-échantillon d'une loi uniforme

On observe un n-échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, \ldots, \theta\}$, qui, pour un entier θ, donne le poids $\frac{1}{\theta}$ à chacun des entiers $1, 2, 3, \ldots, \theta$. On cherche à estimer θ. Pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ la probabilité de:

$$\{(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

est donc $\frac{1}{\theta^n}\mathbf{1}_{\{\sup_{1\leq i\leq n} x_i \leq \theta\}}$.
a) Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance M de θ? Quelle est sa loi? Et celle de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ conditionnelle à $\{M = k\}$?
b) On considère l'estimateur $2\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} - 1$ de θ. Est-il sans biais? Quelle est son risque quadratique?

5 n-échantillon d'une loi uniforme

Soit $\mathcal{U}_{a,b}$ une loi uniforme sur $[a, b]$; on observe $(X_1, \ldots, X_n)$, n-échantillon de $\mathcal{U}_{a,b}$ pour estimer la moyenne $\frac{a+b}{2}$ de cette loi.

a) Quelle est l'erreur quadratique $\mathbb{E}\left(\overline{X} - \frac{a+b}{2}\right)^2$ de la moyenne empirique.

b) Soit $T = \frac{1}{2}\left[\sup_{1\leq i\leq n}(X_i) + \inf_{1\leq i\leq n}(X_i)\right]$. Calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{E}\left(T - \frac{a+b}{2}\right)^2$.