MACS3, Master Mathématiques et Informatiques, Université Paris13
Calcul stochastique et applications à la finance (2011-2012)

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 *Démontrer que, si τ est un temps d'arrêt :*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F},\ \textit{pour tout } t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

définit une tribu et τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

Exercice 2 *Démontrer que si $\mathcal{S}$ est un temps d'arrêt déterministe s alors $\mathcal{F}_\mathcal{S} = \mathcal{F}_s$.*

Exercice 3 *Soit $\mathcal{S}$ et τ deux temps d'arrêt, tels que $\mathcal{S} \leq \tau$. Démontrer que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_\tau$.*

Exercice 4 *Soient T, λ des réels positifs et $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue. On suppose que $\mathbb{E}(M_T^2)$ est fini. Posons $M_t^* = \sup_{0\leq s\leq t} |M_s|$.*

1. *Démontrer que $(|M_t|)_{0\leq t\leq T}$ une sous-martingale.*
2. *Montrer que*
$$\lambda \mathbb{P}\{M_T^* \geq \lambda\} \leq \mathbb{E}\left(|M_T|\, \mathbf{1}_{\{M_T^* \geq \lambda\}}\right)$$
(Utiliser le théorème d'arrêt pour la sous-martingale $|M_t|$ entre $\tau \wedge T$ où $\tau = \inf\{t \leq T, |M_t| \geq \lambda\}$ (si cet ensemble est non vide, $+\infty$ sinon) et T).
3. *Déduire du résultat précédent que, si A est positif :*
$$\mathbb{E}\left((M_T^* \wedge A)^2\right) \leq 2\mathbb{E}\left((M_T^* \wedge A)|M_T|\right).$$
4. *Démontrer que, $\mathbb{E}({M_T^*}^2)$ est fini et que*
$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|^2\right) \leq 4\mathbb{E}(|M_T|^2).$$

Exercice 5 *Soient $\mathcal{S}$ et τ des temps d'arrêt par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$ et M_t une martingale continue.*

1. *Démontrer que si $\mathcal{S}$ et τ sont deux $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt alors $\mathcal{S} \wedge \tau = \inf(\mathcal{S}, \tau)$ et $\mathcal{S} \vee \tau = \sup(\mathcal{S}, \tau)$ sont des $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt.*
2. *Supposons $\mathcal{S}$ temps d'arrêt borné. En utilisant le temps d'arrêt $\mathcal{S} \vee s$ et le théorème d'arrêt démontrer que :*
$$\mathbb{E}\left(M_\mathcal{S} \mathbf{1}_{\{\mathcal{S}>s\}} | \mathcal{F}_s\right) = M_s \mathbf{1}_{\{\mathcal{S}>s\}}.$$
3. *En déduire que, si $s < t$:*
$$\mathbb{E}\left(M_{\mathcal{S}\wedge t} \mathbf{1}_{\{\mathcal{S}>s\}} | \mathcal{F}_s\right) = M_s \mathbf{1}_{\{\mathcal{S}>s\}}.$$
4. *En utilisant le fait que $M_{S\wedge s}$ est $\mathcal{F}_s$ mesurable, montrer que $t \to M_{S\wedge t}$ est une $\mathcal{F}_t$ martingale.*