SURCONVERGENCE DE LA MONODROMIE p-ADIQUE DES FAMILLES UNIVERSELLES DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES ORDINAIRES

OLIVIER BRINON AND ABDELLAH MOKRANE

Version du 19 juillet 2017.

Table des matières

1. Introduction

Soient p un nombre premier, $N \geq 1$ un entier premier à p, $Y_0(N)$ la courbe modulaire affine lisse sur $\mathbf{Z}_p$ espace de modules de courbes elliptiques avec structure de niveau de type $\Gamma_0(N)$. Soit $\mathcal{Q}$ le schéma formel affine sur $\mathbf{Z}_p$ qui ind-représente les familles de courbes elliptiques sur des bases artiniennes à fibres géométriques ordinaires. Notons $Q = \mathcal{Q}^{\mathrm{rig}}$ sa fibre générique au sens de Raynaud : c'est un ouvert de $Y_0(N)^{\mathrm{an}}$, l'espace analytique rigide sur $\mathbf{Q}_p$ associé à la fibre générique de $Y_0(N)$. La représentation de monodromie donnée par le quotient étale du groupe de Barsotti-Tate de la courbe elliptique universelle ordinaire sur $\mathcal{Q}$, induit par passage à la fibre générique une $\mathbf{Z}_p$-représentation de rang 1

$$\rho\colon \pi_1(Q, \overline{x}) \to \mathbf{Z}_p^\times$$

du groupe fondamental algébrique $\pi_1(Q, \overline{x})$ de Q et où $\overline{x}$ est un point géométrique de Q fixé. D'après Igusa, la représentation de monodromie ρ est surjective. On dit que la représentation ρ est *surconvergente* si elle se prolonge à des couronnes d'épaisseur non nulle des disques supersinguliers ou plus précisément s'il existe un voisinage strict (voir définition 2.8) V de Q dans $Y_0(N)^{\mathrm{an}}$ tel que ρ se relève à $\pi_1(V, \overline{x})$. On se propose de montrer que

Théorème 1.1. *Si $p > 3$, la représentation de monodromie ρ est surconvergente.*

Dans ce travail on traitera le cas général de l'espace de module $\mathcal{A}_{g,N}$ de variétés abéliennes de dimension g principalement polarisées avec structure de niveau N, $N \geq 3$.

La preuve du théorème 1.1 utilise la ré-interprétation de ρ comme solution de l'équation différentielle de Gauss-Manin. On dispose sur $\mathcal{Q}$ d'un relèvement canonique $\varphi_{\mathcal{Q}}\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ du Frobenius de $\mathcal{Q} \otimes \mathbf{F}_p$ et donc de la notion de F-cristal sur $\mathcal{Q}$ au sens de Dwork (*cf* [28]). Soit $\mathcal{E}$ la courbe elliptique universelle sur $Y_0(N)$, la cohomologie de de Rham relative $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{E}/Y_0(N))$ fournit un F-cristal $\mathcal{F}$ de rang 2 sur $\mathcal{Q}$. D'après Dwork, il existe un sous-F-cristal unité $\mathcal{U}$ de rang 1 dans $\mathcal{F}$ et suivant Katz, les sections horizontales de $\mathcal{U}$ fournissent une $\mathbf{Z}_p$-représentation de rang 1 du

Avec le soutien du projet ANR Blanc ArShiFo ANR-10-BLAN-0114

groupe fondamental algébrique $\pi_1(Q,\overline{x})$ et qui n'est autre que la représentation de monodromie ρ. Notons qu'*a contrario* le F-cristal unité $\mathcal{U}$ ne surconverge pas (plus précisément la connexion ne surconverge pas, contrairement au Frobenius, *cf* [14] et [15]) ce qui se réincarne encore par le fait que le relèvement de ρ à $\pi_1(V,\overline{x})$ ne se prolonge pas en une représentation du groupe fondamental d'un modèle formel de V, ou que le groupe de Barsotti-Tate $\mathrm{T}_p(\mathcal{E})^{\text{ét}}$ ne se prolonge pas en un groupe de Barsotti-Tate sur un modèle formel de V. On dispose par contre d'une notion plus faible de surconvergence fournie par la théorie du sous-groupe canonique de Lubin et Katz (*cf* [27]).
Le premier ingrédient clé de la preuve est la surconvergence du Frobenius du cristal unité de Dwork, on utilise pour cela l'existence du relèvement excellent de Dwork (*cf* [27] pour le cas elliptique, [2, 17] pour le cas général). Le second ingrédient est le développement d'une théorie des périodes p-adiques relative et entière *ad hoc*. Il s'agit d'une variante « non géométrique » et sur des bases normales non lisses (ni semi-stables) de la théorie des périodes p-adiques relative de Faltings adaptée à notre contexte. On prouve en particulier que pour un choix adéquat du voisinage strict V de l'ouvert d'ordinarité de $\mathcal{A}_{g,N}^{\mathrm{an}}$, le faisceau étale associé au prolongement de $\mathcal{U}$ à V est lisse de rang le rang de $\mathcal{U}$ sur Q. La démonstration suit de près la preuve du théorème de comparaison entre cohomologie étale p-adique et cohomologie cristalline utilisant le complexe syntomique (*cf* [25]).

Le théorème 1.1 a un intérêt intrinsèque dans le triptyque groupes de Barsotti-Tate/cristaux/représentations p-adiques. Il complète le théorème de Dwork sur la surconvergence du Frobenius du cristal unité de la famille de Legendre et les résultats de Lubin et Katz sur le sous-groupe canonique. Mais c'est surtout en vue de développer la théorie des formes modulaires p-adiques surconvergentes pour les variétés modulaires de Siegel dans l'esprit de [27], qu'on a été conduits à traiter cette question et chemin faisant à considérer des F-cristaux unités ayant une propriété de surconvergence. Les résultats clés de ce travail seront utilisés dans [12] pour la construction de familles de formes modulaires de Siegel surconvergentes prolongeant ainsi le cas elliptique étudié par Coleman (*cf* [13]) mais aussi la théorie des formes p-adiques ordinaires de Siegel développée par Hida (*cf* [22]).

Les auteurs remercient J. Tilouine pour son soutien constant durant l'élaboration de ce travail, V. Pilloni qui leur a permis de préciser la notion de relèvement surconvergent de Frobenius et Y. Tian qui leur a signalé la référence [33]. Ils sont reconnaissants envers M. Kisin, P. Scholze, B. Stroh et le rapporteur anonyme pour leur avoir signalé des erreurs dans une première version de ce texte, et envers A. Abbes, C. Breuil, L. Fargues et A. Genestier pour d'utiles discussions.

Le premier auteur a en outre bénéficié de l'hospitalité de la Graduate School of Mathematical Sciences de l'Université de Tokyo, où il a eu l'opportunité de présenter le contenu de ce travail dans un cours : il remercie chaleureusement les auditeurs pour leurs remarques, et particulièrement T. Saito, à l'origine de cette invitation.

2. Notations et rappels

2.1. Soient k un corps parfait de caractéristique positive $p>0$ et $W=\mathrm{W}(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt (de longueur infinie) à coefficients dans k. Pour tout entier naturel non nul n, $W_n=W/p^nW$ est l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n. On note K le corps des fractions de W et σ l'automorphisme de Frobenius agissant sur k,W,W_n,K. On fixe $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et on note $\overline{W}$ la normalisation de W dans $\overline{K}$. Si $w\in\mathbf{Q}$, p^w désigne un élément de $\overline{K}$ de valuation w. Si $w\in\mathbf{Q}\cap]0,1]$ et $\mathcal{X}$ est un schéma formel sur $W[p^w]$, on note $\mathcal{X}_w$ le schéma $\mathcal{X}\otimes_{W[p^w]}k$.

Notation 2.2. (1) Si A est un anneau de caractéristique p, on note σ_A le morphisme de Frobenius sur A.
(2) Si S est une W-algèbre, on pose $S_K=S[p^{-1}]$.

Notation 2.3. (1) Si J est un groupe profini et $n\in\mathsf{N}_{>0}$, on note $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}}(J)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Z}_p}(J)$) la catégorie des $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$-modules (resp. $\mathbf{Z}_p$-modules) libres de rang fini, munis d'une action linéaire et continue de J.

(2) Si $\mathcal{X}$ est un schéma formel p-adique, on note $\mathbf{BT}(\mathcal{X})$ la catégorie des groupes p-divisibles sur $\mathcal{X}$, dont les objets sont les systèmes projectifs $(G_n)_{n\in\mathbf{N}_{>0}}$, où G_n est un groupe p-divisible sur $\mathcal{X}\otimes_W W_n$ pour tout $n\in\mathbf{N}_{>0}$. On note $\mathbf{BT}^{\text{ét}}(\mathcal{X})$ la sous-catégorie pleine constituée des groupes p-divisibles étales sur $\mathcal{X}$.

2.4. Rappelons qu'une W-algèbre *admissible* est une W-algèbre plate, séparée complète pour la topologie p-adique, topologiquement de type fini au sens de [10]. On note $\mathscr{C}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des W-algèbres admissibles qui sont noethériennes, intègres et normales.

Pour toute W-algèbre admissible R, on note $X_R=\mathsf{Spm}(R_K)$ le spectre maximal de R_K muni de sa structure d'espace rigide. Rappelons que si A est une K-algèbre affinoïde, on dispose de la norme $|.|_{\sup}$ sur A définie par $|f|_{\sup}=\sup\limits_{x\in\mathsf{Spm}(A)}|f(x)|$. On pose alors $A^\circ=\{f\in A,\ |f|_{\sup}\leq 1\}$. D'après [24, Proposition 3.3], A° est une W-algèbre admissible, qui fournit un modèle formel de A.

Lemme 2.5. *Soit R une W-algèbre admissible et normale. Alors $R=(R_K)^\circ$.*

Démonstration. D'après le théorème de normalisation de Noether, il existe un morphisme injectif et fini de k-algèbres $\overline{\psi}\colon k[X_1,\dots,X_d]\to R_k:=R\otimes_W k$. Soient $f_1,\dots,f_d\in R$ tels que $\overline{\psi}(X_i)=\overline{f}_i\in R_k$. On relève $\overline{\psi}$ en $\psi\colon W\{X_1,\dots,X_d\}\to R$ en posant $\psi(X_i)=f_i$. D'après [9, 6.4, Theorem 1], la finitude de $\overline{\psi}$ implique celle de ψ.

Si $f\in R_K$, alors f est entier sur $W\{X_1,\dots,X_d\}_K$: soit $f^N+a_1f^{n-1}+\cdots+a_N=0$, avec $a_i\in W\{X_1,\dots,X_d\}_K$ pour tout $i\in\{1,\dots,N\}$, une relation de dépendance intégrale. On a alors $|f|_{\sup}=\max\limits_{1\leq i\leq N}|a_i|_{\sup}^{1/i}$ en vertu de [9, 6.2.2, Proposition 2]. Il en résulte que $f\in(R_K)^\circ$ si et seulement si $|a_i|_{\sup}\leq 1$ et donc $a_i\in W\{X_1,\dots,X_d\}$ (*cf* [9, 5.1.4, Corollary 6]) pour tout $i\in\{1,\dots,N\}$. Ainsi, $(R_K)^\circ$ est la clôture intégrale de $W\{X_1,\dots,X_d\}$ dans R_K : c'est donc R vu que ce dernier est normal. □

Lemme 2.6. *Si R est une W-algèbre admissible, alors R est excellent, donc (universellement) japonais.*

Démonstration. D'après [36, Theorem 9], l'anneau $W\{T_1,\dots,T_d\}$ est excellent. Il existe un morphisme surjectif $f\colon W\{T_1,\dots,T_d\}\to R$: l'anneau R est donc de type fini comme $W\{T_1,\dots,T_d\}$-algèbre, ce qui implique que R est excellent (*cf* [19, Scholie 7.8.3 (ii)]), donc universellement japonais (*cf* [19, Scholie 7.8.3 (vi)]). □

Soient L une extension finie de K, $x\in X_R(L)$ et $\tau_x\colon\mathsf{Spf}(\mathcal{O}_L)\to\mathsf{Spf}(R)$ le morphisme qui lui est associé par adhérence schématique et normalisation (appelé dans la suite prolongement de x). Posons $\mathcal{X}=\mathsf{Spf}(R)$, on note $\mathfrak{p}_{\mathcal{X},x}$ l'idéal premier de R défini par τ_x. On désigne par $\overline{\tau}_x\colon\mathsf{Spec}(\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L)\to\mathsf{Spec}(R/pR)$ la réduction de τ_x modulo p.

Un schéma formel admissible sur W est un schéma formel séparé quasi-compact sur W localement spectre formel d'une W-algèbre admissible.

On dispose de la notion d'éclatement admissible dans la catégorie des schémas formels admissibles sur W, voir [10]. D'après Raynaud [10], à tout schéma formel de type fini $\mathcal{X}$ sur W, on associe un K-espace rigide $\mathcal{X}^{\text{rig}}$ par passage à la fibre générique. On dispose d'une équivalence de catégories entre la catégorie des schémas formels admissibles sur W, localisée en les morphismes qui sont des éclatements admissibles et la catégorie des espaces analytiques rigides quasi-compacts sur K.

2.7. Suivant Berthelot [6], pour tout schéma formel $\mathcal{X}$ sur W de fibre générique X, on dispose d'une application continue $\mathrm{sp}\colon\mathcal{X}\to X$ appelée spécialisation. Si $X_0=\mathcal{X}\otimes_R k$ désigne la fibre spéciale, on notera aussi $\mathrm{sp}\colon X\to X_0$ l'application induite par sp par passage à la fibre spéciale.

Pour Z un sous-schéma de X_0, on pose $]Z[_X=\mathrm{sp}^{-1}(Z)$, c'est un ouvert de X appelé tube de Z dans X. Si Z est fermé et si localement, il est défini par les équations $\overline{f}_1=\cdots=\overline{f}_r=0$ où $f_1,\dots,f_r\in\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ relèvent $\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_r$, alors

$$]Z[_X=\big\{x\in X/\,(\forall i\in\{1,\dots,r\})\,|f_i(x)|<1\big\}$$

de plus dans cette situation, on définit pour tout $\eta \in]|\pi|, 1]$, le tube ouvert de Z de rayon η par

$$]Z[_{X,\eta} = \left\{x \in X / \, (\forall i \in \{1, \dots, r\}) \, |f_i(x)| < \eta\right\}$$

$]Z[_{X,\eta}$ ne dépend pas des f_i et la construction est donc globale (*cf* [6, 1.1.8]). On note Y l'ouvert complémentaire de Z et on pose $U_\eta = X -]Z[_{X,\eta}$, on a une double inclusion d'ouverts : $]Y[_X \subset U_\eta \subset X$.

Définition 2.8. Un voisinage strict du tube $]Y[_X$ est un voisinage V tel qu'il existe $\eta < 1$ vérifiant

$$]Y[_X \subset U_\eta \subset V$$

2.9. Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel p-adique plat sur $\mathsf{Spf}(W)$, dont la fibre spéciale $\mathcal{X}_k$ est normale, réduite, irréductible et quasi-compacte. Supposons en outre $\mathcal{X}$ muni d'un endomorphisme φ induisant le morphisme de Frobenius sur la fibre spéciale. Notons $\mathbf{Cris}^{\text{ét}}(\mathcal{X}_k)$ la catégorie des cristaux étales sur $\mathcal{X}_k$. Elle est équivalente à celle des faisceaux localement libres de rang fini $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{X}$ munis d'un isomorphisme $F\colon \varphi^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$. D'après [27, Proposition 4.1.1], par passage à la limite, on a une équivalence de catégories

$$\mathrm{K}\colon \mathbf{Cris}^{\text{ét}}(\mathcal{X}_k) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Rep}_{\mathbf{Z}_p}\big(\pi_1(\mathcal{X}_k, x)\big)$$

où x est un point géométrique de $\mathcal{X}_k$.

Le module de Tate fournit une équivalence de catégories

$$\mathrm{T}\colon \mathbf{BT}^{\text{ét}}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Rep}_{\mathbf{Z}_p}\big(\pi_1(\mathcal{X}_k, x)\big)$$

Par ailleurs, le foncteur de Dieudonné induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{D}\colon \mathbf{BT}^{\text{ét}}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\approx} \mathbf{Cris}^{\text{ét}}(\mathcal{X}_k)$$

Proposition 2.10. *Le carré*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{BT}^{\text{ét}}(\mathcal{X}) \arrow[r, "\mathrm{T}"] \arrow[d, "\mathrm{D}"'] & \mathbf{Rep}_{\mathbf{Z}_p}\big(\pi_1(\mathcal{X}_k, x)\big) \arrow[d, "T \mapsto T^\vee"] \\
\mathbf{Cris}^{\text{ét}}(\mathcal{X}_k) \arrow[r, "\mathrm{K}"'] & \mathbf{Rep}_{\mathbf{Z}_p}\big(\pi_1(\mathcal{X}_k, x)\big)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. La réduction modulo p induit une équivalence $\mathbf{BT}^{\text{ét}}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\approx} \mathbf{BT}^{\text{ét}}(\mathcal{X}_k)$. Soit $G \in \mathbf{BT}^{\text{ét}}(\mathcal{X}_k)$. Si $f \in \mathrm{T}(G) = \mathsf{Hom}_{\mathbf{BT}(\mathcal{X}_k)}(\mathbf{Q}_p / \mathbf{Z}_p, G)$, on dispose de $\mathrm{D}(f)\colon \mathrm{D}(G) \to \mathrm{D}(\mathbf{Q}_p / \mathbf{Z}_p) = \mathcal{O}_\mathcal{X}$, et donc d'un accouplement $\mathrm{T}(G) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{D}(G) \to \mathcal{O}_\mathcal{X}$, et donc d'un morphisme $\lambda\colon \mathrm{D}(G) \to \mathcal{O}_\mathcal{X} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{T}(G)^\vee$ dans $\mathbf{Cris}^{\text{ét}}(\mathcal{X}_k)$. Comme $\mathrm{K}\big(\mathcal{O}_\mathcal{X} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{T}(G)^\vee\big) = \mathrm{T}(G)^\vee$, il s'agit de voir que λ est un isomorphisme. Cela se vérifie modulo p. La question est locale sur $\mathcal{X}_k$: on peut supposer $\mathcal{X}_k = \mathsf{Spec}(R)$ où R est une k-algèbre intègre et normale. Notons R^{nr} la réunion des sous-R-algèbres finies étales de $k(x)$ (on a $\pi_1(\mathcal{X}_k, x) = \mathsf{Gal}(R^{\mathrm{nr}}/R)$). Par descente étale, il suffit de vérifier que $\lambda \otimes R^{\mathrm{nr}}$ est un isomorphisme. Comme $G \otimes_R R^{\mathrm{nr}} \simeq (\mathbf{Q}_p / \mathbf{Z}_p)^h_{\mathrm{nr}}$, il suffit de traiter le cas où $G = \mathbf{Q}_p / \mathbf{Z}_p$, pour lequel $\mathrm{D}(G) = \mathcal{O}_\mathcal{X}$ et $T(G) = \mathbf{Z}_p$ sont triviaux. □

3. Cristaux unité surconvergents

3.1. F-modules, hauteur de Hodge. Ce paragraphe est une formalisation de la définition 3.1 et du lemme 3.3 de [4].

Soit $\mathcal{X}$ un W-schéma formel admissible intègre. On pose $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p$.

