MACS3, Master Mathématiques et Informatique, Université Paris13
2012-2013

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 *Soit Γ le processus solution de $d\Gamma_t = \Gamma_t(\beta_t dt + \gamma_t dW_t)$, $\Gamma_0 = 1$ où β et γ sont des processus adaptés. On suppose que β est borné et que γ est minoré et majoré par des constantes strictement positives.*

1. *Montrer que $\Gamma_t \exp\left(-\int_0^t \beta_s\, ds\right)$ est une martingale.*
2. *Trouver une probabilité Q telle que Γ_t soit une Q-martingale.*
3. *Calculer $d\Gamma^{-1}$. Trouver une probabilité R telle que Γ_t^{-1} soit une R-martingale.*

Exercice 2 *En appliquant le théorème de Girsanov, calculer $\mathbb{E}\left[W_t \exp\left(\int_0^T \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right)\right]$ pour $t < T$ et θ une fonction déterministe.*

Exercice 3 *Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$. On suppose que $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ équivalentes.*

1. *Montrer qu'il existe $(L_t, t \geq 0)$ une $\mathbb{P}$-martingale strictement positive telle que $dQ_{|\mathcal{F}_t} = L_t dP_{|\mathcal{F}_t}$ et vérifiant $\mathbb{E}(L_t) = 1$.*
2. *Montrer qu'il y a équivalence entre M est une $\mathbb{Q}$-martingle (locale) et LM est une $\mathbb{P}$-martingale (locale).*

Exercice 4 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filration naturelle. Soit M et N deux $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ martingales de carré intégrables.*

1. *Appliquer le théorème de représentation des martingales browniennes à M et N.*
2. *On pose $L = \exp(M - \frac{1}{2} < M >)$, quelles doivent être les propriétés du processus L pour que la formule $dQ_{|\mathcal{F}_t} = L_t dP_{|\mathcal{F}_t}$ définisse une probabilité Q.*
3. *Montrer que $N - < N, M >$ est une Q-martingale locale.*