MACS3, Master Mathématiques et Informatiques, Université Paris13
Calcul stochastique et applications à la finance (2011-2012)

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 *Montrer que si* $X \in L^2$ *et* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = Y$ *et* $\mathbb{E}(X^2|\mathcal{G}) = Y^2$ *alors* $X = Y$.

Exercice 2 *Soit* X, Y *deux variables aléatoires telles que la v.a.* $X - Y$ *est indépendante de* $\mathcal{G}$ *d'espérance* m *et de variance* σ^2. *On suppose que* Y *est* $\mathcal{G}$*-mesurable.*

1. *Calculer* $\mathbb{E}(X - Y|\mathcal{G})$ *et en déduire* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.
2. *Calculer* $\mathbb{E}((X - Y)^2|\mathcal{G})$ *et en déduire* $\mathbb{E}(X^2|\mathcal{G})$.

Exercice 3 *Soit* $X = X_1 + X_2$. *On suppose que* X_1 *est indépendante de* $\mathcal{G}$, *que* X_2 *est* $\mathcal{G}$*-mesurable et que* X_1 *est gaussienne.*

1. *Calculer* $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ *et* $Var(X|\mathcal{G})$.
2. *Calculer* $\mathbb{E}(e^{\lambda X}|\mathcal{G})$.

Exercice 4 *Montrer que si* $\mathcal{G}$ *est indépendante de* $\sigma(X) \vee \mathcal{F}$ *alors* $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G} \vee \mathcal{F})$. $\sigma(X) \vee \mathcal{F}$ *est la tribu engendrée par* $\sigma(X) \cup \mathcal{F}$.

Exercice 5 *Soit* $X = (X_1, X_2)$ *un vecteur gaussien tel que* $Var(X_1) = \sigma_1^2$, $Var(X_2) = \sigma_2^2$, $Cov(X_1, X_2) = \sigma_{12}, \mu_i = \mathbb{E}(X_i), i = 1, 2$. *Supposons* $\sigma_1, \sigma_2 > 0$.

1. *Soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Calculer la loi de* $\alpha X_1 + \beta X_2$.
2. *Déduire la fonction caractéristique de* X.
3. *On peut vérifier que la loi de* X *est donnée au moyen de la densité (exprimée à l'aide d'écriture matricielle)*
$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{\det\Gamma}} \exp\{-\frac{1}{2}(\Gamma^{-1}(x - \mu) \cdot (x - \mu)\},$$
où $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $\Gamma = \Gamma(X)$, *si* Γ *est inversible.*
Vérifier ceci si $\sigma_{12} = 0, \mu = 0$
4. *Calculer* $\mathbb{E}(X_i|X_1)$, $i = 1, 2$.

Exercice 6 *Soient* X, Y *deux v.a. gaussiennes indépendantes suivant une loi* $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. *Calculer* $\mathbb{E}(exp(X + Y)|Y)$.
2. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *une fonction borélienne. Déterminer une expression pour* $\mathbb{E}(f(X^2 + Y^2)|Y)$ *en fonction de la densité* p *de la loi* $\mathcal{N}(0, 1)$, *de* y *et de* f.

Justifier les réponses.

Exercice 7 *Soit* $(X_n, n \geq 1)$ *une suite de v.a. gaussiennes qui converge dans* L^2 *vers* X. *Quelle est la loi de* X.