Définition 3.2. Un *F-module* sur $\mathcal{X}$ est un couple $(\mathcal{M}, F)$ où $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_\mathcal{X}$-module localement libre de rang fini et $F\colon \overline{\mathcal{M}} \to \overline{\mathcal{M}}$ un endomorphisme semi-linéaire :

$$(\forall \lambda \in \overline{\mathcal{O}}_\mathcal{X}) \; (\forall m \in \mathcal{M}) \; F(\lambda m) = \lambda^p F(m).$$

On dispose d'une notion évidente de suite exacte de F-modules.

On note $\det(F)\overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{X}}$ l'idéal de $\overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{X}}$ engendré localement par le déterminant d'une matrice de F, cet idéal ne dépend que de F et pas de la matrice représentant F.

Définition 3.3. On appelle hauteur de Hodge de $(\mathcal{M}, F)$ et on note $H(\mathcal{M})$ le nombre réel

$$\min\left\{\inf\left\{w \in \mathbf{Q},\ p^w \in \det(F)\overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{X}}\right\}, 1\right\}$$

Par définition $H(\mathcal{M}) = 1$ si $\det(F)\overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{X}} = 0$, sinon, on a $H(\mathcal{M}) \in [0, 1[$. Si $H(\mathcal{M}) = 0$, on dira que $(\mathcal{M}, F)$ est *ordinaire*.

Définition 3.4. Soient L une extension finie de K et $x \in \mathcal{X}^{\mathrm{rig}}(L)$, on appelle hauteur de Hodge de $(\mathcal{M}, F)$ en x et on note $H_x(\mathcal{M})$, la hauteur de Hodge de $\overline{\tau}_x^*\mathcal{M}$.

Notons que si la hauteur de Hodge vérifie $H_x(\mathcal{M}) < 1$, alors $H_x(\mathcal{M})$ n'est autre que la valuation p-adique du déterminant de F vu comme élément de L. On retrouve donc la définition de la hauteur de Hodge introduite dans [2].

Lemme 3.5. *Supposons $\mathcal{X}$ normal, alors $H(\mathcal{M}) = \sup_{x \in \mathcal{X}^{\mathrm{rig}}} H_x(\mathcal{M})$ et il existe $x \in \mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$ tel que $H(\mathcal{M}) = H_x(\mathcal{M})$.*

Démonstration. Si $x \in \mathcal{X}$, soit $\tau_x \colon \mathsf{Spf}(\mathcal{O}_L) \to \mathcal{X}$ son prolongement, il est clair que si $p^w \in \det(F)\overline{\mathcal{O}}_{\mathcal{X}}$, alors $p^w \in \det(F)(\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L)$ donc $H(\mathcal{M}) \geq H_x(\mathcal{M})$ d'où

$$H(\mathcal{M}) \geq \sup_{x \in \mathcal{X}^{\mathrm{rig}}} H_x(\mathcal{M})$$

Pour montrer l'inégalité inverse, on peut supposer $\mathcal{X} = \mathsf{Spf}(R)$ affine avec R normal tel que $p^w \in R$, $\mathcal{M}$ libre sur R et fixer $h \in R$ un relèvement du déterminant de F pour une base de $\mathcal{M}$ fixée. Supposons $w \geq H_x(\mathcal{M})$ *i.e.* $|p^w| \leq |h(x)|$ pour tout $x \in \mathsf{Spm}(R_K)$. Cela signifie que $h \in R_K^\times$ et que $p^w h^{-1} \in (R_K)^\circ$. Comme R est normal, on a $p^w h^{-1} \in R$ d'après le lemme 2.5, et donc $H(\mathcal{M}) \leq w$.

La dernière assertion résulte du principe du maximum appliqué à la fonction $x \mapsto h(x)$. □

Corollaire 3.6. $H(\mathcal{M}) \in \mathbf{Q}$.

Lemme 3.7. *Soit $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{M} \to \mathcal{L} \to 0$ une suite exacte de F-modules, alors*

$$H(\mathcal{M}) \leq H(\mathcal{N}) + H(\mathcal{L})$$

$$\textit{et} \quad H(\mathcal{N}) \leq H(\mathcal{M}), \quad H(\mathcal{L}) \leq H(\mathcal{M})$$

Démonstration. Le lemme est une conséquence directe des définitions et de la formule du déterminant pour les matrices par blocs. □

On note $F\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{X})$ la catégorie abélienne des F-modules sur $\mathcal{X}$ et $F\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{X})^w$ la sous-catégorie pleine des F-modules de hauteur de Hodge $\leq w$. Du lemme ci-dessus, on déduit que $F\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{X})^w$ est stable par sous-objet et par quotient.

Lemme 3.8. *(cf* [4, Lemma 3.3] *et* [5, §5.2]*) Supposons $\mathcal{X}$ normal. Soient $(\mathcal{M}, F)$ un F-module sur $\mathcal{X}$ et $w \in \mathbf{Q} \cap [0, 1[$. Il existe un unique schéma formel admissible $\iota_w \colon \mathcal{X}^w \to \mathcal{X}$ tel que*
(1) $\mathcal{X}$ est normal ;
(2) $\iota_w^*\mathcal{M}$ est de hauteur de Hodge $\leq w$;
(2) ι_w est universel pour les propriétés (1) et (2).
De plus $\mathcal{X}^w$ est un ouvert d'un éclatement admissible de $\mathcal{X} \otimes_W W[p^w]$.

Démonstration. D'après (3), la construction se fait localement : supposons $\mathcal{X} = \mathsf{Spf}(R)$ et notons $h \in R$ un relèvement de $\det(F)$. L'idéal $\mathcal{I} = (p^w, h)$ ne dépend pas du relèvement : soit $\widetilde{\mathcal{X}}$ l'éclatement de $\mathcal{X} \otimes_W W[p^w]$ le long de cet idéal. Le schéma formel $\mathcal{X}^w$ est alors le complété formel p-adique du normalisé du plus grand ouvert de $\widetilde{\mathcal{X}}$ sur lequel $\mathcal{I}$ est engendré par h. □

3.8.1. *φ-modules surconvergents.* Soient $\mathcal{X}$ un schéma formel sur W et $\mathcal{Q}$ un ouvert de $\mathcal{X}$ de complémentaire non vide.

Définition 3.9. Un voisinage formel strict de $\mathcal{Q}$ est un ouvert $\mathcal{V}$ d'un éclatement admissible de $\mathcal{X}$ tel que
(1) $\mathcal{Q}$ est disjoint du centre de l'éclatement ;
(2) l'immersion $\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{X}$ se relève en une immersion ouverte $\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{V}$;
(3) l'immersion ouverte $\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{V}$ est stricte en fibre générique.

La définition qui suit est une version raffinée de [2, Définition 7.1].

Définition 3.10. Un relèvement surconvergent du Frobenius absolu $\mathrm{Frob}_{\mathcal{Q}\otimes\mathbf{F}_p}$ de $\mathcal{Q}\otimes\mathbf{F}_p$ est la donnée d'un triplet $(\mathcal{V},\iota,\varphi)$ où $\iota\colon \mathcal{V}\to\mathcal{X}$ est un voisinage formel strict de $\mathcal{Q}$ et $\varphi\colon\mathcal{V}\to\mathcal{X}$ un morphisme tel que $\varphi_{|\mathcal{Q}}\colon\mathcal{Q}\to\mathcal{X}$ se factorise à travers $\varphi_{|\mathcal{Q}}\colon\mathcal{Q}\to\mathcal{Q}$, tels qu'il existe $\mu\in\mathbf{Q}\cap[0,1[$ avec :
(1) $p^\mu\in\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$;
(2) $\varphi\otimes(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}/p^{1-\mu}\mathcal{O}_{\mathcal{V}}) = \big(\iota\otimes(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}/p^{1-\mu}\mathcal{O}_{\mathcal{V}})\big)\circ\mathrm{Frob}_{\mathcal{V}_{1-\mu}}$.

Remarque 3.11. Les applications ensemblistes sous-jacentes à ι et φ sont les mêmes (cela résulte de la définition 3.10 (ii)). En particulier, si $\mathsf{Spf}(R)\subset\mathcal{X}$ et $\mathsf{Spf}(S)\subset\mathcal{V}$ sont des ouverts affines tels que $\iota(\mathsf{Spf}(S))\subset\mathsf{Spf}(R)$, on a aussi $\varphi(\mathsf{Spf}(S))\subset\mathsf{Spf}(R)$.

Définition 3.12. On fixe un relèvement surconvergent $(\mathcal{V},\iota,\varphi)$ du Frobenius absolu $\mathcal{Q}\otimes\mathbf{F}_p$. Un *$\varphi$-module surconvergent* sur $\mathcal{X}$ (le long de $\mathcal{X}\setminus\mathcal{Q}$), est la donnée d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module localement libre $\mathcal{M}$ muni d'un morphisme linéaire
$$\Phi\colon\varphi^*\mathcal{M}\to\iota^*\mathcal{M}$$
tel que $\Phi[1/p]$ soit inversible.

D'après la définition 3.10 (2), le module $\iota^*\mathcal{M}/p^{1-\mu}\iota^*\mathcal{M}$ est muni de l'endomorphisme semi-linéaire induit par $\Phi\otimes(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}/p^{1-\mu}\mathcal{O}_{\mathcal{V}})$.

On appelle hauteur de Hodge du φ-module $\mathcal{M}$ et on note $H(\mathcal{M})$, la hauteur de Hodge de $\big(\iota^*\mathcal{M},\Phi\otimes(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}/p^{1-\mu}\mathcal{O}_{\mathcal{V}})\big)$ (*cf* définition 3.3, en remarquant qu'ici, on a $H(\mathcal{M})\in[0,1-\mu]$).

Remarque 3.13. (1) Par définition, $H(\mathcal{M})$ ne dépend pas du choix du relèvement surconvergent de Frobenius.
(2) Pour la suite, il est utile de noter que $\iota^*\mathcal{M}$ est aussi un φ-module relativement au relèvement $(\mathrm{pr}_1,\mathrm{pr}_2)\colon \mathcal{V}_{\varphi}\underset{\mathcal{X}}{\times}{}_{\iota}\mathcal{V}\rightrightarrows\mathcal{V}$.

Définition 3.14. Un *φ-module filtré surconvergent sur $\mathcal{X}$* (le long de $\mathcal{X}\setminus\mathcal{Q}$) est la donnée d'un triplet $(\mathcal{M},\Phi,\mathrm{Fil}(\iota^*\mathcal{M}))$ où :
(1) $(\mathcal{M},\Phi)$ est un φ-module surconvergent sur $\mathcal{X}$ le long de $\mathcal{X}\setminus\mathcal{Q}$;
(2) $\mathrm{Fil}(\iota^*\mathcal{M})$ est un sous-$\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$-module localement facteur direct de $\iota^*\mathcal{M}$ tel que
$$\Phi\big(\mathrm{Frob}^*_{\mathcal{V}_{1-\mu}}\mathrm{Fil}(\iota^*\mathcal{M})\big)=0$$
dans $\iota^*\mathcal{M}/p^{1-\mu}\iota^*\mathcal{M}$.

Remarque 3.15. Si $\mathcal{M}$ correspond à la cohomologie de de Rham d'une famille de variétés abéliennes sur un voisinage du lieu ordinaire où le sous-groupe canonique existe, alors $\mathcal{M}$ vérifie les conditions (1) et (2) de la définition 3.14 (*cf* section 6).

3.16. F-cristaux surconvergents, théorème principal. On reprend les notations du numéro 3.8.1. On fixe un relèvement surconvergent $(\mathcal{V},\iota,\varphi)$ du Frobenius absolu $\mathcal{Q}\otimes\mathbf{F}_p$ (*cf* définition 3.10).

Définition 3.17. Soit U un ouvert de la fibre spéciale $\mathcal{X}_k$ de $\mathcal{X}$. Un *épaississement formel à puissances divisées* de U est une immersion fermée $U\hookrightarrow\mathcal{Z}$ de W-schémas formels p-adiques, définie par un idéal à puissances divisées (compatibles aux puissances divisées canoniques sur pW).

Rappelons qu'étant donnés un cristal $\mathscr{M}$ sur $\mathcal{X}_k$ et (U, Z) un objet du site cristallin $(\mathcal{X}_k/W)_{\mathrm{cris}}$ (*i.e.* un épaississement à puissances divisées $U \hookrightarrow Z$, où Z est tué par une puissance de p), on peut évaluer $\mathscr{M}$ en (U, Z) (*cf* [7, Definition 6.1]). En passant à la limite, on peut aussi évaluer $\mathscr{M}$ en un épaississement formel à puissances divisées.

Définition 3.18. Un *F-cristal surconvergent* sur $\mathcal{X}$ est la donnée d'un cristal localement libre $\mathscr{M}$ sur $(\mathcal{X}_k/W)_{\mathrm{cris}}$ et d'une isogénie de cristaux $\Phi\colon \varphi^*\mathscr{M} \to \iota^*\mathscr{M}$ sur $\big(\mathcal{V}\otimes_W (W[p^\mu]/p^{1-\mu}W[p^\mu])/W\big)_{\mathrm{cris}}$.

Remarque 3.19. Supposons donnés $\mathcal{Y}$ un schéma formel p-adique formellement lisse sur W, et $\mathcal{X}_k \hookrightarrow \mathcal{Y}$ une immersion fermée de W-schémas formels. Soit $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$ le faisceau sur $\mathcal{X}$, (complété p-adique) de l'enveloppe à puissances divisées (compatibles aux puissances divisées sur pW) de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ relativement à l'idéal définissant $\mathcal{X}_k \hookrightarrow \mathcal{Y}$.

D'après [7, Theorem 6.6], les trois catégories suivantes sont équivalentes :

(i) la catégorie des cristaux sur $(\mathcal{X}_k/W)_{\mathrm{cris}}$;

(ii) la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$-modules munis d'une hyperstratification à puissances divisées formelle (en tant que $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$-module), compatible à l'hyperstratification à puissances divisées canonique sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$;

(iii) la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$-modules munis d'une connexion formelle (en tant que $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$-module) intégrable et quasi-nilpotente, compatible à la connection canonique sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$.

Définition 3.20. Un *F-cristal surconvergent de Hodge* sur $\mathcal{X}$ est la donnée d'un triplet

$$\big(\mathscr{M}, \Phi, \operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathcal{V}}\big)$$

où $(\mathscr{M}, \Phi)$ est un F-cristal surconvergent sur $\mathcal{X}$, et $\operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathcal{V}} \subset \mathscr{M}_{\mathcal{V}} := \iota^*\mathscr{M}_{\mathcal{X}}$ un sous-$\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$-module localement facteur direct, tels que $(\mathscr{M}_{\mathcal{X}}, \Phi, \operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathcal{V}})$ soit un φ-module filtré surconvergent sur $\mathcal{X}$ (*cf* définition 3.14). La hauteur de Hodge $H(\mathscr{M}) \in [0, 1-\mu]$ de $\big(\mathscr{M}, \Phi, \operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathcal{V}}\big)$ désigne alors celle de $(\mathscr{M}_{\mathcal{V}}/\operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathcal{V}}, \Phi\otimes(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}/p^{1-\mu}\mathcal{O}_{\mathcal{V}}))$ (*cf* définition 3.12). Un morphisme de F-cristaux surconvergents de Hodge est un morphisme de cristaux compatible aux Frobenius et aux filtrations.

Remarque 3.21. Si $\mathcal{A} \to \mathcal{X}$ est un schéma abélien, le cristal de Dieudonné du groupe de Barsotti-Tate associé est muni d'une structure de F-cristal surconvergent de Hodge, la filtration étant fournie par la filtration de Hodge de la cohomologie de de Rham (*cf* §6.5).

Soit $(\mathscr{M}, \Phi, \operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathcal{V}})$ un F-cristal surconvergent de Hodge. Zariski-localement sur $\mathcal{V}$, les $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$-modules $\operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathcal{V}}$ et $\mathscr{M}_{\mathcal{V}}/\operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathcal{V}}$ sont libres. Dans une base $\mathfrak{B}$ adaptée, la matrice de Φ est de la forme

$$\operatorname{Mat}_{\mathfrak{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} p^{1-\mu}A & B \\ p^{1-\mu}C & D \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_n(\mathcal{O}_{\mathcal{V}})$$

Définition 3.22. Supposons $\mathcal{X}$ lisse. Le F-cristal surconvergent de Hodge $(\mathscr{M}, \Phi, \operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathcal{V}})$ est dit *isotrivial* si, Zariski-localement sur $\mathcal{V}$, il existe une base adaptée $\mathfrak{B}$ telle que la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathfrak{B}}(\Phi)$ soit à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ et $\det(D)$ soit un produit de coordonnées locales sur $\mathcal{X}$.

Théorème 3.23. *Supposons $p > 3$. Soient $\mathcal{X}$ un schéma formel connexe, quasi-projectif et lisse sur $\mathsf{Spf}(W)$, $\mathcal{Q}$ un ouvert de $\mathcal{X}$ et $\iota, \varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{X}$ un relèvement surconvergent du Frobenius absolu de $\mathcal{Q}\otimes\mathbf{F}_p$ tel que $\mathcal{V}$ soit connexe. On suppose $\mu < \frac{1}{p}$. Soit $(\mathscr{M}, \Phi, \operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathcal{V}})$ un F-cristal surconvergent de Hodge* isotrivial *sur $\mathcal{X}$ tel que*

$$H(\mathscr{M}) < \frac{1}{2}\frac{1-\mu}{pr + \frac{2p-1}{p-1}}$$

(cf définition 3.20), où r est le rang de $\mathscr{M}_{\mathcal{V}}/\operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathcal{V}}$. Alors si V est la fibre générique rigide de $\mathcal{V}_\varphi \times_{\mathcal{X}} {}_\iota\mathcal{V}$ et $\overline{x}$ un point géométrique de V, il existe une représentation

$$\rho_V\colon \pi_1(V, \overline{x}) \to \mathsf{GL}_r(\mathbf{Z}_p)$$

fonctorielle en (ι, φ) et en $(\mathscr{M}, \Phi, \operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathcal{V}})$, et telle que si $\mathcal{V}$ est formellement lisse, $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ est un relèvement de Frobenius, et $H(\mathscr{M}) = 0$, alors $\rho_V(-1)$ est la représentation associée à la partie unité de $\mathscr{M}$ (cf [28, Theorem 4.1]*) par la correspondance de Katz (cf* [27, Proposition 4.1.1] *et §2.9).*

Remarque 3.24. Les auteurs ignorent si la condition d'isotrivialité (intervenant uniquement dans la preuve, technique, du théorème 4.28) est réellement nécessaire.

3.25. Description locale : les présentations. Fixons R une W-algèbre formellement lisse pour la topologie p-adique.

Définition 3.26. (1) Soit S une R-algèbre admissible avec $p^\mu \in S$. Une *R-présentation* de S est la donnée d'un homomorphisme de R-algèbres surjectif $T \to S$, où T est une R-algèbre formellement lisse (pour la topologie p-adique). On dira aussi que $T \to S$ est une R-présentation. Un morphisme entre deux R-présentations $u\colon T \to S$ et $u'\colon T' \to S'$ est un diagramme

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "v_T"] \arrow[d, "u"'] & T' \arrow[d, "u'"] \\ S \arrow[r, "v_S"] & S' \end{tikzcd}$$

de R-algèbres qui est commutatif modulo $p^{1-\mu}$.

