Master Math-Info 1 ère année, Université Paris13
Processus stochastiques à temps discret (2009-2010)

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 *Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ, $\lambda > 0$: $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Soit Y une autre variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre μ. On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.*

1. *Calculer la loi de $Z = X + Y$.*
2. *Calculer la loi de $\mathcal{L}(X|Z)$.*
3. *Donner $\mathbb{E}(X|Z)$ et $Var(X|Z)$.*

Exercice 2 *Soit $\rho \in]-1,1[$. On considère un couple gaussien de variables aléatoires (X,Y) de densité :*

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x2 - 2\rho xy + y2)\right).$$

1. *Montrer que la loi conditionnelle de X sachant Y est une loi gaussienne $\mathcal{N}\left(\rho Y, 1-\rho^2\right)$.*
2. *En déduire $\mathbb{E}(X|Y)$ et $\mathbb{E}(X2|Y)$.*
3. *Conclure.*

Exercice 3 *Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi $\mathcal{B}(1,p)$ i.e. de Bernoulli de paramètre p. On pose $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=0\}}$ et $\mathcal{G} = \sigma(Z)$. Calculer $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ et $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$. S'agit-il encore de v.a. indépendantes?*

Exercice 4 *Soient X une v.a. réelle de carré intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Montrer que*

$$Var(X) = \mathbb{E}(Var(X|\mathcal{G})) + Var(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})).$$

Exercice 5 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Pour $A \in \mathcal{F}$, on considère l'événement $B = \{\mathbb{E}(1_A|\mathcal{G}) = 0\}$. Montrer que $B \subset A^c$, à un ensemble négligeable près.*

Exercice 6 *Soient X, Y, Z des v.a. à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, telles que les couples (X,Z) et (Y,Z) aient même loi, (en particulier X et Y ont même loi μ).*

1. *Montrer que, si f est une fonction réelle positive (resp. telle que $f(X)$ soit intégrable), on a*

$$\mathbb{E}(f(X)|Z) = \mathbb{E}(f(Y)|Z), \quad p.s.$$

2. *Soient g une application mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $\mathbb{R}$ positive (resp. telle que $g(Z)$ soit intégrable), $h_1(X) = \mathbb{E}(g(Z)|X)$, $h_2(Y) = \mathbb{E}(g(Z)|Y)$. Montrer que $h_1 = h_2$ μ-p.p.*

3. *Soient $T_1, \ldots, T_n$ des v.a. réelles, intégrables, indépendantes et de même loi. On pose $T = T_1 + \cdots + T_n$.*

4. *Montrer que $\mathbb{E}(T_1|T) = T/n$.*

5. *Que vaut $\mathbb{E}(T|T_1)$?*

Exercice 7 *Soient $T_1, T_2, \ldots$ des v.a. indpendantes de loi exponentielle de paramètre λ. On pose $T = T_1 + \cdots + T_n$.*

1. *Déterminer la loi conditionnelle de T_1 sachant T puis calculer $\mathbb{E}(T_1|T)$.*

2. *Calculer $\mathbb{E}(T_1 2|T)$ et $\mathbb{E}(T_1 T_2|T)$.*