# $1^{\text{ere}}$ Année-Diplôme d'ingénieur
# Echantillons-gaussiens

**Exercice 1** *Soit $(X, Y, Z)$ un vecteur gaussien centré de $\mathbb{R}^3$ de matrice de covariance*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Donner la loi de $aX + bY + cZ$.*
2. *Résoudre $\Gamma x = 0,\ x \in \mathbb{R}^3$.*
3. *la loi de $(X, Y, Z)$ admet-elle une densité.*
4. *On pose $U = \frac{1}{\sqrt{3}}X - \sqrt{\frac{2}{3}}Y$ et $V = \frac{1}{\sqrt{3}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z$. Calculer la densité du couple $(U, V)$.*

**Exercice 2** *Soit $X$ une variable normale centrée réduite et $U$ une variable discrète de loi $\mathbb{P}_U(1) = \mathbb{P}_U(-1) = 1/2$ indépendantes. On pose $Y = UX$.*

1. *Quelle est la loi de $Y$ ? Déterminer la matrice de covariance du vecteur $(X, Y)$.*
2. *Calculer $E(X^2Y^2)$. Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes? Commentaires.*

**Exercice 3** *Soit $X$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$ centré ($\mathbb{E}(X) = 0$) et de matrice de covariance $K_X = I_d$.*

1. *Soit $h$ une isométrie linéaire de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $X$ et $h(X)$ ont même loi.*
2. *Si $a$ est un vecteur de norme 1, quelle est la loi de $(\|X\|^2 - < a, X >^2, < a, X >^2)$? (utiliser la première question pour éviter les calculs.)*

**Exercice 4** *Soit $(Z, Y_1, \ldots, Y_d)$ un vecteur gaussien. Montrer que si $\forall 1 \le i \le d$ les variables $Z$ et $Y_i$ sont indṕendantes, alors $Z$ et $(Y_1, \ldots, Y_d)$ sont des variables indépendantes. ( On peut construire trois variables $X$, $W_1$ et $W_2$ t.q. $X$ et $W_1$ sont indépendantes, $X$ et $W_2$ sont indépendantes et $X$ et $(W_1, W_2)$ ne sont pas indépendantes).*

**Exercice 5** *On considère $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un $n$-échantillon d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On cherche à estimer $\theta = (m, \sigma^2)$.*

1. *Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\theta$?*
2. *Vérifier qu'il n'est pas sans biais et donner un estimateur sans biais de $\theta$.*
3. *Donner la loi de cet estimateur.*

**Exercice 6** *Soit $\theta$ un paramètre strictement positif, et $X$ une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\theta, \theta)$ dont on possède un $n-$échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$. On notera $\overline{X}_n$ la moyenne empirique de cet échantillon.*

1. *Calculer $P_\theta(\overline{X}_n < 0)$ pour différentes valeurs de $n \times \theta$. En déduire qu'en règle générale, et sans prendre un trop grand risque, on peut considérer $\overline{X}_n$ positif, ce que nous supposerons dans les questions suivantes.*

2. *Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de $\theta$.*

3. *Etudier sa convergence presque sûre et en probabilité.*

4. *Au vu de la forme de $\widehat{\theta}_n$, le calcul de $E_\theta(\widehat{\theta}_n)$ et $Var_\theta(\widehat{\theta}_n)$ semble difficile. Cette complexité conduit à adopter une procédure d'estimation plus intuitive. Compte tenu de la double interprétation du paramètre $\theta$, déterminer deux estimateurs sans biais de $\theta$ par la méthode des moments appliquée à $E_\theta(X)$ et $Var_\theta(X)$.*

5. *Comparer au sens du risque quadratique les deux estimateurs $\overline{X}_n$ et $S_n^2$ de $\theta$, où $S_n^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2$.*

6. *On considère la classe des estimateurs $T(\lambda)$ de la forme :*

$$T(\lambda) = \lambda \overline{X}_n + (1-\lambda) S_n^2, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

   *Montrer que, $\forall \lambda \in [0; 1]$, $T(\lambda)$ est un estimateur sans biais et fortement consistant de $\theta$.*

7. *Calculer le risque quadratique $R_\lambda(\theta)$ de l'estimateur $T(\lambda)$. Vérifier qu'il existe un unique réel $\lambda^*$ appartenant à $[0; 1]$ tel que*

$$R_{\lambda^*}(\theta) \leq R_\lambda(\theta),\ \forall \theta > 0,\ \forall \lambda \in [0; 1].$$

   *On vérifiera que*

$$R_{\lambda^*}(\theta) = \frac{\lambda^* \theta}{n}.$$

   *Comment estimeriez-vous $\lambda^*$ ? Comment procéder pour obtenir une valeur numérique de $T(\lambda^*)$.*

8. *Etudier les convergences en loi de $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta)$ et de $\sqrt{n}(S_n^2 - \theta)$ quand $n \to +\infty$.*

9. *Etudier la convergence en loi de $\sqrt{n}(T(\lambda) - \theta)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.*

10. *A partir de $T(\lambda)$, construire un intervalle de confiance asymptotique de $\theta$ au seuil de confiance de 95%. Donner les réalisations d'un tel intervalle pour $\lambda = 0.9$. On donne $n = 100$, $\overline{x}_n = 4.18$ et $s_n'^2 = 3.84$.*