(2) Soient $(\iota, \varphi)\colon \mathsf{Spec}(S') \rightrightarrows \mathsf{Spec}(S)$ un relèvement surconvergent du Frobenius absolu (on a $p^\mu \in S'$) correspondant à des morphismes $(v_S, \varphi_S)\colon S \rightrightarrows S'$ et $u\colon T \to S$ une R-présentation. Un *Frobenius* sur u est la donnée de deux morphismes de R-présentations $v = (v_T, v_S)\colon (T \xrightarrow{u} S) \to (T' \xrightarrow{u'} S')$ et $\varphi = (\varphi_T, \varphi_S)\colon (T \xrightarrow{u} S) \to (T' \xrightarrow{u'} S')$.

Définition 3.27. Si $u\colon T \to S$ une R-présentation, on note $\mathrm{D}(u)$ le séparé complété, pour la topologie p-adique, de l'enveloppe à puissances divisées (compatibles aux puissances divisées canoniques sur (p)) de T relativement à l'idéal $\mathsf{Ker}(u)$. C'est une T-algèbre (et donc une R-algèbre), et u induit un morphisme surjectif de R-algèbres $\mathrm{D}(u) \to S$. Par fonctorialité des puissances divisées, cela définit un foncteur de la catégorie des R-présentations dans celle des R-algèbres.

Notons que si (v, φ) est un Frobenius sur u, on dispose, par fonctorialité, de morphismes $(v, \varphi)\colon \mathrm{D}(u) \rightrightarrows \mathrm{D}(u')$ au-dessus de $(v_S, \varphi_S)\colon S \rightrightarrows S'$. Ce sont des morphismes de R-algèbres à puissances divisées. Dans ce qui suit, on notera $\mathrm{D}(u')_v$ (resp. $\mathrm{D}(u')_\varphi$) le groupe $\mathrm{D}(u')$ muni de la structure de $\mathrm{D}(u)$-module donnée par v (resp. par φ).

Example 3.28. Soit $\mathsf{Spf}(R) \subseteq \mathcal{X}$ un ouvert affine, $h \in R$ un relèvement de $\det(F)$. Supposons R noethérien, excellent, intègre, normal, et que le fermé de $\mathsf{Spec}(R/pR)$ défini par h soit un diviseur de Cartier réduit à composantes principales. D'après le lemme 3.8 et la proposition 7.1, on a $\mathsf{Spf}(R)^w = \mathsf{Spf}(S_w)$ où S_w est le complété du normalisé de $R[p^w]\{\frac{p^w}{h}\}$. Posons $T = R\{X\}$: l'application

$$\begin{aligned} u_w\colon T &\to S_w \\ X &\mapsto \frac{p^w}{h} \end{aligned}$$

est une R-présentation de S_w. Si $w' \mid w$ (avec $w = mw'$), on a un morphisme de présentations $u_w \to u'_w$ donné par le morphisme de R-algèbres :

$$\begin{aligned} v_{w',w}\colon T &\to T \\ X &\mapsto h^{m-1}X^m \end{aligned}$$

Supposons $w < 1$ et R muni d'un endomorphisme φ relevant le Frobenius modulo p : on dispose du morphisme $v = v_{w/p,w}\colon u_w \to u_{w/p}$. Écrivons $\varphi(h) = h^p + pg$: on a $\varphi(h) = h^p\big(1 + \frac{p}{h^p}g\big)$. Comme $w < 1$, l'élément $\frac{p^{1/p}}{h}$ est topologiquement nilpotent dans $S_{w/p}$, de sorte que

$$\varphi\Big(\frac{p^w}{h}\Big) = \Big(\frac{p^{w/p}}{h}\Big)^p\Big(1 + \Big(\frac{p^{1/p}}{h}\Big)^p g\Big)^{-1} = \Big(\frac{p^{w/p}}{h}\Big)^p \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \Big(\frac{p^{1/p}}{h}\Big)^{pm} g^m \in S_{w/p}$$

si bien que le morphisme φ se prolonge en $\varphi\colon S_w \to S_{w/p}$. Ce dernier se relève aux R-présentations par

$$\begin{aligned}\varphi_{n,m}\colon T &\to T\\ X &\mapsto X^p f\end{aligned}$$

où $f \in T$ est un relèvement de $\left(\frac{p^{w/p}}{h}\right)^p\left(1+\left(\frac{p^{1/p}}{h}\right)^p g\right)^{-1}$ par $u_{w/p}$. Cela fournit un Frobenius sur u_w.

3.29. Cristaux, φ-cristaux.

Définition 3.30. Soit $u\colon T \to S$ une R-présentation.

(1) Un *cristal sur u* est la donnée d'un $\mathrm{D}(u)$-module projectif de rang fini M muni d'une connexion intégrable topologiquement quasi-nilpotente $\nabla\colon M \to M\otimes_T\widehat{\Omega}_T$. Soient $X_1,\dots,X_d$ des coordonnées locales de T. Pour $i\in\{1,\dots,d\}$, posons $D_i := \nabla(\mathrm{d}/\mathrm{d}X_i)$. C'est une W-dérivation continue. La connexion ∇ est intégrable si et seulement si les D_i commutent deux à deux. Elle est topologiquement nilpotente si et seulement s'il existe $e\in\mathbf{N}$ tel que $D_i^e(M)\subset pM$ pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$.

(2) Soit (v,φ) un Frobenius sur u. Un *φ-module sur u* est la donnée d'un $\mathrm{D}(u)$-module M et d'un opérateur de Frobenius $\phi_M\colon M \to \mathrm{D}(u')_v\otimes_{\mathrm{D}(u)} M$ qui est φ-linéaire c'est-à-dire tel que $\phi_M(\lambda m) = \varphi(\lambda)\otimes\phi_M(m)$ pour tout $\lambda\in\mathrm{D}(u)$ et $m\in M$. Cela équivaut à se donner l'application $\mathrm{D}(u')$-linéaire $1\otimes\phi_M\colon\ \mathrm{D}(u')_\varphi\otimes_{\mathrm{D}(u)} M\to\mathrm{D}(u')_v\otimes_{\mathrm{D}(u)} M$.

(3) Un *φ-cristal sur u* est la donnée d'un cristal (M,∇) sur u et d'un opérateur de Frobenius $\phi_M\colon M\to\mathrm{D}(u')_v\otimes_{\mathrm{D}(u)} M$ qui est horizontal, *i.e.* tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\phi_M"'] & M\otimes_T\widehat{\Omega}_T \arrow[d, "\phi_M\otimes\varphi_T"] \\ \mathrm{D}(u')_v\otimes_{\mathrm{D}(u)} M \arrow[r, "\mathrm{d}\otimes1+1\otimes\nabla"] & \big(\mathrm{D}(u')_v\otimes_{\mathrm{D}(u)} M\big)\otimes_{T'}\widehat{\Omega}_{T'} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Proposition 3.31. *(1) Une R-présentation $u\colon T\to S$ étant fixée, la donnée d'un cristal sur $\mathsf{Spec}(S/p^{1-\mu}S)$ est équivalente à celle d'un cristal sur u.*

(2) Supposons donnés $v_S,\varphi_S\colon S\to S'$ les morphismes d'anneaux associés à un relèvement surconvergent de Frobenius (cf définition 3.10), et (v,φ) un Frobenius sur u (avec $v = (v_T,v_S)\colon(T\xrightarrow{u}S)\to(T'\xrightarrow{u'}S')$ et $\varphi=(\varphi_T,\varphi_S)\colon(T\xrightarrow{u}S)\to(T'\xrightarrow{u'}S')$). La donnée d'un F-cristal surconvergent sur $\mathsf{Spf}(S)$ est alors équivalente à celle d'un φ-cristal sur u.

Démonstration. Cela résulte de l'équivalence rappelée dans la remarque 3.19. □

4. Périodes

4.1. Construction d'anneaux de périodes. Soit $S\in\mathscr{C}$. Fixons E_S une clôture algébrique de $\mathsf{Frac}(S)$, et notons $\mathscr{I}_S$ l'ensemble des sous-S-algèbres finies S' de E_S qui sont normales, et telles que l'extension $S_K\subset S'_K$ soit étale. On pose alors

$$\begin{aligned}\overline{S} &= \bigcup_{S'\in\mathscr{I}_S} S'\\ \mathcal{R}_S &= \varprojlim_{x\mapsto x^p}\overline{S}/p\overline{S}\\ \widehat{\overline{S}} &= \varprojlim_{n\in\mathbf{N}}\overline{S}/p^n\overline{S}\\ \mathcal{G}_S &= \mathsf{Gal}\left(\overline{S}_K/S_K\right) = \pi_1\big(\mathsf{Spec}(S_K),\mathsf{Spec}(E)\big)\end{aligned}$$

Le groupe $\mathcal{G}_S$ agit sur $\overline{S}$ et donc sur $\mathcal{R}_S$ et $\widehat{\overline{S}}$.

Proposition 4.2. *(1) Le Frobenius $\overline{S}/p\overline{S}\to\overline{S}/p\overline{S}$ est surjectif.*

(2) L'application naturelle

$$\Big\{\big(x^{(n)}\big)_{n\in\mathbf{N}}\in\widehat{\overline{S}}^{\mathbf{N}}/(\forall n\in\mathbf{N})\ \big(x^{(n+1)}\big)^p=x^{(n)}\Big\}\to\mathcal{R}_S$$

est bijective (par la suite, on les identifie implicitement).

Démonstration. Pour (1), on raisonne mot pour mot comme dans la preuve de [11, Proposition 2.0.1]. Pour (2), *cf* [18, II 1.2.2]. □

Notations. • Pour $x\in\mathcal{R}_S$ (resp. $x\in\mathcal{R}_{\mathbf{Z}_p}$) et $\alpha\in\mathbf{Z}[p^{-1}]$ (resp. $\alpha\in\mathbf{Q}$), on dispose de $x^\alpha\in\mathcal{R}_S$. Par abus, on écrira souvent $[x]^\alpha$ au lieu de $[x^\alpha]\in\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$.
• Si $n\in\mathbf{N}$, on écrit $n=(p-1)q(n)+r(n)$ avec $q(n),r(n)\in\mathbf{N}$ et $r(n)<p-1$ la division euclidienne de n par $p-1$. En outre, on note $s(n)$ la somme des chiffres de l'écriture de n en base p : on a alors $n=(p-1)v_p(n!)+s(n)$, en particulier $q(n)=v_p(n!)+q(s(n))\geq v_p(n!)$.
• Si A est un anneau, $I\subset A$ un idéal à puissances divisées, $x\in I$ et $n\in\mathbf{N}_{>0}$, on notera $x^{[n]}$ la n-ième puissance divisée de x.

On pose :

$$\begin{aligned}\theta\colon\ \mathrm{W}_n(\mathcal{R}_S)&\to\overline{S}/p^n\overline{S}\\(x_0,x_1\ldots)&\to\sum_{n=0}^{\infty}p^nx_n^{(n)}\end{aligned}$$

C'est un homomorphisme surjectif de W-algèbres, $\mathcal{G}_S$-équivariant, de noyau l'idéal principal engendré par $\xi=[\widetilde{p}]-p$ ([11, Proposition 5.1.1 & 5.1.2]), où $\widetilde{p}\in\mathcal{R}_S$ est tel que $\widetilde{p}^{(0)}=p$. Il induit un homomorphisme S-linéaire

$$\theta_S\colon S\otimes_W\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\to\widehat{\overline{S}}$$

L'anneau $\mathcal{R}_S$ étant parfait, $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ est sans p-torsion. Comme S est plat sur W, il en est de même de $S\otimes_W\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$: on peut donc voir $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ et $S\otimes_W\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ comme des sous-anneaux des K-algèbres $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)[p^{-1}]$ et $S_K\otimes_W\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ respectivement.

Définition 4.3. • On note $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)^{\mathrm{DP}}$ (resp. $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)_S^{\mathrm{DP}}$) l'enveloppe à puissances divisées (compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par p) de $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ (resp. $S\otimes_W\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$) relativement à l'idéal $\mathsf{Ker}(\theta)$ (resp. $\mathsf{Ker}(\theta_S)$). On note alors $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ (resp. $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$) le séparé complété de $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)^{\mathrm{DP}}$ (resp. $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)_S^{\mathrm{DP}}$) pour la topologie p-adique.

• On note $\widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}^{\mathrm{DP}}$ (resp. $\widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}_S^{\mathrm{DP}}$) l'enveloppe à puissances divisées (compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par p) de $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ (resp. $S\otimes_W\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$) relativement à l'idéal $\theta^{-1}(p^{1-1/p}\widehat{\overline{S}})=\mathsf{Ker}(\theta)+[\widetilde{p}]^{1-1/p}\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ (resp. $\theta_S^{-1}(p^{1-1/p}\widehat{\overline{S}})=\mathsf{Ker}(\theta_S)+(1\otimes[\widetilde{p}]^{1-1/p})S\otimes_W\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$). On note alors $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(S)$) le séparé complété de $\widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}^{\mathrm{DP}}$ (resp. $\widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}_S^{\mathrm{DP}}$) pour la topologie p-adique.

Les anneaux $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ et $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ (resp. $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$ et $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(S)$) sont des W-algèbres (resp. des S-algèbres) munies d'une action de $\mathcal{G}_S$. On a des applications naturelles $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ et $A_{\mathrm{cris}}(S)\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(S)$.

On note σ le Frobenius des vecteurs de Witt $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$: il se prolonge à $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ et $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ car $\sigma(\mathsf{Ker}(\theta))\subset\mathsf{Ker}(\theta)+p\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ (resp. $\sigma([\widetilde{p}]^{1-1/p})=[\widetilde{p}]^{p-1}$) ont des puissances divisées dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$).

Définition 4.4. Le morphisme $\theta\colon\ \mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\to\widehat{\overline{S}}$ s'étend en $\theta\colon\ \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\to\widehat{\overline{S}}$ et $\theta\colon\ \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\to\widehat{\overline{S}}$. Notons $J^{[1]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ et $J^{[1]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ les noyaux de ces applications. Ce sont des idéaux à puissances divisées de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ et $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ respectivement, fermés pour la topologie p-adique. Pour $r\in\mathbf{N}$, on note $J^{[r]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ (resp. $J^{[r]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$) la r-ième puissance divisée de $J^{[1]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ (resp. $J^{[1]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$).

On a $\xi^{p-1} = \big([\widetilde{p}]^{1-1/p}\big)^p - p\sum\limits_{i=i}^{p-1}\binom{p-1}{i}(-p)^{i-1}[\widetilde{p}]^{p-1-i} = p!\big([\widetilde{p}]^{1-1/p}\big)^{[p]} - p\sum\limits_{i=i}^{p-1}\binom{p-1}{i}(-p)^{i-1}[\widetilde{p}]^{p-1-i}$, de sorte que

$$\frac{\xi^{p-1}}{p} \in (p-1)!\big([\widetilde{p}]^{1-1/p}\big)^{[p]} + \mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \subset \widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}^{\mathrm{DP}}$$

définit un élément de $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$. Bien entendu, on a $\theta\big(\frac{\xi^{p-1}}{p}\big) = 0$, de sorte que $\frac{\xi^{p-1}}{p}$ a des puissances divisées dans $\widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}^{\mathrm{DP}}$ et $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$\xi^{\{n\}} = \Big(\frac{\xi^{p-1}}{p}\Big)^{[q(n)]}\xi^{r(n)} = \frac{\xi^n}{q(n)!p^{q(n)}} \in \widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}^{\mathrm{DP}}$$

et on note son image dans $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ de la même manière.

Remarque 4.5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\xi^{[n]} = \frac{\xi^n}{n!} = \frac{q(n)!p^{q(n)}}{n!}\xi^{\{n\}} \in p^{q(s(n))+v_p(q(n)!)}\,\mathbf{Z}_p^{\times}\,\xi^{\{n\}}$ parce que $v_p\big(\frac{q(n)!p^{q(n)}}{n!}\big) = v_p(q(n)!) + q(n) - v_p(n!) = v_p(q(n)!) + q(s(n))$.

Proposition 4.6. *Les anneaux $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$, $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S)$, $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ et $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(S)$ n'ont pas de p-torsion.*

Démonstration. Cela résulte de ce que $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)^{\mathrm{DP}}$ et $\widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}^{\mathrm{DP}}$ (resp. $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)_S^{\mathrm{DP}}$ et $\widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}_S^{\mathrm{DP}}$) sont des sous-anneaux de $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)_K$ (resp. $S_K \otimes_W \mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$) qui n'a pas de p-torsion. □

Proposition 4.7. *(1) L'idéal $J^{[r]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ (resp. $J^{[r]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$) est l'adhérence, pour la topologie p-adique, de l'idéal de $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ (resp. $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$) engendré par $\{\xi^{\{n\}}\}_{n\geq r}$ (resp. $\{\xi^{[n]}\}_{n\geq r}$).*

(2) Pour tout $r \in \mathbf{N}$, on a $\mathrm{gr}^r\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) \simeq \widehat{\widetilde{S}}\xi^{\{r\}}$ et $\mathrm{gr}^r\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) \simeq \widehat{\widetilde{S}}\xi^{[r]}$.

(3) On a un isomorphisme

$$\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)/p\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) \simeq \mathcal{R}_S[\delta_m]_{m\in\mathbf{N}}/(\widetilde{p}^{p-1}, \delta_m^p)_{m\in\mathbf{N}}$$
$$(\textit{resp.}\quad \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) \simeq \mathcal{R}_S[\delta_m]_{m\in\mathbf{N}}/(\widetilde{p}^{p}, \delta_m^p)_{m\in\mathbf{N}})$$

où δ_m désigne l'image de $\gamma^m\big(\frac{\xi^{p-1}}{p}\big)$ (resp. $\gamma^{m+1}(\xi)$), où $\gamma(x) = x^p/p$.

(4) Les filtrations $\{J^{[r]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\}_{r\in\mathbf{N}}$ et $\{J^{[r]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\}_{r\in\mathbf{N}}$ sont séparées.

Démonstration. (1) Posons $A = \mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\big[\xi^{\{n\}}\big]_{n\in\mathbf{N}} \subset \widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}^{\mathrm{DP}}$. Il s'agit de montrer que cette inclusion est une égalité : il suffit pour cela de montrer que l'idéal $J^{[1]}A$ engendré par $\big(\xi^{\{n\}}\big)_{n\in\mathbf{N}_{>0}}$ est à puissances divisées dans A. Soient donc $n, i \in \mathbf{N}_{>0}$: on a

$$\big(\xi^{\{n\}}\big)^{[i]} = \frac{\xi^{ni}}{i!(q(n)!)^i p^{q(n)i}} = \frac{q(ni)!p^{q(ni)}}{i!(q(n)!)^i p^{q(n)i}}\xi^{\{ni\}}$$

Comme $ni = (p-1)q(n)i + r(n)i$, on a $q(ni) = q(n)i + q(r(n)i)$ de sorte que

$$\frac{q(ni)!p^{q(ni)}}{i!(q(n)!)^i p^{q(n)i}} = \frac{q(r(n)i)!}{i!}\binom{q(ni)}{q(n),\ldots,q(n),q(r(n)i)}p^{q(r(n)i)} \in \mathbf{N}_{>0}$$

(car $\frac{1}{i!}\binom{q(ni)}{q(n),\ldots,q(n),q(r(n)i)} \in \mathbf{N}_{>0}$ est le nombre de partitions de $\{1,\ldots,q(ni)\}$ en i parties à $q(n)$ éléments et d'une à $q(r(n)i)$ éléments), ce qui montre que $\big(\xi^{\{n\}}\big)^{[i]} \in A$ et l'égalité recherchée. Le résultat sur $J^{[r]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ (resp. $J^{[r]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$) s'en déduit (resp. est évident).

