MACS3, Master Mathématiques et Informatiques, Université Paris13
2012-2013

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 *Modèle de votalité dépendant du temps On généralise le modèle de Black-Scholes en supposant que le cours de l'actif S_t l'actif à risque vérifie :*

$$\forall t \leq T \quad dS_t = S_t \left(\mu dt + \sigma(t) dW_t\right), \quad S_0 \in \mathbb{R}_+,$$

où $\sigma : [0,T] \to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction continue.

1. *Montrer que le processus S est bien défini et que*

$$\forall t \leq T \quad S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \sigma(s) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s) ds + \mu t\right).$$

2. *En utilisant le théorème de Girsanov, montrer qu'il existe une probabilitè $\mathbb{P}^* \simeq \mathbb{P}$ telle que le cours actualisé soit une $\mathbb{P}*$ martingale.*
3. *Montrer que $Log S_t$ suit pour tout $t \leq T$ une loi gaussienne que l'on précisera.*

Exercice 2 *On reprend le modèle de Black-Scholes, en supposant que les prix des actifs vérifient les équations suivantes, avec les notations du cours :*

$$\begin{cases} dS_t^0 = r(t)\, S_t^0\, dt, & S_0^0 = 1. \\ dS_t = S_t \left(\mu(t)\, dt + \sigma(t)\, dW_t\right) \end{cases}$$

où $r(t)$, $\mu(t)$, $\sigma(t)$ sont des fonctions déterministes du temps, continues sur $[0,T]$. On suppose, de plus, $\inf_{t\in[0,T]} \sigma(t) > 0$.

1. *Montrer que :*

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s) ds\right).$$

2. *Donner la loi de $\int_0^t \sigma(s) dW_s, \quad t \geq 0$.*
3. *Montrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$, sous laquelle le prix actualisé de l'action est une martingale et donner sa densité par rapport à $\mathbb{P}$. Nous rappelons que $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0}$.*
4. *Dans la suite, on se propose d'évaluer et de couvrir un call d'échéance T et de prix d'exercice K sur une action.*
   Soit (H_t^0, H_t) une stratégie de gestion de portefeuille de valeur V_t à l'instant t telle que $\int_0^T H_t^0 dt + \int_0^T H_t^2 dt < \infty, \quad \mathbb{P} p.s.$ Posons $\tilde{V}_t = V_t / S_t^0$. Nous disons que la stratégie est autofinancée si $V_t = V_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u$

(a) *Montrer que la stratégie* (H_t^0, H_t) *est autofinancée si*

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u.$$

La réciproque peut se prouver de manière analogue.

(b) *Vérifier que* $\int_t^T \sigma(s)dB_s$ *et* $B_r, r \leq t$ *sont indépendants sous* $\mathbb{P}^*$ *et par conséquent* $\int_t^T \sigma(s)dB_s$ *indépendante de* $\mathcal{F}_t$ *où* B *est un mouvement brownien sous* $\mathbb{P}^*$.

(c) *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *borélienne à croissance au plus linéaire. Posons*

$$C_t = \mathbb{E}^* \left(f(S_T)e^{-\int_t^T r(s)ds} | \mathcal{F}_t \right)$$

et $(\tilde{C}_t) = \frac{C_t}{S_t^0}$. *Vérifier que* $(\tilde{C}_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale de carré intégrable non-négative.*

(d) *Vérifier que*

$$\forall t \in [0, T] \qquad C_t = F(t, S_t)$$

où F *est la fonction définie par :*

$$F(t, x) = \mathbb{E}^* \Big(x \exp(\int_t^T \sigma(s)dB_s - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2(s)ds) - Ke^{-\int_t^T r(s)ds} \Big)_+.$$

(e) *Vérifier qu'il existe une stratégie autofinancée* $\phi = (H_t^0, H_t)$ *telle que* $C_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ *(donc* $C_t = V_t(\phi)$*), simulant* $f(S_T)$.

(f) *Déduire le "pricing" de l'option* $h = f(S_T)$ *et faire le lien avec la formule classique de Black-Scholes.*

(g) *Construire une stratégie de couverture du call (expliciter* H_t^0 *et* H_t *et vérifier la condition d'autofinancement).*