(2) D'après (1), on a $J^{[r]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) = \mathrm{W}(\mathcal{R}_S) + J^{[r+1]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$: l'application θ induit donc un isomorphisme $\mathrm{gr}^r\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) \xrightarrow{\sim} \widehat{\widetilde{S}}\xi^{\{r\}}$. De même, on a $\mathrm{gr}^r\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) \xrightarrow{\sim} \widehat{\widetilde{S}}\xi^{[r]}$.

(3) D'après (1), on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}^{\mathrm{DP}} &= \mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\big[\xi^{\{n\}}\big]_{n\in\mathbf{N}}\\ &\simeq \mathrm{W}(\mathcal{R}_S)[\delta_m]_{m\in\mathbf{N}}/\big(p\delta_0 - \xi^{p-1}, p\delta_{m+1} - \delta_m^p\big)\end{aligned}$$

(où δ_m s'envoie sur $\gamma^m\big(\frac{\xi^{p-1}}{p}\big)$). En réduisant modulo p, il vient

$$\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)/p\,\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S) \simeq \widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}^{\mathrm{DP}}/p\widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}^{\mathrm{DP}} \simeq \mathcal{R}_S[\delta_m]_{m\in\mathbf{N}}/(\widetilde{p}^{p-1},\delta_m^p)_{m\in\mathbf{N}}$$

On montre de même le second isomorphisme.
(4) Pour $N\in\mathbf{N}$, l'image de $J^{[(p-1)p^N]}\,\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$ dans $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)/p\,\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$ est l'idéal engendré par $\{\delta_m\}_{m\geq N}$: on a $\bigcap\limits_{r\in\mathbf{N}} J^{[r]}\,\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)\subseteq p\,\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$. Mais d'après (2), si $x\in\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$, on a $px\in J^{[r]}\,\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)\Rightarrow x\in J^{[r]}\,\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$ (car $\widehat{\overline{S}}$ n'a pas de p-torsion). Cela implique donc $\bigcap\limits_{r\in\mathbf{N}} J^{[r]}\,\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)\subseteq\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} p^n\,\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)=\{0\}$, vu que $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$ est séparé pour la topologie p-adique. On raisonne de même pour $\{J^{[r]}\,\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)\}_{r\in\mathbf{N}}$. □

Proposition 4.8. *Les anneaux $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$ $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$ n'ont pas de ξ-torsion.*

Démonstration. Si $x\in\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)\setminus\{0\}$, il existe $r\in\mathbf{N}$ tel que $x\in J^{[r]}\,\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)\setminus J^{[r+1]}\,\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$: son image dans $\mathrm{gr}^r\,\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$ est de la forme $\lambda\xi^{\{r\}}$ avec $\lambda\in\widehat{\overline{S}}$ (*cf* proposition 4.7 (2)). Alors l'image de $\xi x\in J^{[r+1]}\,\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$ dans $\mathrm{gr}^{r+1}\,\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)\simeq\widehat{\overline{S}}\xi^{\{r+1\}}$ appartient à $\mathbf{N}_{>0}\,\lambda\xi^{\{r+1\}}$. Comme $\widehat{\overline{S}}$ est plat sur $\mathbf{Z}_p$, cette image est non nulle, de sorte que $\xi x\neq 0$. On raisonne de même avec $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$. □

Soient $S\in\mathscr{C}$ et $u\colon T\to S$ une R-présentation de S. On dispose du composé

$$T\otimes_W \mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\xrightarrow{u\otimes\mathrm{Id}} S\otimes_W\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\xrightarrow{\theta_S}\widehat{\overline{S}}$$

que l'un note θ_u. Comme u et θ_S sont surjectifs, il en est de même de θ_u.

On note $\big(T\otimes_W\widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}\big)^{\mathrm{DP}}$ l'enveloppe à puissances divisées (compatibles aux puissances divisées canoniques sur (p)) de $T\otimes_W\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ relativement à l'idéal $\theta_u^{-1}(p^{1-1/p}\widehat{\overline{S}})=(1\otimes[\widetilde{p}]^{1-1/p})(T\otimes_W\mathrm{W}(\mathcal{R}_S))+\mathsf{Ker}(\theta_u)$, et $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)$ le séparé complété de $\big(T\otimes_W\widetilde{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)}\big)^{\mathrm{DP}}$ pour la topologie p-adique.

Proposition 4.9. *$\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)$ est une $\mathrm{D}(u)$-algèbre, munie d'une action $\mathrm{D}(u)$-linéaire de $\mathcal{G}_S$.*

4.10. Propriétés locales. Dans ce numéro, on fixe une R-présentation $u\colon T\to S$ et on suppose que T est formellement étale sur $W\{X_1,\ldots,X_d\}$ pour la topologie p-adique, où $(X_1,\ldots,X_\delta)$ est un système de coordonnées étales de R/W (on a $\delta\leq d$). Comme $\theta\colon\ \mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\to\widehat{\overline{S}}$ est surjectif, pour tout $i\in\{1,\ldots,d\}$, il existe $s_i\in\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ tels que $\theta(s_i)=u(X_i)$. On a alors $X_i\otimes 1-1\otimes s_i\in\mathsf{Ker}(\theta_u)$. Posons $u_i=X_i\otimes 1-1\otimes s_i$. On note encore u_i son image dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(u)$. Remarquons que $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(u)$ est une $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$-algèbre, comme les u_i ont des puissances divisées dans $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)$, et comme ce dernier est séparé et complet pour la topologie p-adique, il existe un unique homomorphisme de $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$-algèbres :

$$f\colon\ \widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)\{\langle u_1,\ldots,u_d\rangle\}\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)$$

(où $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)\{\langle u_1,\ldots,u_d\rangle\}$ désigne le complété p-adique de l'anneau des polynômes à puissances divisées en $u_1,\ldots,u_d$ à coefficients dans $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$.)

Proposition 4.11. *f est un isomorphisme.*

Démonstration. Posons $T_0=W\{X_1,\ldots,X_d\}$ et $\mathcal{A}:=\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)\{\langle u_1,\ldots,u_d\rangle\}$. Soit

$$\begin{aligned} g\colon T_0\otimes_W\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)&\to\mathcal{A}\\ X_i\otimes 1&\mapsto s_i+u_i\end{aligned}$$

($\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$-linéaire). L'application $\theta_{\mathcal{A}}\colon\mathcal{A}\to\widehat{\overline{S}};\ u_i\mapsto 0$ prolonge θ et l'application $f\circ g$ est l'application naturelle. Si $n\in\mathbf{N}_{>0}$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} T/p^nT \arrow[r] \arrow[dr, dotted, "\lambda_n"] & \overline{S}/p^n\overline{S} \\ T_0/p^nT_0 \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{A}/p^n\mathcal{A} \arrow[u, "\theta_{\mathcal{A},n}"'] \end{tikzcd}$$

Comme $\mathsf{Ker}(\theta_{\mathcal{A}})$ et $p\mathcal{A}$ sont des idéaux à puissances divisées, il en est de même de $\mathsf{Ker}(\theta_{\mathcal{A},n}) = (\mathsf{Ker}(\theta_{\mathcal{A}}) + p^n\mathcal{A})/p^n\mathcal{A}$, qui est donc un nilidéal. Comme $T_0/p^nT_0 \to T/p^nT$ est étale, il existe une unique application $\lambda_n\colon T/p^nT \to \mathcal{A}/p^n\mathcal{A}$ (en pointillés dans le diagramme) qui prolonge le morphisme structural $\lambda_n\colon T_0/p^nT_0 \to \mathcal{A}/p^n\mathcal{A}$. En particulier, g se prolonge de façon unique en un morphisme $g\colon T\otimes_W \mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \to \mathcal{A}$ tel que $\theta_u = \theta_{\mathcal{A}}\circ g$: comme $g(\mathsf{Ker}(\theta_u)) \subset \mathsf{Ker}(\theta_{\mathcal{A}})$, le morphisme g s'étend de façon unique en $g\colon\ \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \to \mathcal{A}$ (par la propriété universelle des puissances divisées et de la complétion p-adique).

Comme $f\circ g\colon T_0\otimes_W \mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \to \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)$ est l'application naturelle, il en est de même de $f\circ g\colon T\otimes_W \mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \to \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)$ par unicité, de sorte que $f\circ g = \mathrm{Id}_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)}$. Finalement, on a

$$\begin{gathered}\mathcal{A} \xrightarrow{f} \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \xrightarrow{g} \mathcal{A}\\ f(u_i) = X_i\otimes 1 - 1\otimes s_i \mapsto (s_i+u_i) - s_i = u_i\end{gathered}$$

par $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$-linéarité, on a $f\circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ et f est un isomorphisme. □

Définition 4.12. Le morphisme θ_S s'étend en un morphisme surjectif $\theta_S\colon \mathbf{A}\,\mathrm{cris}(u) \to \widehat{\overline{S}}$. On pose $J^{[1]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) = \mathsf{Ker}(\theta_S)$. C'est un idéal à puissances divisées de $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)$, fermé pour la topologie p-adique. Si $r\in\mathbf{N}$, on note $J^{[r]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)$ sa r-ième puissance divisée. Il résulte des propositions 4.7 et 4.11 que c'est l'adhérence, pour la topologie p-adique, de l'idéal engendré par $\big\{\xi^{\{n_0\}}u_1^{[n_1]}\cdots u_d^{[n_d]}\big\}_{\substack{\underline{n}\in\mathbf{N}^{d+1}\\ |\underline{n}|\geq r}}$, et que le gradué pour la filtration ainsi définie est :

$$\mathrm{gr}^r\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \simeq \bigoplus_{\substack{\underline{n}\in\mathbf{N}^{d+1}\\ |\underline{n}|=r}} \widehat{\overline{S}}\xi^{\{n_0\}}u_1^{[n_1]}\cdots u_d^{[n_d]}$$

Notons $\widehat{\Omega}_T$ le module des différentielles continues (pour la topologie p-adique) de T. Comme T est formellement étale sur $W\{X_1,\ldots,X_d\}$ pour la topologie p-adique, alors $\widehat{\Omega}_T = \bigoplus_{i=1}^d T\,\mathrm{d}\,X_i$.

On munit $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)$ de l'unique connexion $\nabla\colon\ \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \to \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)\otimes_T\widehat{\Omega}_T$ qui est $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$-linéaire, continue pour la topologie p-adique, et telle que $\nabla(u_i) = \mathrm{d}\,X_i$ pour $i\in\{1,\ldots,d\}$. Remarquons que cette connexion ne dépend pas du choix des coordonnés $(X_i)_{1\leq i\leq d}$, car elle est aussi caractérisée par le fait qu'elle $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$-linéaire, continue pour la topologie p-adique et prolonge la différentielle canonique $\mathrm{d}\colon T\to\widehat{\Omega}_T$.

4.13. Fonctorialité. Soient $S_1, S_2\in\mathscr{C}$ et $f\colon S_1\to S_2$ un morphisme injectif. Notons E_{S_i} une clôture algébrique de $\mathsf{Frac}(S_i)$ pour $i\in\{1,2\}$, et soit $\bar{f}\colon E_{S_1}\to E_{S_2}$ un morphisme au-dessus de f. Si $A\in\mathscr{I}_{S_1}$ (*i.e.* A est une sous-S_1-algèbre finie de E_{S_1} telle que $S_{1,K}\to A_K$ soit étale), l'anneau $S_{2,K}\otimes_{S_{1,K}} A_K$ est fini étale sur $S_{2,K}$ par changement de base : c'est un produit d'extensions finies étales et intègres de $S_{2,K}$ (*cf* [20, Exposé I, §10]). Si N désigne la normalisation de S_2 dans $\mathsf{Frac}(AS_2)$, on a $N\in\mathscr{I}_{S_2}$. Cela implique que $\bar{f}(A)\subseteq N\subseteq \overline{S}_2$, si bien que $\bar{f}(\overline{S}_1)\subseteq\overline{S}_2$. En particulier, l'application $\bar{f}$ induit des morphismes d'anneaux $\mathcal{R}_{S_1}\to\mathcal{R}_{S_2}$ et donc

$$\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_1)\to\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_2)\quad\text{et}\quad\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_1)\to\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_2)$$

compatibles aux Frobenius et aux actions de $\mathcal{G}_{S_2}$ (via le morphisme canonique $\mathcal{G}_{S_2}\to\mathcal{G}_{S_1}$ qui n'est autre que $\pi_1\big(\mathsf{Spec}(S_{2,K}),\mathsf{Spec}(E_{S_2})\big)\to\pi_1\big(\mathsf{Spec}(S_{1,K}),\mathsf{Spec}(E_{S_1})\big)$).

Soient $u_1\colon T_1\to S_1$ et $u_2\colon T_2\to S_2$ des présentations, et $f_u\colon u_1\to u_2$ un morphisme de présentations (donné par un morphisme $v\colon T_1\to T_2$ au-dessus de f. On dispose alors du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T_1\otimes_W \mathrm{W}(\mathcal{R}_{S_1}) \arrow[r, "v\otimes\mathrm{W}(\bar{f})"] \arrow[d, "\theta_{u_1}"'] & T_2\otimes_W \mathrm{W}(\mathcal{R}_{S_2}) \arrow[d, "\theta_{u_2}"] \\ \widehat{\overline{S}}_1 \arrow[r, "\hat{\bar{f}}"] & \widehat{\overline{S}}_2 \end{tikzcd}$$

qui implique que $v\otimes \mathrm{W}(\bar{f})$ envoie $\theta_{u_1}^{-1}(p^{1-1/p}\widehat{\overline{S}}_1)$ dans $\theta_{u_2}^{-1}(p^{1-1/p}\widehat{\overline{S}}_2)$, et induit donc un morphisme

$$\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u_1)\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u_2)$$

compatible au morphisme $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_1)\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_2)$, à l'action du groupe $\mathcal{G}_{S_2}$ et aux connections (ces dernières étant induites par les différentielles canoniques $\mathrm{d}\colon T_1\to\widehat{\Omega}_{T_1}$ et $\mathrm{d}\colon T_2\to\widehat{\Omega}_{T_2}$).

Supposons maintenant que $(v,\varphi)\colon (T\xrightarrow{u}S)\to(T'\xrightarrow{u'}S')$ soit un Frobenius sur u, avec $v_S\colon S\to S'$ injectif. D'après ce qui précède, on dispose des morphismes $v\colon\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$ et $v\colon\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')$. D'après 3.10 (2), on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
T\otimes_W \mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \arrow[r, "1\otimes\mathrm{W}(\hat{v})"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] \arrow[d, "\theta_u \bmod p^{1-1/p}"'] & T\otimes_W \mathrm{W}(\mathcal{R}_{S'}) \arrow[r, "\varphi_T\otimes\sigma"] & T'\otimes_W \mathrm{W}(\mathcal{R}_{S'}) \arrow[d, "\theta_{u'} \bmod p^{1-1/p}"] \\
\overline{S}/p^{1-1/p}\overline{S} \arrow[r, "\bar{v}"] & \overline{S}'/p^{1-1/p}\overline{S}' \arrow[r, "\mathrm{Frob}"] & \overline{S}'/p^{1-1/p}\overline{S}'
\end{tikzcd}$$

(où σ désigne l'endomorphisme de Frobenius des vecteurs de Witt $\mathrm{W}(\mathcal{R}_{S'})$). Cela implique que le composé $\varphi\colon T\otimes_W\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\to T'\otimes_W\mathrm{W}(\mathcal{R}_{S'})$ envoie $\theta_u^{-1}(p^{1-1/p}\widehat{\overline{S}})$ dans $\theta_u^{-1}(p^{1-1/p}\widehat{\overline{S}}')$. En passant aux enveloppes à puissances divisées et aux complétés p-adiques, il induit un morphisme

$$\varphi\colon\ \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')$$

au-dessus des morphismes $\varphi\colon\ \mathrm{D}(u)\to\mathrm{D}(u')$ et $v\circ\sigma\colon\ \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$ par construction.

Remarque 4.14. Notons $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(u)$ le séparé complété pour la topologie p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $T\otimes_W\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ par rapport à l'idéal $\mathsf{Ker}(\theta_u)$ (on a un morphisme naturel $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(u)\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)$). Comme φ_S ne se factorise via le Frobenius que modulo $p^{1-\mu}$ et pas modulo p, l'application φ n'induit pas d'application $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(u)\to\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(u')$. C'est la raison pour laquelle on travaille avec $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)$ plutôt qu'avec $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(u)$.

4.15. Sections horizontales.

Lemme 4.16. *(cf* [26, Proposition 8.9]*). Soient A une $\mathbf{Z}_p$-algèbre plate, séparée et complète pour la topologie p-adique. On note $\mathscr{A}=A\{\langle u_1,\ldots,u_\delta\rangle\}$ le séparé complété, pour la topologie p-adique, de l'anneau des polynômes à puissances divisées $A\langle u_1,\ldots,u_\delta\rangle$, et $\widehat{\Omega}=\widehat{\Omega}_{\mathscr{A}/A}=\bigoplus_{i=1}^{\delta}\mathscr{A}\,\mathrm{d}\,u_i$ le module des différentielles continues (pour la topologie p-adique) de $\mathscr{A}$ sur A. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{A}$-module projectif de rang fini muni d'une connexion intégrable topologiquement nilpotente $\nabla\colon\mathscr{M}\to\mathscr{M}\otimes_{\mathscr{A}}\widehat{\Omega}$. Le A-module de ses sections horizontales $\mathscr{M}^{\nabla=0}$ est alors projectif de même rang que $\mathscr{M}$. En fait on $\mathscr{M}^{\nabla=0}\simeq\mathscr{M}/I\mathscr{M}$ où $I\subset\mathscr{A}$ est l'adhérence, pour la topologie p-adique, de l'idéal à puissances divisés engendré par $u_1,\ldots,u_\delta$. En outre, l'application naturelle*

$$\mathscr{A}\otimes_A\mathscr{M}^{\nabla=0}\to\mathscr{M}$$

est un isomorphisme de modules à connexion.

Démonstration. Pour $i\in\{1,\ldots,\delta\}$, posons $D_i=\nabla(\mathrm{d}\,/\,\mathrm{d}\,u_i)\colon\mathscr{M}\to\mathscr{M}$: c'est un opérateur A-linéaire topologiquement nilpotent. Si $\underline{n}=(n_1,\ldots,n_\delta)\in\mathbf{N}^\delta$, posons $u^{[\underline{n}]}=\prod_{i=1}^{\delta}u_i^{[n_i]}$ et $D^{\underline{n}}=\prod_{i=1}^{\delta}D_i^{n_i}$. La somme

$$P=\sum_{\underline{n}\in\mathbf{N}^\delta}(-u)^{[\underline{n}]}D^{\underline{n}}$$

converge vers un endomorphisme A-linéaire de $\mathscr{M}$. Si $f\in\mathscr{A}$ et $m\in\mathscr{M}$, on a $P(fm)=f(0)P(m)$. On a donc $I\mathscr{M}\subset\mathsf{Ker}(P)$. Comme $P(m)\equiv m \mod I\mathscr{M}$, on a en fait $\mathsf{Ker}(P)=I\mathscr{M}$. Par ailleurs, comme $D_i\circ P=0$, on a $\mathrm{Im}(P)\subset\mathscr{M}^{\nabla=0}$, et donc $\mathrm{Im}(P)=\mathscr{M}^{\nabla=0}$ parce que $P_{|\mathscr{M}^{\nabla=0}}=\mathrm{Id}_{\mathscr{M}^{\nabla=0}}$. Il en résulte que P est le projecteur sur $\mathscr{M}^{\nabla=0}$ parallèlement à $I\mathscr{M}$, et P induit un isomorphisme $\mathscr{M}/I\mathscr{M}\xrightarrow{\sim}\mathscr{M}^{\nabla=0}$.

Notons $\alpha\colon\mathscr{A}\otimes_A\mathscr{M}^{\nabla=0}\to\mathscr{M}$ l'application naturelle : sa réduction modulo I est un isomorphisme. Comme $I\subseteq\mathrm{rad}(A)$ (parce que $\mathscr{A}$ est complet pour la topologie p-adique), le lemme de

Nakayama implique la surjectivité de α. Les $\mathscr{A}$-modules $\mathscr{A} \otimes_A \mathscr{M}^{\nabla=0}$ et $\mathscr{M}$ étant projectifs de même rang, cela implique que α est un isomorphisme. □

Si (M, ∇) est un cristal sur u (*cf* définition 3.30), on dispose du $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)$-module à connection $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M$.

Proposition 4.17. *Le* $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$*-module* $\big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M\big)^{\nabla=0}$ *est égal à*

$$\big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M\big)/I\big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M\big)$$

(où I est l'adhérence, pour la topologie p-adique, de l'idéal à puissances divisés engendré par $u_1, \ldots, u_d$). Il est donc projectif de même rang que celui de M sur $\mathrm{D}(u)$*. Il est libre si M l'est. En outre, l'application naturelle*

$$\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)} \big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M\big)^{\nabla=0} \to \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Cela résulte de la proposition 4.11 et du lemme 4.16 appliqué à $A = \widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$ et $\mathscr{M} = \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M$. □

En appliquant la proposition 4.17 au cristal trivial $(\mathrm{D}(u), \mathrm{d})$, on en déduit :

Corollaire 4.18. $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)^{\nabla=0} = \widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$.

Sur le $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$-module $\mathcal{M} := \big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M\big)^{\nabla=0}$, on définit deux filtrations décroissantes en posant $J^{[r]}\mathcal{M} = J^{[r]}\, \widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)} \mathcal{M}$ et $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M} = \big(J^{[r]}\, \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M\big)^{\nabla=0}$ pour $r \in \mathbf{N}$.

Proposition 4.19. *Pour tout $r \in \mathbf{N}$, on a :*

(1) $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M} = J^{[r]}\mathcal{M}$ *;*

(2) $\mathrm{gr}^r \mathcal{M} := \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}/\mathrm{Fil}^{r+1} \mathcal{M} \simeq \mathrm{gr}^r\, \widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S) \otimes_S (S \otimes_{\mathrm{D}(u)} M)$.

Démonstration. On a déjà $J^{[r]}\mathcal{M} \subseteq \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$ pour tout $r \in \mathbf{N}$. Comme la filtration $\{\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}\}_{r\in\mathbf{N}}$ est séparée (car c'est le cas de $\{J^{[r]}\, \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)\}_{r\in\mathbf{N}}$), il suffit donc, pour montrer (1), de vérifier que l'application $f_r \colon J^{[r]}\mathcal{M}/J^{[r+1]}\mathcal{M} \to \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}/\mathrm{Fil}^{r+1} \mathcal{M}$ induite sur les gradués est un isomorphisme. On a le diagramme commutatif à colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
J^{[r+1]}\, \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d] & J^{[r]}\, \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M \otimes_T \widehat{\Omega}_T \arrow[d] \\
J^{[r]}\, \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d] & J^{[r-1]}\, \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M \otimes_T \widehat{\Omega}_T \arrow[d] \\
\mathrm{gr}^r\, \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M \arrow[r, "\mathrm{d}_M"] \arrow[d] & \mathrm{gr}^{r-1}\, \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M \otimes_T \widehat{\Omega}_T \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

(où l'application d_M sur $\mathrm{gr}^r\, \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M$ est déduite de $\mathrm{d} \colon \mathrm{gr}^r\, \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \to \mathrm{gr}^{r-1}\, \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_T \widehat{\Omega}_T$ en tensorisant par M au-dessus de $\mathrm{D}(u)$, *i.e.* l'action sur M est triviale). Le lemme du serpent fournit un homomorphisme injectif $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}/\mathrm{Fil}^{r+1} \mathcal{M} \to \mathsf{Ker}(\mathrm{d}_M)$. Comme M est plat sur $\mathrm{D}(u)$, on a $\mathsf{Ker}(\mathrm{d}_M) = \mathsf{Ker}(\mathrm{d}) \otimes_{\mathrm{D}(u)} M$. Comme

$$\mathrm{gr}^r\, \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u) \simeq \bigoplus_{\substack{\underline{n}\in\mathbf{N}^{d+1} \\ |\underline{n}|=r}} \widehat{\widehat{S}}\xi^{\{n_0\}} u_1^{[n_1]} \cdots u_d^{[n_d]}$$

(*cf* définition 4.12), on a $\mathsf{Ker}(\mathrm{d}) = \widehat{\widehat{S}}\xi^{\{r\}} = \mathrm{gr}^r\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$, de sorte qu'on a une application injective

$$g_r\colon \mathrm{Fil}^r\,\mathcal{M}/\,\mathrm{Fil}^{r+1}\,\mathcal{M} \to \mathrm{gr}^r\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\otimes_{\mathrm{D}(u)} M \simeq J^{[r]}\mathcal{M}/J^{[r+1]}\mathcal{M}$$

(le dernier isomorphisme provenant de la platitude de M sur $\mathrm{D}(u)$). On a $g_r\circ f_r = \mathrm{Id}_{J^{[r]}\mathcal{M}/J^{[r+1]}\mathcal{M}}$, donc f_r est bien un isomorphisme, ce qui prouve aussi (2). $\square$

Soient maintenant (N,∇) un cristal sur u et $f_S\colon S\otimes_{\mathrm{D}(u)} M \to S\otimes_{\mathrm{D}(u)} N$ un homomorphisme S-linéaire entre les évaluations des cristaux associés en $(\mathsf{Spf}(S),\mathsf{Spf}(S))$. On note $\mathcal{N}$ le $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$-module $\big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)\otimes_{\mathrm{D}(u)} M\big)^{\nabla=0}$.

Proposition 4.20. *f_S induit un unique morphisme de $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$-modules filtrés $f\colon \mathcal{M}\to\mathcal{N}$ dont le gradué est $\mathrm{Id}_{\mathrm{gr}^\bullet\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\otimes_S f_S$ (cf proposition 4.19).*

Démonstration. Comme M est projectif sur $\mathrm{D}(u)$ et $\mathrm{D}(u)\to S$ surjectif, il existe $f_{\mathrm{D}(u)}\colon M\to N$ relevant f_S. Ce dernier induit un morphisme $\mathsf{L}(f_{\mathrm{D}(u)})\colon M\otimes_{\mathrm{D}(u)}\mathsf{L}(\widehat{\Omega}_T^\bullet)\to N\otimes_{\mathrm{D}(u)}\mathsf{L}(\widehat{\Omega}_T^\bullet)$ entre les linéarisés des complexes de de Rham (*cf* [7, Construction 6.9]), et donc un morphisme $f\colon\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ en prenant le H^0 (*cf* [7, Theorem 6.14]), ce qui montre l'existence. L'unicité est immédiate. $\square$

Soit (v,φ) un Frobenius sur u (avec $v=(v_T,v_S),\varphi=(\varphi_T,\varphi_S)\colon (T\xrightarrow{u}S)\to(T'\xrightarrow{u'}S')$). On dispose alors d'un morphisme de Frobenius $(v,\varphi)\colon\ \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')$.

Définition 4.21. Un (v,φ)*-module sur* $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ est la donnée d'un $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$-module projectif de rang fini $\mathcal{M}$ et d'un opérateur de Frobenius $\phi_{\mathcal{M}}\colon\mathcal{M}\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')_v\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\mathcal{M}$ qui est φ-linéaire c'est-à-dire tel que $\phi_{\mathcal{M}}(\lambda m)=\varphi(\lambda)\otimes\phi_{\mathcal{M}}(m)$ pour tout $\lambda\in\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ et $m\in\mathcal{M}$. Cela équivaut à se donner l'application $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$-linéaire $1\otimes\phi_{\mathcal{M}}\colon\ \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')_\varphi\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\mathcal{M}\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')_v\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\mathcal{M}$. Remarquons que, puisque $\varphi=\sigma\circ v$, cela munit $v^*\mathcal{M}:=\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')_v\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\mathcal{M}$ d'une structure de σ-module (au sens usuel, *cf* définition 4.23) sur $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$.

Proposition 4.22. *Soit (M,∇,ϕ_M) un φ-cristal sur u. Alors $\mathcal{M}=\big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)\otimes_{\mathrm{D}(u)} M\big)^{\nabla=0}$ est un (v,φ)-module sur $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$.*

Démonstration. Le $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)$-module à connexion $\mathscr{M}=\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)_v\otimes_{\mathrm{D}(u)} M$ est muni d'un opérateur de Frobenius $\phi_{\mathscr{M}}\colon\mathscr{M}\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')_v\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)}\mathscr{M}$ dont le linéarisé n'est autre que

$$\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')_v\otimes(1\otimes\phi_M)\colon\ \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')_\varphi\otimes_{\mathrm{D}(u)} M\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')_v\otimes_{\mathrm{D}(u)} M$$

Comme $\mathrm{D}(u)\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)\xrightarrow{\varphi}\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')=\mathrm{D}(u)\xrightarrow{\varphi}\mathrm{D}(u')\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')$ (*cf* section 4.13), ce dernier est une application

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')_\varphi\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)}\mathscr{M} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')_v\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)}\mathscr{M}\\ \| & & \|\\ \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')_\varphi\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\mathcal{M} & & \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')_v\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\mathcal{M}\end{array}$$

(*cf* proposition 4.17). Comme ϕ_M est horizontal pour la connexion ∇ de M, il en est de même de $\phi_{\mathscr{M}}$ pour la connexion de $\mathscr{M}$. En particulier, le $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$-module $\mathscr{M}^{\nabla=0}$ est muni de l'opérateur de Frobenius induit par $\phi_{\mathscr{M}}$. $\square$

Définition 4.23. (1) Un σ-module sur $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ est un $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$-module projectif de rang fini $\mathcal{M}$, muni d'un opérateur de Frobenius $\phi_{\mathcal{M}}\colon\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ qui est σ-linéaire c'est-à-dire tel que $\phi_{\mathcal{M}}(\lambda m)=\sigma(\lambda)\otimes\phi_{\mathcal{M}}(m)$ pour tout $\lambda\in\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ et $m\in\mathcal{M}$.

(2) Soit $\mu\in\mathbf{Q}\cap[0,1[$. La *hauteur de Hodge* d'un σ-module $(\mathcal{M},\phi_{\mathcal{M}})$ sur $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ est

$$H(\mathcal{M})=\inf\big\{1-\mu,w\in\mathbf{Q},\ \widetilde{p}^{w}\in\det(\phi_{\mathcal{M}})\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)/[\widetilde{p}]^{1-\mu}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\big\}\in[0,1-\mu]$$

Si $(\mathcal{M},\phi_{\mathcal{M}})$ est un (v,φ)-module sur $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$, on munit $\mathcal{M}'=\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')_v\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\mathcal{M}$ d'une structure de σ-module sur $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$ en posant

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{M}'}\colon \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')_v\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\mathcal{M}&\to \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')_v\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\mathcal{M}\\ a\otimes m&\mapsto \sigma(a)\otimes\phi_{\mathcal{M}}(m)\end{aligned}$$

En particulier, si (M,∇,ϕ) est un φ-cristal sur u et $\mathcal{M}=\big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)\otimes_{\mathrm{D}(u)}M\big)^{\nabla=0}$ le (v,φ)-module associé, on dispose du σ-module $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')_v\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\mathcal{M}$ sur $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$.

4.24. Soient $(\mathscr{M},\Phi)$ un F-cristal surconvergent sur $\mathcal{X}$ et $\mathsf{Spf}(S)\subset\mathcal{V}$, $\mathsf{Spf}(S')\subset\mathcal{V}_{\varphi}\underset{\mathcal{X}}{\times}{}_{\iota}\mathcal{V}$ (avec $S,S'\in\mathcal{C}$) des ouverts affines tels que $\iota(\mathsf{Spf}(S'))\subset\mathsf{Spf}(S)$ et $\varphi(\mathsf{Spf}(S'))\subset\mathsf{Spf}(S)$ (*cf* remarque 3.11). Soit $u\colon T\to S$ (resp. $u'\colon T'\to S'$) une W-présentation, et posons $\mathcal{Z}=\mathsf{Spf}(\mathrm{D}(u))$ (resp. $\mathcal{Z}'=\mathsf{Spf}(\mathrm{D}(u'))$). Alors $(\mathscr{M}_{\mathcal{Z}},\Phi)$ est décrit par un φ-cristal $(M(u),\nabla,\phi_{M(u)})$ sur u. Posons alors

$$\mathcal{M}(u)=\big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)\otimes_{\mathrm{D}(u)}M(u)\big)^{\nabla=0}$$

(d'après la proposition 4.22, c'est un (v,φ)-module sur $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$). Il définit une structure de σ-module sur

$$\mathcal{M}(u')=\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')_v\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\mathcal{M}(u)$$

(l'égalité provenant de la proposition 4.17 en étendant les scalaires par $v\colon\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)\to\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')$ et en prenant les sections horizontales).

Par ailleurs, posons

$$\mathcal{M}_S=\varprojlim_{n\in\mathbf{N}_{>0}}\mathrm{H}^0\Big(\big(\mathsf{Spec}\,(\overline{S}/p^{1-1/p}\overline{S})/\,\mathsf{Spec}(W_n)\big)_{\mathrm{cris}},\mathscr{M}_{|\,\mathsf{Spf}(S)}\Big)$$

c'est un $\mathbf{Z}_p$-module muni. Par fonctorialité, le morphisme $\Phi\colon\varphi^*\mathscr{M}\to\iota^*\mathscr{M}$ induit un morphisme

$$\begin{aligned}\sigma^*\mathcal{M}_{S'}&\overset{\sim}{\to}\varprojlim_{n\in\mathbf{N}_{>0}}\mathrm{H}^0\Big(\big(\mathsf{Spec}\,(\overline{S}'/p^{1-1/p}\overline{S}')/\,\mathsf{Spec}(W_n)\big)_{\mathrm{cris}},\mathrm{Frob}^*\,\overline{v}^*\mathscr{M}_{|\,\mathsf{Spf}(S')}\Big)\\ &\overset{\sim}{\to}\varprojlim_{n\in\mathbf{N}_{>0}}\mathrm{H}^0\Big(\big(\mathsf{Spec}\,(\overline{S}'/p^{1-1/p}\overline{S}')/\,\mathsf{Spec}(W_n)\big)_{\mathrm{cris}},\overline{\varphi}^*\mathscr{M}_{|\,\mathsf{Spf}(S')}\Big)\\ &\overset{\Phi}{\to}\varprojlim_{n\in\mathbf{N}_{>0}}\mathrm{H}^0\Big(\big(\mathsf{Spec}\,(\overline{S}'/p^{1-1/p}\overline{S}')/\,\mathsf{Spec}(W_n)\big)_{\mathrm{cris}},\overline{\iota}^*\mathscr{M}_{|\,\mathsf{Spf}(S')}\Big)\\ &\overset{\sim}{\to}\mathcal{M}_{S'}\end{aligned}$$

i.e. un opérateur de Frobenius $\sigma^*\mathcal{M}_{S'}\to\mathcal{M}_{S'}$.

Proposition 4.25. *Avec les notations de 4.24, on a un isomorphisme canonique*

$$\Xi_u\colon\mathcal{M}(u)\to\mathcal{M}_S$$

compatible aux Frobenius.

Démonstration. On a $\overline{S}/p^{1-1/p}\overline{S}=\varinjlim_{\substack{A\in\mathscr{I}_S\\ p^{1/p}\in A}}A/p^{1-1/p}A$, de sorte que

$$\mathcal{M}_S=\varprojlim_{n\in\mathbf{N}_{>0}}\varinjlim_{\substack{A\in\mathscr{I}_S\\ p^{1/p}\in A}}\mathrm{H}^0\Big(\big(\mathsf{Spec}(A/p^{1-1/p}A)/\,\mathsf{Spec}(W_n)\big)_{\mathrm{cris}},\mathscr{M}_{|\,\mathsf{Spf}(S)}\Big)$$

Soit $A\in\mathscr{I}_S$ telle que $p^{1/p}\in A$. Il existe un morphisme surjectif $f\colon(T/p^nT)[X_{\delta+1},\ldots,X_m]\to A/p^{1-1/p}A$: notons $\mathcal{D}_A$ l'enveloppe à puissances divisées de $T_A:=(T/p^nT)[X_{\delta+1},\ldots,X_m]$ relativement au noyau de f, compatibles aux puissances divisées sur $\mathrm{D}(u)$. L'anneau $\mathcal{D}_A$ est une $\mathrm{D}(u)$-algèbre, et d'après [7, Theorem 7.1], la cohomologie de $\mathscr{M}_{|\,\mathsf{Spf}(S)}$ est canoniquement donnée par l'hypercohomologie du complexe de de Rham à puissances divisées

$$M(u)\otimes_{\mathrm{D}(u)}\mathcal{D}_A\otimes_{T_A}\Omega^{\bullet}_{T_A/W_n}$$

Comme $\mathsf{Spec}(A/p^{1-1/p}A)$ est affine, on a en fait

$$\mathrm{H}^0\Big(\big(\mathsf{Spec}(A/p^{1-1/p}A)/\,\mathsf{Spec}(W_n)\big)_{\mathrm{cris}}, \mathscr{M}_{|\,\mathsf{Spf}(S)}\Big) \\ \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ker}\left(M(u)\otimes_{\mathrm{D}(u)}\mathcal{D}_A \xrightarrow{\nabla_A} M(u)\otimes_{\mathrm{D}(u)}\mathcal{D}_A\otimes_{T_A}\Omega_{T_A/W_n}\right)$$

(où ∇_A est la connexion déduite de la connexion ∇ sur $M(u)$). On a

$$\Omega_{T_A/W_n} = T_A\otimes_T\widehat{\Omega}_T\oplus\bigoplus_{i=\delta+1}^m T_A\,\mathrm{d}\,X_i$$

de sorte que

$$\mathrm{H}^0\Big(\big(\mathsf{Spec}(A/p^{1-1/p}A)/\,\mathsf{Spec}(W_n)\big)_{\mathrm{cris}}, \mathscr{M}_{|\,\mathsf{Spf}(S)}\Big) \\ \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ker}\left(\nabla\colon M(u)\otimes_{\mathrm{D}(u)}E_A\to M(u)\otimes_{\mathrm{D}(u)}E_A\otimes_T\widehat{\Omega}_T\right)$$

où $E_A=\mathsf{Ker}\left(\mathcal{D}_A\to\bigoplus_{i=\delta+1}^m\mathcal{D}_A\,\mathrm{d}\,X_i\right)$, si bien que

$$\mathcal{M}_S\xrightarrow{\sim}\varprojlim_{n\in\mathbf{N}_{>0}}\mathsf{Ker}\left(\nabla\colon M(u)\otimes_{\mathrm{D}(u)}\varinjlim_{A\in\mathscr{I}_S}E_A\to M(u)\otimes_{\mathrm{D}(u)}\varinjlim_{A\in\mathscr{I}_S}E_A\otimes_T\widehat{\Omega}_T\right)$$

Comme dans [11, Proposition 9.3.2], on a $\varinjlim_{A\in\mathscr{I}_S}E_A=\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(u)/p^n\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(u)$, si bien que

$$\mathcal{M}_S\xrightarrow{\sim}\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(u)\otimes_{\mathrm{D}(u)}M(u)\big)^{\nabla=0}$$

(rappelons que $M(u)$ est projectif sur $\mathrm{D}(u)$). □

4.26. Le sous-cristal presque unité.

Proposition 4.27. (Théorème de décomposition). *Soit* $(\mathcal{M}',\phi_{\mathcal{M}'})$ *un σ-module sur* $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$ *muni d'un sous-*$\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$*-module* $\mathrm{Fil}\,\mathcal{M}'$. *On suppose que :*

(a) $\mathrm{Fil}\,\mathcal{M}'$ *et* $\mathcal{M}'/\,\mathrm{Fil}\,\mathcal{M}'$ *libres sur* $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$ *de rang s et r respectivement ;*
(b) $\phi_{\mathcal{M}'}(\mathrm{Fil}\,\mathcal{M}')\subseteq[\widetilde{p}]^{1-\mu}\mathcal{M}'$ *;*
(c) $H(\mathcal{M}'/\,\mathrm{Fil}\,\mathcal{M}')=w\in\mathbf{Q}\cap[0,1-\mu[$ *(cf définition 4.23) ;*
(d) $w<\frac{1-\mu}{pr+\frac{2p-1}{p-1}}$.

Alors $\widetilde{\mathcal{M}'}:=\mathrm{Fil}\,\mathcal{M}'+[\widetilde{p}]^w\mathcal{M}'$ *est un sous-σ-module de $\mathcal{M}'$, libre de rang $r+s$ sur* $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$, *et il existe un unique sous-σ-module* $(\mathcal{U}',\phi_{\mathcal{U}'})$ *de* $\widetilde{\mathcal{M}'}$ *sur* $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$ *tel que :*

(1) $H(\mathcal{U}')=((p-1)r+1)w$ *;*
(2) $\widetilde{\mathcal{M}'}=\mathcal{U}'\oplus\mathrm{Fil}\,\mathcal{M}'$.

En outre, $\mathcal{U}'$ ne dépend que de $(\widetilde{\mathcal{M}'},\phi_{\mathcal{M}'})$ *et pas du sous-module* $\mathrm{Fil}\,\mathcal{M}'$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{B}=(e_1,\ldots,e_s,e_{s+1},\ldots,e_{r+s})$ une base de $\mathcal{M}'$ adaptée à $\mathrm{Fil}\,\mathcal{M}'$. Alors $\widetilde{\mathcal{M}'}$ est libre sur $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$, de base $\big(e_1,\ldots,e_s,[\widetilde{p}]^we_{s+1},\ldots,[\widetilde{p}]^we_{r+s}\big)$.
Existence et unicité de $\mathcal{U}'$. Il s'agit essentiellement d'adapter la preuve de Dwork sur l'existence du sous-F-cristal unité ([16, Theorem 4.1], [28, Theorem 4.1]). Dans la base $\mathfrak{B}$, la matrice de $\phi_{\mathcal{M}'}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix}[\widetilde{p}]^{1-\mu}A & C\\ [\widetilde{p}]^{1-\mu}B & D\end{pmatrix}\in\mathsf{M}_{s+r}\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)$$

où $A\in\mathsf{M}_s\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)$, $B\in\mathsf{M}_{r,s}\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)$, $C\in\mathsf{M}_{s,r}\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)$ et $D\in\mathsf{M}_r\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)$. Il s'agit de trouver une matrice $\eta\in\mathsf{M}_{s,r}\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)$ telle que le sous-module $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{M}'$ engendré par

$\mathcal{M}'/\,\mathrm{Fil}\,\mathcal{M}'$ n'est pas un σ-module sur $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$, mais $\phi_{\mathcal{M}'}$ induit un opérateur de Frobenius sur sa réduction modulo $[\widetilde{p}]^{1-\mu}$.

$\begin{pmatrix}\eta\\ [\widetilde{p}]^w\mathrm{I}_r\end{pmatrix}$ (où $\mathrm{I}_r\in\mathsf{M}_r(\mathbf{Z})$ est la matrice identité) soit stable par $\phi_{\mathcal{M}'}\circ\sigma^*$. Comme

$$(\phi_{\mathcal{M}'}\circ\sigma^*)\begin{pmatrix}\eta\\ [\widetilde{p}]^w\mathrm{I}_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[\widetilde{p}]^{1-\mu}A\sigma(\eta)+[\widetilde{p}]^{pw}C\\ [\widetilde{p}]^{1-\mu}B\sigma(\eta)+[\widetilde{p}]^{pw}D\end{pmatrix}$$

on en déduit que c'est le cas si et seulement s'il existe $\widetilde{D}\in\mathsf{M}_s\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)$ telle que

$$\begin{cases}[\widetilde{p}]^{1-\mu}A\sigma(\eta)+[\widetilde{p}]^{pw}C=\eta\widetilde{D}\\ [\widetilde{p}]^{1-\mu}B\sigma(\eta)+[\widetilde{p}]^{pw}D=[\widetilde{p}]^w\widetilde{D}\end{cases}$$

La matrice de $\phi_{\mathcal{U}'}$ dans la base de $\mathcal{U}'$ ainsi construite est alors

$$\begin{aligned}\widetilde{D}&=[\widetilde{p}]^{1-\mu-w}B\sigma(\eta)+[\widetilde{p}]^{(p-1)w}D\\ &=[\widetilde{p}]^{(p-1)w}D\big(\mathrm{I}_r+[\widetilde{p}]^{1-\mu-pw}D^{-1}B\sigma(\eta)\big)\end{aligned}$$

Soient D^* la comatrice de D et $\delta=\det(D)$. On a $\delta^{-1}=\alpha[\widetilde{p}]^{-w}$ avec $\alpha\in\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$, et

$$\begin{aligned}\widetilde{D}&=[\widetilde{p}]^{(p-1)w}D\big(\mathrm{I}_r+\alpha[\widetilde{p}]^{1-\mu-(p+1)w}D^*B\sigma(\eta)\big)\\ &=[\widetilde{p}]^{(p-1)w}DU(\eta)\end{aligned}$$

avec

$$U(\eta)=\mathrm{I}_r+\alpha[\widetilde{p}]^{1-\mu-(p+1)w}D^*B\sigma(\eta)$$

Comme $1-\mu-(p+1)w>0$ et $\widetilde{p}$ est nilpotent dans $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')/p\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$, la matrice $U(\eta)-\mathrm{I}_r$ est nilpotente modulo p, de sorte que $U(\eta)$ est inversible dans $\mathsf{M}_r\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)$ car inversible modulo p. On a de plus $\det\big(\widetilde{D}\big)=[\widetilde{p}]^{(p-1)rw}\det(D)\det(U(\eta))$, de sorte que

$$H(\mathcal{U}')=(p-1)rw+H(M)=((p-1)r+1)H(M)$$

Ainsi, il s'agit de voir qu'il existe $\eta\in\mathsf{M}_{s,r}\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)$ unique telle que

$$[\widetilde{p}]^{1-\mu}A\sigma(\eta)+[\widetilde{p}]^{pw}C=\eta[\widetilde{p}]^{(p-1)w}DU(\eta)\tag{$*$}$$

Comme $U(\eta)\in\mathsf{GL}_r\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)$, l'équation $(*)$ peut de réécrire $\eta=\big([\widetilde{p}]^{1-\mu-(p-1)w}A\sigma(\eta)+[\widetilde{p}]^wC\big)U(\eta)^{-1}D^{-1}$, soit

$$\eta=\Psi(\eta)$$

avec

$$\Psi(\eta)=\alpha\big([\widetilde{p}]^{1-\mu-pw}A\sigma(\eta)+C\big)U(\eta)^{-1}D^*\in\mathsf{M}_{s,r}\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)$$

Comme $[\widetilde{p}]^{p-1}=p!([\widetilde{p}]^{1-1/p})^{[p]}\in p\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$, l'anneau $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$ est séparé et complet pour la topologie $[\widetilde{p}]$-adique : il suffit de prouver que l'application Ψ est contractante.

Soit $\eta,x\in\mathsf{M}_{s,r}\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)$. Posons

$$\begin{aligned}U&=U(\eta)\\ V&=[\widetilde{p}]^{1-\mu-pw}A\sigma(\eta)+C\in\mathsf{M}_{s,r}\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)\\ W&=-\alpha[\widetilde{p}]^{1-\mu-(p+1)w}D^*B\sigma(x)U(\eta)^{-1}\in[\widetilde{p}]^{1-\mu-(p+1)w}\,\mathsf{M}_r\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\Psi(\eta+x)-\Psi(\eta)&=\alpha\big((V+[\widetilde{p}]^{1-\mu-pw}A\sigma(x))(U-WU)^{-1}-VU^{-1}\big)D^*\\ &=\alpha\big((V+[\widetilde{p}]^{1-\mu-pw}A\sigma(x))U^{-1}(\mathrm{I}_r-W)^{-1}-VU^{-1}\big)D^*\\ &=\alpha\Big([\widetilde{p}]^{1-\mu-pw}A\sigma(x)U^{-1}+(V+[\widetilde{p}]^{1-\mu-pw}A\sigma(x))U^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}W^m\Big)D^*\\ &\in[\widetilde{p}]^{1-\mu-(p+1)w}\,\mathsf{M}_{s,r}\left(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)\end{aligned}$$

Comme $1-\mu-(p+1)w>0$ (vu que $w<\frac{1-\mu}{pr+\frac{2p-1}{p-1}}<\frac{1-\mu}{p+1}$ par hypothèse), l'opérateur Ψ est bien contractant : il admet donc un unique point fixe, ce qui achève la preuve de l'existence et l'unicité de $\mathcal{U}'$.

Indépendance par rapport à $\mathrm{Fil}\,\mathcal{M}'$. La famille des vecteurs colonne de la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_s & \eta \\ 0 & [\widetilde{p}]^w \mathrm{I}_r \end{pmatrix}$$

construite plus haut est une base du $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$-module $\widetilde{\mathcal{M}}'$ adaptée à la décomposition en somme directe. Dans cette base, la matrice du Frobenius $\phi_{\mathcal{M}'}$ est de la forme

$$\Sigma = \begin{pmatrix} [\widetilde{p}]^{1-\mu-w}\widetilde{A} & 0 \\ [\widetilde{p}]^{1-\mu-w}B & \widetilde{D} \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{s+r}\left(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\right)$$

avec $\det(\widetilde{D}) \mid [\widetilde{p}]^{((p-1)r+1)w}$. Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$, la matrice de $\phi_{\mathcal{M}'}^n$ est alors

$$\Sigma\sigma(\Sigma)\cdots\sigma^{n-1}(\Sigma) = \begin{pmatrix} [\widetilde{p}]^{(1+p+\cdots+p^{n-1})(1-\mu-w)}\widetilde{A}\sigma(\widetilde{A})\cdots\sigma^{n-1}(\widetilde{A}) & 0 \\ [\widetilde{p}]^{p^{n-1}(1-\mu-w)}\Lambda_n & \widetilde{D}\sigma(\widetilde{D})\cdots\sigma^{n-1}(\widetilde{D}) \end{pmatrix}$$

(avec $\Lambda_{n+1} = [\widetilde{p}]^{(1+p+\cdots+p^{n-1})(1-\mu-w)}B\sigma(\widetilde{A})\cdots\sigma^n(\widetilde{A}) + [\widetilde{p}]^{p^n(1-\mu-w)}\widetilde{D}\sigma(\Lambda_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$). Cela implique que

$$\begin{cases} \phi_{\mathcal{M}'}^n\left(\mathrm{Fil}\,\mathcal{M}'\right) \subseteq [\widetilde{p}]^{p^{n-1}(1-\mu-w)}\big(\widetilde{\mathcal{M}}'\big) \\ [\widetilde{p}]^{(1+p+\cdots+p^{n-1})((p-1)r+1)w}\mathcal{U}' \subseteq \phi_{\mathcal{M}'}^n\big(\mathcal{U}'\big) \end{cases}$$

si bien que

$$[\widetilde{p}]^{-\frac{p^n-1}{p-1}((p-1)r+1)w}\phi_{\mathcal{M}'}^n\big(\widetilde{\mathcal{M}}'\big) \cap \widetilde{\mathcal{M}}' \subseteq \left([\widetilde{p}]^{p^{n-1}(1-\mu-w)-\frac{p^n-1}{p-1}((p-1)r+1)w}\,\mathrm{Fil}\,\mathcal{M}'\right) \oplus \mathcal{U}'$$

Comme $w < \frac{1-\mu}{pr+\frac{2p-1}{p-1}}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} p^{n-1}(1-\mu-w) - \frac{p^n-1}{p-1}((p-1)r+1)w = +\infty$: comme $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$ est séparé et complet pour la topologie $[\widetilde{p}]$-adique, le $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$-module

$$\mathcal{U}' = \bigcap_{n\in\mathbf{N}_{>0}} [\widetilde{p}]^{-\frac{p^n-1}{p-1}((p-1)r+1)w}\phi_{\mathcal{M}'}^n\big(\widetilde{\mathcal{M}}'\big) \cap \widetilde{\mathcal{M}}'$$

ne dépend que du σ-module $\widetilde{\mathcal{M}}'$ et pas de $\mathrm{Fil}\,\mathcal{M}'$, ce qu'on voulait. □

Plaçons-nous sous les hypothèses du paragraphe 4.24. Supposons en outre que $(\mathscr{M},\Phi)$ est un F-cristal surconvergent *de Hodge isotrivial* sur $\mathcal{X}$, de hauteur de Hodge $< \frac{1-\mu}{pr+\frac{2p-1}{p-1}}$, et que $\mathrm{Fil}\,\mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S)}$ et $\mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S)}/\,\mathrm{Fil}\,\mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S)}$ sont des S-modules *libres* (de rang s et r respectivement). Remarquons que le Frobenius $\mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_{S'}$ induit un endomorphisme semi-linéaire $\phi_{S'}$ de $\mathcal{M}_{S'}$. Pour $\varepsilon \in \mathbf{Q}\cap[0,1]$, notons $\mathrm{pr}_\varepsilon\colon \mathcal{M}_{S'} \to \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')_\sigma \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')} \big(\mathcal{M}_{S'}/[\widetilde{p}]^\varepsilon\mathcal{M}_{S'}\big)$; $m \mapsto 1\otimes\overline{m}$ le morphisme de réduction modulo $[\widetilde{p}]^\varepsilon$ (notons qu'il n'est *pas* $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$-linéaire),

Théorème 4.28. *(1) Le sous-*$\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$*-module*

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{S'} := \mathrm{pr}_{1-\mu}^{-1}\left(\mathsf{Ker}(1\otimes\overline{\phi}_{S'})\right) + [\widetilde{p}]^w\mathcal{M}_{S'} \subset \mathcal{M}_{S'}$$

est libre de rang $r+s$ (où $\overline{\phi}_{S'}$ désigne la réduction de $\phi_{S'}$ modulo $[\widetilde{p}]^{1-\mu}$).

(2) Il existe un unique sous-σ-module $\mathcal{U}_{S'} \subset \mathcal{M}_{S'}$ sur $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$ tel que :

(i) $\mathcal{U}_{S'}$ soit libre de rang r, facteur direct dans $\widetilde{\mathcal{M}}_{S'}$;

(ii) $H(\mathcal{U}_{S'}) = ((p-1)r+1)H(\mathscr{M})$.

Par unicité de $\mathcal{U}_{S'}$, ce dernier est stable par l'action de $\mathcal{G}_{S'}$ sur $\mathcal{M}_{S'}$.

Démonstration. On peut supposer que u et u' sont des $R\{X\}$-présentations, où la structure de $R\{X\}$-algèbre de S et de S' est donnée par $X \mapsto p^{1/N}$, avec $N \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que $p^{1/N} \in S, S'$ et assez grand tel que $N\mu, NH(\mathscr{M}) \in \mathbf{N}$. Fixons $(v,\varphi)\colon u \Longrightarrow u'$ un Frobenius sur u. On suppose que v est une inclusion $T \subset T'$, et que $\varphi(X) = X^p$. On dispose alors (*cf* proposition 3.31) de $\phi_{M(u)}\colon \mathrm{D}(u')_\varphi \otimes_{\mathrm{D}(u)} M(u) \to \mathrm{D}(u')_v \otimes_{\mathrm{D}(u)} M(u)$.

Fixons une base $\mathfrak{B} = (e_1,\ldots,e_{r+s})$ de $M(u)$ (l'évaluation de $\mathscr{M}$ en $\mathsf{Spf}(S) \to \mathsf{Spf}(\mathrm{D}(u))$) telle que la base $u(\mathfrak{B})$ de $\mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S)}$ soit adaptée à la filtration $\mathrm{Fil}\,\mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S)}$ et telle que la matrice

$\Phi_S = \begin{pmatrix} p^{1-\mu}A & B \\ p^{1-\mu}C & D \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{s+r}(S')$ de Φ vérifie les conditions de la définition 3.22. On note alors $\mathrm{Fil}\, M(u)$ le sous-$\mathrm{D}(u)$-module de $M(u)$ engendré par $\{e_1, \ldots, e_s\}$: il relève $\mathrm{Fil}\, \mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S)}$.

Relevons maintenant la matrice Φ_S dans $\mathsf{M}_{r+s}(\mathrm{D}(u'))$ en posant

$$\Phi_{\mathrm{D}(u')} = \begin{pmatrix} X^{N(1-\mu)}\widehat{A} & \widehat{B} \\ X^{N(1-\mu)}\widehat{C} & D \end{pmatrix}$$

(où $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont des relèvements de A, B et C respectivement). Cela fournit un morphisme de $\mathrm{D}(u')$-modules $\mathrm{D}(u')_\varphi \otimes_{\mathrm{D}(u)} M(u) \to \mathrm{D}(u')_v \otimes_{\mathrm{D}(u)} M(u) = M(u')$ (distinct de $\phi_{M(u)}$ *a priori*). D'après la proposition 4.20 et sa preuve, le morphisme

$$\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S')_\sigma \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S')} \mathcal{M}(u') \to \mathcal{M}(u')$$

induit par ce dernier sur les sections horizontales coïncide avec l'opérateur induit par le Frobenius Φ.

Soient $X_1, \ldots, X_\delta$ un système de coordonnées locales de R/W et $X_{\delta+1}, \ldots, X_d$ un système de coordonnées locales de $T'/R\{X\}$. D'après la proposition 4.11, on a

$$\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u') \simeq \widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S')\{\langle u_0, u_1, \ldots, u_d\rangle\}$$

où $u_0 = X - [\widetilde{p}]^{1/N}$, $u_i = X_i - [\widetilde{s}_i]$ où $\widetilde{s}_i \in \mathcal{R}_{S'}$ est tel que $\widetilde{s}_i^{(0)} = u(X_i)$ (*cf* proposition 4.17). Pour $1 \leq i \leq \delta$, on peut prendre $\widetilde{s}_i = \widetilde{X}_i$ avec $\widetilde{X}_i \in \mathcal{R}_R$. Comme $(\mathscr{M}, \Phi)$ est *isotrivial*, on peut en outre supposer que $\det(D) = X_1 \cdots X_t$ avec $t \leq \delta$.

Rappelons que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(u') &\simeq \big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u') \otimes_{\mathrm{D}(u')} M(u')\big)/I'\big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u') \otimes_{\mathrm{D}(u')} M(u')\big) \\ &\simeq \big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')_v \otimes_{\mathrm{D}(u)} M(u)\big)/I'\big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)_v \otimes_{\mathrm{D}(u)} M(u)\big) \end{aligned}$$

où I' est l'adhérence pour la topologie p-adique de l'idéal à puissances divisées de $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')$ engendré par $u_0, \ldots, u_d$. On a $\varphi(u_0) = X^p - [\widetilde{p}]^{p/N} \in I'$ et pour $i \in \{1, \ldots, \delta\}$, on a $\varphi(u_i) = \varphi_T(X_i) - [\overline{v}(\widetilde{s}_i)^p] \equiv X_i^p - [\widetilde{s}_i]^p \mod X^{N(1-\mu)}\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')$ et donc $\varphi(u_i) \in (u_0, u_i, [\widetilde{p}]^{1-\mu})\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')$, ce qui implique que $\varphi(I) \subset I' + [\widetilde{p}]^{1-\mu}\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')$: la base $\mathfrak{B}$ de $M(u)$ induit une base $\widetilde{\mathfrak{B}} = (P(1 \otimes e_1), \ldots, P(1 \otimes e_{r+s}))$ sur $\mathcal{M}(u')$, dans laquelle la matrice du Frobenius est

$$\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} [\widetilde{p}]^{1-\mu}\widetilde{A} & \widetilde{B} \\ [\widetilde{p}]^{1-\mu}\widetilde{C} & \widetilde{D} \end{pmatrix}$$

(parce que c'est vrai modulo $[\widetilde{p}]^{1-\mu}$ d'après ce qui précède) avec $\det(\widetilde{D}) \equiv [\widetilde{X}_1 \cdots \widetilde{X}_t] \mod [\widetilde{p}]^{1-\mu}\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')$. Par hypothèse, on a $\det(D) \mid p^w$ donc $\det(\widetilde{D}) \mid [\widetilde{p}]^w$ avec $w < \frac{1-\mu}{pr + \frac{2p-1}{p-1}}$. On note

$$\mathrm{Fil}\, \mathcal{M}(u') = \big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')_v \otimes_{\mathrm{D}(u)} \mathrm{Fil}\, M(u)\big)/I'\big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u)_v \otimes_{\mathrm{D}(u)} \mathrm{Fil}\, M(u)\big)$$

le sous $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u')$-module de $\mathcal{M}(u')$ engendré par l'image de $\{e_1, \ldots, e_s\}$. On a

$$\Phi(\mathrm{Fil}\, \mathcal{M}(u')) \subseteq [\widetilde{p}]^{1-\mu}\mathcal{M}(u').$$

Via $\Xi_{u'}$ (*cf* proposition 4.25), le sous-module $\widetilde{\mathcal{M}}_{S'}$ correspond au sous-$\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S')$-module

$$\widetilde{\mathcal{M}}(u') := \mathrm{pr}_{1-\mu}^{-1}\big(\mathsf{Ker}(1 \otimes \overline{\phi}_{\mathcal{M}(u')})\big) + [\widetilde{p}]^w \mathcal{M}(u')$$

où on note encore $\mathrm{pr}_{1-\mu}$ le morphisme $\mathcal{M}(u') \to \widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S')_\sigma \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S')} \big(\mathcal{M}(u')/[\widetilde{p}]^{1-\mu}\mathcal{M}(u')\big)$ de réduction modulo $[\widetilde{p}]^{1-\mu}$ et où $1 \otimes \overline{\phi}_{\mathcal{M}(u')}$ désigne la linéarisation du Frobenius sur $\mathcal{M}(u')/[\widetilde{p}]^{1-\mu}\mathcal{M}(u')$. La matrice de ce dernier dans la base $\overline{\mathfrak{B}}$ déduite de $\widetilde{\mathfrak{B}}$ est

$$\overline{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{B} \\ 0 & \overline{D} \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{r+s}\big(\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S')/[\widetilde{p}]^{1-\mu}\, \widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S')\big)$$

Si $\overline{X} = \begin{pmatrix}\overline{X}_1\\ \overline{X}_2\end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{r+s,r}\big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')/[\widetilde{p}]^{1-\mu}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\big)$, on a $\overline{\Phi X} = 0$ si et seulement si $\overline{BX}_2 = 0$ et $\overline{DX}_2 = 0$. Comme $\det(\widetilde{D}) \mid [\widetilde{p}]^{w}$, cela implique $\overline{X}_2 \in [\widetilde{p}]^{1-\mu-w}\,\mathsf{M}_r\big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')/[\widetilde{p}]^{1-\mu}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')\big)$. Ainsi, on a

$$\operatorname{Fil}\mathcal{M}(u') \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}(u') \subseteq \operatorname{Fil}\mathcal{M}(u') + [\widetilde{p}]^{w}\mathcal{M}(u')$$

(parce que $w < 1-\mu-w$), de sorte que

$$\widetilde{\mathcal{M}}(u') = \operatorname{Fil}\mathcal{M}(u') + [\widetilde{p}]^{w}\mathcal{M}(u')$$

La proposition 4.27 appliquée au σ-module $\mathcal{M}(u')$ muni de $\operatorname{Fil}\mathcal{M}(u')$ fournit un sous-σ-module $\mathcal{U}(u') \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}(u') := \operatorname{Fil}\mathcal{M}(u') + [\widetilde{p}]^{w}\mathcal{M}(u')$, qui ne dépend que de u' et pas de $\operatorname{Fil}\mathcal{M}(u')$. Posons alors

$$\mathcal{U}_{S'} = \Xi_{u'}(\mathcal{U}(u'))$$

Il reste à montrer que $\mathcal{U}_{S'}$ est indépendant de u'.

Soient $u'_1\colon T'_1 \to S'$ et $u'_2\colon T'_2 \to S'$ deux R-présentations. On dispose alors de la présentation $u'_1 \otimes u'_2\colon T'_1\widehat{\otimes}_R T'_2 \to S'$: considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & T'_1\widehat{\otimes}_R T'_2 \arrow[dd, "u'_1\otimes u'_2"] & \\
T'_1 \arrow[ur, "\mathrm{Id}_{T'_1}\otimes 1"] \arrow[dr, "u'_1"'] & & T'_2 \arrow[ul, "1\otimes\mathrm{Id}_{T'_2}"'] \arrow[dl, "u'_2"] \\
 & S' &
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathscr{M}$ est un cristal, on en déduit des isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
 & M(u'_1\otimes u'_2) & \\
\mathrm{D}(u'_1\otimes u'_2)\otimes_{\mathrm{D}(u'_1)} M(u'_1) \arrow[ur, "\sim"] & & \mathrm{D}(u'_1\otimes u'_2)\otimes_{\mathrm{D}(u'_2)} M(u'_2) \arrow[ul, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Les modules $\operatorname{Fil}M(u'_1)$ et $\operatorname{Fil}M(u'_2)$ définissent deux filtrations de $M(u'_1\otimes u'_2)$.

En étendant les scalaires à $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u'_1\otimes u'_2)$ et en prenant les sections horizontales, on a des isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
 & \big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u'_1\otimes u'_2)\otimes_{\mathrm{D}(u'_1\otimes u'_2)} M(u'_1\otimes u'_2)\big)^{\nabla=0} & \\
\big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u'_1\otimes u'_2)\otimes_{\mathrm{D}(u'_1)} M(u'_1)\big)^{\nabla=0} \arrow[ur, "\sim"] & & \big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u'_1\otimes u'_2)\otimes_{\mathrm{D}(u'_2)} M(u'_2)\big)^{\nabla=0} \arrow[ul, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Notons que d'après la proposition 4.17, on a $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u'_i)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')}\mathcal{M}(u'_i) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u'_i)\otimes_{\mathrm{D}(u'_i)} M(u'_i)$, de sorte que

$$\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u'_1\otimes u'_2)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')}\mathcal{M}(u'_i) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u'_1\otimes u'_2)\otimes_{\mathrm{D}(u'_i)} M(u'_i)$$

et donc $\mathcal{M}(u'_i) \xrightarrow{\sim} \big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u'_1\otimes u'_2)\otimes_{\mathrm{D}(u'_i)} M(u'_i)\big)^{\nabla=0}$ pour $i\in\{1,2\}$. On a donc les isomorphismes canoniques

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}(u'_1\otimes u'_2) & \\
\mathcal{M}(u'_1) \arrow[ur, "\sim"] & & \mathcal{M}(u'_2) \arrow[ul, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

La proposition 4.27 appliqué à $\mathcal{M}(u'_1)$, $\mathcal{M}(u'_2)$ et $\mathcal{M}(u'_1\otimes u'_2)$ fournit des sous-σ-modules $\mathcal{U}(u'_1)$, $\mathcal{U}(u'_2)$ et $\mathcal{U}(u'_1\otimes u'_2)$ sur $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S')$ (remarquons qu'ils ne dépendent pas des sous-modules $\operatorname{Fil}M(u'_1)$

et $\operatorname{Fil} M(u_2')$ d'après la proposition 4.27). Par unicité dans la proposition 4.27, on en déduit des isomorphismes canoniques de σ-modules sur $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S')$:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U}(u_1'\otimes u_2') & \\ \mathcal{U}(u_1') \arrow[ur, "\sim"] & & \mathcal{U}(u_2') \arrow[ul, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}(u_1') \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"] & \mathcal{M}(u_1') \arrow[d, "\sim"] \arrow[dr, "\Xi_{u_1'}"] & \\ \mathcal{U}(u_1'\otimes u_2') \arrow[r, hook] & \mathcal{M}(u_1'\otimes u_2') \arrow[r, "\Xi_{u_1'\otimes u_2'}"] & \mathcal{M}_{S'} \\ \mathcal{U}(u_2') \arrow[r, hook] \arrow[u, "\sim"'] & \mathcal{M}(u_2') \arrow[u, "\sim"'] \arrow[ur, "\Xi_{u_2'}"'] & \end{tikzcd}$$

qui permet de conclure. $\square$

Remarque 4.29. (1) D'après Dwork (*cf* [15]), pour le relèvement excellent de Katz-Lubin du Frobenius, le Frobenius du cristal unité de la famille de Legendre surconverge, mais ce n'est pas le cas pour le relèvement naturel $\varphi(\lambda) = \lambda^p$. Il en résulte que le théorème précédent n'est pas valide au niveau de cristaux sur $\mathsf{Spf}(S)$.

(2) Bien sûr, les modules $\widetilde{\mathcal{M}}(u')$ et $\mathcal{U}(u')$ dépendent de u' et ne sont *a priori* pas munis d'une action de $\mathcal{G}_{S'}$ pour laquelle $\Xi_{u'}$ serait équivariant.

4.30. Données de recollement. Plaçons-nous sous les hypothèses du paragraphe 4.24 dont on conserve les notations.

Soient $\mathsf{Spf}(S_2) \subseteq \mathsf{Spf}(S_1) \subseteq \mathcal{V}$ deux ouverts affines, avec $S_1, S_2 \in \mathscr{C}$. D'après le paragraphe 4.13, si on fixe un morphisme $E_{S_1} \to E_{S_2}$ au-dessus du morphisme injectif $S_1 \to S_2$, on a des morphismes $\overline{S}_1 \to \overline{S}_2$ et $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_1) \to \widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_2)$. En particulier, on a un morphisme $\overline{S}_1/p^{1-1/p}\overline{S}_1 \to \overline{S}_2/p\overline{S}_2$ qui, par fonctorialité de la cohomologie cristalline, induit un morphisme $\mathcal{M}_{S_1} \to \mathcal{M}_{S_2}$ et donc, par $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_2)$-linéarité, un morphisme

$$f_{S_2,S_1} \colon \widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_2) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_1)} \mathcal{M}_{S_1} \to \mathcal{M}_{S_2}$$

compatible aux Frobenius ainsi qu'à l'action de $\mathcal{G}_{S_2}$.

Proposition 4.31. *L'application f_{S_2,S_1} est un isomorphisme, et sous les hypothèses du paragraphe 4.13 pour S_1, elle induit un isomorphisme*

$$f_{S_2,S_1} \colon \widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_2') \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_1')} \mathcal{U}_{S_1'} \to \mathcal{U}_{S_2'}$$

Démonstration. Soient $u_1 \colon T_1 \to S_1$ et $u_2 \colon T_2 \to S_2$ des présentations et $v = (v_T, v_S)$ un morphisme de présentations. On suppose $\mathsf{Spf}(S_1)$ assez petit pour que les S_1-modules $\operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S_1)}$ et $\mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S_1)}/\operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S_1)}$ soient libres. Le morphisme v induit un morphisme $\mathrm{D}(u_1) \to \mathrm{D}(u_2)$, et comme $\mathscr{M}$ est un cristal, on a un isomorphisme

$$\mathrm{D}(u_2) \otimes_{\mathrm{D}(u_1)} M(u_1) \xrightarrow{\sim} M(u_2)$$

De même, on dispose d'un morphisme $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u_1) \to \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u_2)$ (*cf* paragraphe 4.13) : en étendant les scalaires à $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u_2)$, on en déduit un isomorphisme

$$\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u_2) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u_1)} \big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u_1) \otimes_{\mathrm{D}(u_1)} M(u_1)\big) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u_2) \otimes_{\mathrm{D}(u_2)} M(u_2)$$

Comme on a $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u_1) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_1)} \mathcal{M}(u_1) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u_1) \otimes_{\mathrm{D}(u_1)} M(u_1)$ comme modules à connexion, on a

$$\Big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u_2) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u_1)} \big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(u_1) \otimes_{\mathrm{D}(u_1)} M(u_1)\big)\Big)^{\nabla=0} = \widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_2) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_1)} \mathcal{M}(u_1)$$

et l'isomorphisme précédent induit un isomorphisme

$$\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_2)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_1)}\mathcal{M}(u_1)\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}(u_2)$$

en prenant les sections horizontales. Via les isomorphismes Ξ_{u_1} et Ξ_{u_2}, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_2)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_1)}\mathcal{M}(u_1) \arrow[r] \arrow[d, "1\otimes\Xi_{u_1}"'] & \mathcal{M}(u_2) \arrow[d, "\Xi_{u_2}"] \\
\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_2)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_1)}\mathcal{M}_{S_1} \arrow[r, "f_{S_2,S_1}"] & \mathcal{M}_{S_2}
\end{tikzcd}$$

ce qui prouve que f_{S_2,S_1} est un isomorphisme.

Le fait que f_{S_1,S_2} induit un isomorphisme $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_2')\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_1')}\mathcal{U}_{S_1'}\to\mathcal{U}_{S_2'}$ résulte de l'unicité de $\mathcal{U}_{S_2'}$ (*cf* théorème 4.28). □

L'ouvert $\mathcal{V}$ est connexe et réduit donc irréductible : soit Ω une clôture algébrique de son corps des fractions. Si $\mathsf{Spf}(S)\subseteq\mathcal{V}$ est un ouvert affine avec $S\in\mathscr{C}$, on note E_S la clôture algébrique de $\mathsf{Frac}(S)$ dans Ω.

Soient $\mathsf{Spf}(S_1)$ et $\mathsf{Spf}(S_2)$ deux ouverts affines de $\mathcal{V}$. Comme $\mathcal{X}$ est quasi-projectif, l'intersection $\mathsf{Spf}(S_1)\cap\mathsf{Spf}(S_2)=\mathsf{Spf}(S_{1,2})$ est affine. Supposons $S_1,S_2\in\mathscr{C}$ et $\mathsf{Spf}(S_1)$ et $\mathsf{Spf}(S_2)$ assez petits de sorte qu'on dispose de présentations u_1, u_2 et $u_{1,2}$ de S_1, S_2 et $S_{1,2}$ respectivement telles que $\mathrm{Fil}\,\mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S_i)}$ et $\mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S_i)}/\mathrm{Fil}\,\mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S_i)}$ soient libres sur S_i pour $i\in\{1,2\}$. Par construction. on dispose de morphismes compatibles $E_{S_1}\to E_{S_{1,2}}$ et $E_{S_2}\to E_{S_{1,2}}$: on dispose des isomorphismes

$$\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_{1,2}')\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_1')}\mathcal{U}_{S_1'}\xrightarrow{f_{S_{1,2},S_1}}\mathcal{U}_{S_{1,2}'}\xleftarrow{f_{S_{1,2},S_2}}\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_{1,2}')\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_2')}\mathcal{U}_{S_2'}$$

et donc d'un isomorphisme de transition

$$f_{S_2,S_1}:=f_{S_{1,2},S_2}^{-1}\circ f_{S_{1,2},S_1}\colon\ \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_{1,2}')\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_1')}\mathcal{U}_{S_1'}\xrightarrow{\sim}\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_{1,2}')\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_2')}\mathcal{U}_{S_2'}$$

Soit $\mathsf{Spf}(S_3)\subseteq\mathcal{V}$ avec $S_3\in\mathscr{C}$ tels que les S_3-modules $\mathrm{Fil}\,\mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S_3)}$ et $\mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S_3)}/\mathrm{Fil}\,\mathscr{M}_{\mathsf{Spf}(S_3)}$ soient libres. On a la relation de cocycle

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_{1,2,3}')\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_1')}\mathcal{U}_{S_1'} \arrow[rr, "1\otimes f_{S_2,S_1}"] \arrow[dr, "1\otimes f_{S_3,S_1}"'] & & \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_{1,2,3}')\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_2')}\mathcal{U}_{S_1'} \arrow[dl, "1\otimes f_{S_3,S_2}"] \\
& \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_{1,2,3}')\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S_3')}\mathcal{U}_{S_3'} &
\end{tikzcd}$$

Remarque 4.32. On peut penser que le site de Faltings est le cadre naturel pour traiter le problème de recollement. N'ayant besoin que de techniques cristallines, nous nous sommes contentés de faire les choses à la main.

5. Le module syntomique

5.1. Définition du module syntomique. Soit $(\mathcal{M},\phi)$ un σ-module sur $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$.

(1) Si Λ est une $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$-algèbre séparée et complète pour la topologie p-adique et $n\in\mathbf{N}$, on note $J^{[n]}\Lambda$ l'adhérence, pour la topologie p-adique, de l'idéal de Λ engendré par $\{\xi^{\{m\}}\}_{m\geq n}$. C'est un idéal à puissances divisées.

(2) Soient Λ,Λ' deux $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$-algèbres séparées et complètes pour la topologie p-adique, et $\varphi\colon\Lambda\to\Lambda'$ un morphisme σ-linéaire (*i.e.* tel que $\varphi(a\lambda)=\sigma(a)\varphi(\lambda)$ pour $a\in\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ et $\lambda\in\Lambda$, où σ désigne l'endomorphisme de Frobenius de $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$). Supposons en outre Λ' sans p-torsion.

On a $\sigma([\widetilde{p}])=[\widetilde{p}]^p=(\xi+p)^p=\xi^p+p^2\eta=p(\gamma(\xi)+p\eta)$ avec $\eta\in\mathbf{Z}[\xi]$ (où γ désigne l'application $x\mapsto x^p/p$), donc

$$\sigma(\xi^{\{m\}})=(\sigma([\widetilde{p}])-p)^{\{m\}}=\tfrac{p^m}{p^{q(m)}q(m)!}(\gamma(\xi)+p\eta-1)^m$$

Comme $v_p\big(\frac{p^m}{p^{q(m)}q(m)!}\big)=m-q(m)-v_p(q(m)!)=(p-2)q(m)+r(m)-\frac{q(m)-s(q(m))}{p-1}>\big(p-2-\frac{1}{p-1}\big)q(m)+r(m)\geq\frac{q(m)}{p-1}+r(m)>0$ (car $p\geq 3$), on a $\varphi(J^{[1]}\Lambda)\subset p\Lambda'$: comme Λ' est sans p-torsion, on peut définir l'application σ-linéaire

$$\begin{aligned}\varphi_1\colon J^{[1]}\Lambda&\to\Lambda'\\ \lambda&\mapsto\varphi(\lambda)/p\end{aligned}$$

(3) Soit de plus $v\colon\Lambda\to\Lambda'$ un morphisme $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$-linéaire. On dispose alors d'un morphisme *syntomique*

$$J^{[1]}\Lambda\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\mathcal{M}\xrightarrow{\varphi_1\otimes\phi-v\otimes 1}\Lambda'\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\mathcal{M}$$

qu'on note $\mathscr{S}(v,\varphi,(\mathcal{M},\phi))$ (où, par abus, on note 1 le morphisme $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$). Il est $\mathbf{Z}_p$-linéaire, et si Λ,Λ' sont munies d'une action continue de $\mathcal{G}_S$ et si v,φ sont $\mathcal{G}_S$-équivariants est continus pour la topologie p-adique, il en est de même du morphisme syntomique. Le *module syntomique*

$$\mathbf{V}(v,\varphi,(\mathcal{M},\phi)):=\mathsf{Ker}\big(\mathscr{S}(v,\varphi,(\mathcal{M},\phi))\big)$$

est alors un $\mathbf{Z}_p$-module. Si $\mathcal{M}$ est en outre muni d'une action semi-linéaire continue de $\mathcal{G}_S$, qui commute à l'action de φ, le $\mathbf{Z}_p$-module $\mathbf{V}(v,\varphi,(\mathcal{M},\phi))$ est muni d'une action linéaire continue de $\mathcal{G}_S$.

5.2. Quelques propriétés de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ et $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$. Fixons une suite $\zeta=\big(\zeta^{(n)}\big)_{n\in\mathbf{N}}\in\overline{W}^{\mathbf{N}}$ de racines primitives p^n-ièmes de l'unité, telles que $\big(\zeta^{(n+1)}\big)^p=\zeta^{(n)}$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, de sorte que $\zeta\in\mathcal{R}_W\subseteq\mathcal{R}_S$. On pose $\varpi=\frac{[\zeta]-1}{[\zeta]^{1/p}-1}=1+[\zeta]^{1/p}+\cdots+[\zeta]^{1-1/p}\in\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$: c'est un générateur de $\mathsf{Ker}(\theta)\subset\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$, de sorte que $\xi\in\varpi\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)^\times$, et

$$t=\log[\zeta]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}([\zeta]-1)^n\in\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathbf{Z}_p)\subseteq\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\subseteq\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$$

rappelons que $\varphi(t)=pt$ et $t^{p-1}/p\in\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(\mathbf{Z}_p)$ ([35, Corollary A3.2] et [18, Théorème 5.2.7]) : on pose alors

$$t^{\{n\}}=\big(t^{p-1}/p\big)^{[q(n)]}t^{r(n)}=\frac{t^n}{p^{q(n)}q(n)!}$$

En outre, $t^{\{n\}}$ divise $t^{[n]}$ dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ (*cf* [35, Sublemma A3.8]). Si $r\in\mathbf{N}$, on pose

$$I^{[r]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)=\big\{x\in\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S),\ (\forall m\in\mathbf{N})\,\varphi^m(x)\in\mathrm{Fil}^r\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S):=J^{[r]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\big\}$$

On a $I^{[0]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)=\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$, et

$$I^{[r]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)=\Big\{\sum_{n=r}^{\infty}a_nt^{\{n\}},\ (\forall n\geq r)\,a_n\in\mathrm{W}(\mathcal{R}_S),\ \lim_{n\to\infty}a_n=0\Big\}$$

(*cf* [18, Proposition 5.3.1] et [35, Proposition A3.20]).

Lemme 5.3. *On a* $[\zeta]-1\in t\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$.

Démonstration. On a $[\zeta]-1=\exp(t)-1=t\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n!}\Big)$. Comme $\frac{t^{n-1}}{n!}=\frac{p^{q(n-1)}q(n-1)!}{n!}t^{\{n-1\}}\in q(n-1)!\,\mathbf{Z}_p\,t^{\{n-1\}}$ (car $n-1=(p-1)v_p(n!)+s(n)-1\geq(p-1)v_p(n!)\Rightarrow q(n-1)\geq v_p(n!)$) et $\lim\limits_{n\to\infty}v_p(q(n-1)!)=+\infty$, la série de terme général $\frac{t^{n-1}}{n!}$ converge dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$. □

Lemme 5.4. *On a* $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)=\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)+I^{[p-1]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$.

Démonstration. Comme $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) = I^{[0]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) = \sum\limits_{n=0}^{p-2} \mathrm{W}(\mathcal{R}_S)t^{\{n\}} + I^{[p-1]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$, il s'agit de montrer que pour tout $n \in \{0, \dots, p-2\}$, on a $t^{\{n\}} \in \mathrm{W}(\mathcal{R}_S) + I^{[p-1]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$. D'après le lemme 5.3, on peut écrire $[\zeta] - 1 = at$ avec $a \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$. On a alors

$$\begin{aligned} t = \log([\zeta]) &= [\zeta] - 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}([\zeta]-1)^n \\ &= [\zeta] - 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}(n-1)!t^{[n]}a^n = [\zeta] - 1 + b \end{aligned}$$

avec $b \in I^{[2]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$. Si $n < p-1$, on a donc

$$t^{\{n\}} = t^n = ([\zeta] - 1 + b)^n = ([\zeta]-1)^n + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} b^j t^{n-j} a^{n-j}$$

On a $b^j \in I^{[2j]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ (car $I^{[r]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S).I^{[s]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) \subset I^{[r+s]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ en vertu de [35, Lemma A3.10 (1)]), donc $b^j t^{n-j} \in I^{[n+j]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$, de sorte que

$$t^{\{n\}} \in ([\zeta]-1)^n + I^{[n+1]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) \subset \mathrm{W}(\mathcal{R}_S) + I^{[n+1]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$$

□

On pose $I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) = \big\{x \in J^{[p-2]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S),\ (\forall m \in \mathbf{N}_{>0})\,\varphi^m(x) \in J^{[p-1]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\big\}$.

Lemme 5.5. *On a* $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \cap I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) = ([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$.

Démonstration. Observons déjà que $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \cap I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) = \big\{x \in \mathrm{Fil}^{p-2}\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S),\ (\forall m \in \mathbf{N}_{>0})\,\varphi^m(x) \in \mathrm{Fil}^{p-1}\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\big\}$: cela résulte de l'injectivité de $\mathrm{gr}^r\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_R) = \widehat{\widehat{S}}\xi^r \to \mathrm{gr}^r\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) = \widehat{\widehat{S}}\xi^{\{r\}}$ pour tout $r \in \mathbf{N}$ (*cf* proposition 4.7 (2)).

Soit $x \in \mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \cap I^{[p-1]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$. On a bien sûr $x \in I^{[p-2]}\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S) = ([\zeta]-1)^{p-2}\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$: écrivons $x = ([\zeta]-1)^{p-2}y$ avec $y \in \mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$. Pour $m \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $\varphi^m(x) = \big([\zeta]^{p^m}-1\big)^{p-2}\varphi^m(y)$. On a $\big([\zeta]^{p^m}-1\big)^{p-2} = ([\zeta]-1)^{p-2}a^{p-2} = \varpi^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)^{p-2}a^{p-2}$ avec $a = 1+[\zeta]+\cdots+[\zeta]^{p^m-1}$, de sorte que $\big([\zeta]^{p^m}-1\big)^{p-2} \in \mathrm{Fil}^{p-2}\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \setminus \mathrm{Fil}^{p-1}\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ (car $\theta\big(([\zeta]^{1/p}-1)a\big) = (\zeta^{(1)}-1)p^m \neq 0$). On a donc $\varphi^m(y) \in \mathrm{Fil}^1\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ pour tout $m \in \mathbf{N}_{>0}$, *i.e.* $\varphi(y) \in I^{[1]}\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S) = ([\zeta]-1)\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$, d'où $y \in ([\zeta]^{1/p}-1)\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$, et donc $x \in ([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$.

L'inclusion réciproque est évidente. □

Proposition 5.6. *L'application naturelle* $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \to \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)/([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)/I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$$

Démonstration. Le fait qu'on ait une telle application et son injectivité résultent du lemme 5.5. Comme $I^{[p-1]}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) \subset I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$: le lemme 5.4 implique que

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) + I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) = \mathrm{W}(\mathcal{R}_S) + I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$$

Pour montrer la surjectivité, il suffit donc de prouver que $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) + I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$, *i.e.* que pour tout $m \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $\xi^{\{m\}} \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) + I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$. Comme $\xi^{\{m\}} = \big(\xi^{[p-1]}\big)^{[q(m)]}\xi^{r(m)}$, et comme $\xi \in \varpi\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)^{\times}$, il suffit de voir que pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $\big(\varpi^{\{p-1\}}\big)^{[n]} \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S) + I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$.

L'image de ϖ dans $\mathcal{R}_S$ est $(\zeta^{1/p}-1)^{p-1}$: on a $\varpi \equiv ([\zeta]^{1/p}-1)^{p-1} \mod p\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$, donc

$$\begin{aligned} \varpi^{p-1} &\equiv ([\zeta]^{1/p}-1)^{(p-1)^2} \mod p\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \equiv ([\zeta]-1)^{p-2+1/p} \mod p\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \\ &\equiv ([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1) \mod p\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \end{aligned}$$

ce qui implique qu'il existe $x \in \mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ tels que $\varpi^{p-1} = px + ([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)$. Comme $\varpi, [\zeta]-1 \in \mathsf{Ker}(\theta)$, on a aussi $x \in \mathsf{Ker}(\theta)$ (car $\widehat{\widehat{S}}$ n'a pas de p-torsion), ce qui implique que x a des puissances divisées dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$. Pour $n\in\mathbf{N}_{>0}$, on a donc $\varpi^{(p-1)n}=\sum_{i=0}^{n}p^{n-i}x^{[n-i]}\big(([\zeta]-1)^{p-2}\big)^{[i]}([\zeta]^{1/p}-1)^{i}$ d'où

$$\big(\xi^{\{p-1\}}\big)^{[n]}=x^{[n]}+y$$

avec $y=\sum_{i=1}^{n}p^{-i}\big(([\zeta]-1)^{p-2}\big)^{[i]}([\zeta]^{1/p}-1)^{i}x^{[n-i]}$. Montrons que $y\in I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$.

On a $([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)=\varpi^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)^{p-1}$. Comme $([\zeta]^{1/p}-1)^{p-1}\equiv\varpi \mod p\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$, il existe $z\in\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ tel que $([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)=\varpi^{p-1}+pz\varpi^{p-2}$. Pour $i\in\{1,\ldots,n\}$, on a

$$\begin{aligned}p^{-i}\big(([\zeta]-1)^{p-2}\big)^{[i]}([\zeta]^{1/p}-1)^{i}&=p^{-i}(\varpi^{p-1}+pz\varpi^{p-2})^{[i]}\\&=p^{-i}\sum_{j=0}^{i}\big(\varpi^{p-1}\big)^{[j]}(pz)^{i-j}(\varpi^{p-2})^{[i-j]}\\&=\sum_{j=0}^{i}\big(\varpi^{\{p-1\}}\big)^{[j]}z^{i-j}(\varpi^{p-2})^{[i-j]}\in J^{[p-2]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\end{aligned}$$

ce qui implique que $y\in J^{[p-2]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$. Par ailleurs, si $m\in\mathbf{N}_{>0}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi^{m}\big(p^{-i}\big(([\zeta]-1)^{p-2}\big)^{[i]}([\zeta]^{1/p}-1)^{i}\big)&=p^{-i}\big([\zeta]^{p^m}-1)^{p-2}\big)^{[i]}([\zeta]^{p^{m-1}}-1)^{i}\\&\in\tfrac{([\zeta]-1)^{(p-1)i}}{i!p^{i}}\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\\&\in\big(\varpi^{\{p-1\}}\big)^{[i]}\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\subset J^{[p-1]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\end{aligned}$$

(car $[\zeta]-1\mid[\zeta]^{p^{m-1}}-1$ et $i\geq 1$), et donc $\varphi^{m}(y)\in J^{[p-1]}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$, ce qu'on voulait. □

5.7. L'anneau $\Lambda_\alpha(S)$.

Définition 5.8. On pose

$$\Lambda_0(S)=\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)/([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$$

D'après la proposition 5.6, on a

$$\Lambda_0(S)\simeq\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)/I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$$

Comme $I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)\subset\mathsf{Ker}(\theta)$, l'homomorphisme θ induit un morphisme $\theta\colon\Lambda_0(S)\to\widehat{\overline{S}}$. L'anneau $\Lambda_0(S)$ est muni d'un endomorphisme de Frobenius et d'une action de $\mathcal{G}_S$ induits par les structures correspondantes sur $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$. Comme $\mathsf{Ker}\big(\theta\colon\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\to\widehat{\overline{S}}\big)=\xi\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$, on a $J^{[1]}\Lambda_0(S)=\xi\Lambda_0(S)$.

Corollaire 5.9. *L'application $\mathcal{R}_S\to\overline{S}/p\overline{S};\ x\mapsto x_1$ induit un isomorphisme*

$$\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)\xrightarrow{\sim}\mathcal{R}_S/(\zeta^{1/p}-1)^{(p-1)^2}\mathcal{R}_S\xrightarrow{\sim}\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1}\mathcal{R}_S\xrightarrow{\sim}\overline{S}/p^{1-1/p}\overline{S}$$

Démonstration. D'après la proposition 5.6, il suffit de voir que l'application $f\colon\mathcal{R}_S\to\overline{S}/p\overline{S};\ x\mapsto x_1$ induit un isomorphisme $\mathcal{R}_S/(\zeta^{1/p}-1)^{(p-1)^2}\mathcal{R}_S\xrightarrow{\sim}\overline{S}/p^{1-1/p}\overline{S}$. L'application f est surjective, et son noyau est l'idéal engendré par $\widetilde{p}^{p}$. L'anneau $\mathcal{R}_{\mathbf{Z}_p}$ est de valuation : notons $v_{\mathbf{E}}$ la valuation normalisée par $v_{\mathbf{E}}(\widetilde{p})=1$. On a $v_{\mathbf{E}}(\zeta-1)=\lim\limits_{n\to\infty}p^{n}v\big(\zeta^{(n)}-1\big)=\frac{p}{p-1}$, de sorte que $v_{\mathbf{E}}\big((\zeta^{1/p}-1)^{(p-1)^2}\big)=p-1=v_{\mathbf{E}}\big(\widetilde{p}^{p-1}\big)$, ce qui implique que $(\zeta^{1/p}-1)^{(p-1)^2}\in\widetilde{p}^{p-1}\mathcal{R}_{\mathbf{Z}_p}^{\times}$. □

Lemme 5.10. *$\sigma_1(\xi)$ est inversible dans $\Lambda_0(S)\simeq\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)/I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$.*

Démonstration. On a $\sigma_1(\xi)=\frac{\widetilde{[p]}^{p}}{p}-1\equiv-1-\xi^{[p]}\mod p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ et $\xi^{[p]}$ a une image nilpotente dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$, de sorte que $\sigma_1(\xi)$ est inversible dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ (ce dernier étant complet pour la topologie p-adique), et *a fortiori* dans $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ et dans $\Lambda_0(S)$. □

Dans tout ce qui suit, on fixe un relèvement $u\in\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ de l'image de $\sigma_1(\xi)$ dans $\Lambda_0(S)=\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)/([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$. D'après le lemme 5.10, l'image de u modulo $\big(p,([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)\big)$ est inversible, il en résulte que $u\in\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)^{\times}$.

Lemme 5.11. *L'anneau* $\Lambda_0(S) = \mathrm{W}(\mathcal{R}_S)/([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ *n'a pas de p-torsion.*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ tels que $px = ([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)y$. Modulo p, on en déduit $(\zeta^{1/p}-1)^{(p-1)^2}\overline{y} = 0$, *i.e.* $\widetilde{p}^{p-1}\overline{y} = 0$. Comme $\widehat{\overline{S}}$ n'a pas de p-torsion, l'anneau $\mathcal{R}_S$ n'a pas de $\widetilde{p}$-torsion, de sorte que $\overline{y} = 0$. On a donc $px \in p([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$, et donc $x \in ([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ vu que $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ n'a pas de p-torsion. $\square$

Lemme 5.12. *Si* $\alpha \in \mathbf{Q}_{>0}$*, l'anneau* $\Lambda_0(S)[T]$ *n'a pas de* $([\widetilde{p}]^\alpha T - p)$*-torsion.*

Démonstration. Soit $f = \sum_{n=0}^N a_n T^n \in \Lambda_0(S)[T]$ tel que $([\widetilde{p}]^\alpha T - p)f = 0$. On a donc $pa_0 = 0$ et $pa_{n+1} = [\widetilde{p}]^\alpha a_n$ pour $0 \leq n < N$. Le lemme 5.11 et une récurrence immédiate impliquent que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et donc que $f = 0$. $\square$

Si $\alpha \in \mathbf{Q} \cap [0, p-1[$, posons

$$\widetilde{\Lambda}_\alpha(S) = \Lambda_0(S)\big[T_\alpha\big]/\big([\widetilde{p}]^\alpha T_\alpha - p\big)\Lambda_0(S)\big[T_\alpha\big] = \mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\left[\frac{p}{[\widetilde{p}]^\alpha}\right]\Big/([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\left[\frac{p}{[\widetilde{p}]^\alpha}\right]$$

C'est une $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S)$-algèbre munie d'une action de $\mathcal{G}_S$. Si $\alpha > 0$, elle a de la p-torsion. En effet, on peut écrire $[\widetilde{p}]^{p-1} = p!\big([\widetilde{p}]^{1-1/p}\big)^{[p]}$ de sorte que

$$[\widetilde{p}]^{p-1} = p\lambda$$

avec $\lambda = (p-1)!\big([\widetilde{p}]^{1-1/p}\big)^{[p]} \in \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S)$. On note encore λ son image dans $\Lambda_0(S)$: on a

$$p\big([\widetilde{p}]^{p-1-\alpha} - \lambda T_\alpha\big) = [\widetilde{p}]^{p-1-\alpha}\big(p - [\widetilde{p}]^\alpha T_\alpha\big) = 0$$

dans $\widetilde{\Lambda}_\alpha(S)$.

Lemme 5.13. *Si* $\alpha \in [0, p-1[$*, le noyau de la multiplication par p dans* $\widetilde{\Lambda}_\alpha(S)$ *est l'idéal engendré par* $[\widetilde{p}]^{p-1-\alpha} - \lambda T_\alpha$.

Démonstration. D'après les lemmes 5.11 & 5.12, l'anneau $A = \Lambda_0(S)\big[T_\alpha\big]$ n'a pas de p-torsion et pas de $([\widetilde{p}]^\alpha T_\alpha - p)$-torsion : on a le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "{[\widetilde{p}]^\alpha T_\alpha - p}"] \arrow[d, "p"] & A \arrow[r] \arrow[d, "p"] & \widetilde{\Lambda}_\alpha(S) \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "{[\widetilde{p}]^\alpha T_\alpha - p}"] & A \arrow[r] & \widetilde{\Lambda}_\alpha(S) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et la suite exacte $0 \to A \xrightarrow{p} A \to (\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1}\mathcal{R}_S)[T_\alpha] \to 0$ (*cf* corollaire 5.9). Le lemme du serpent implique donc que

$$\begin{aligned}\mathsf{Ker}\,\big(p\colon \widetilde{\Lambda}_\alpha(S) \to \widetilde{\Lambda}_\alpha(S)\big) &= \mathsf{Ker}\,\big(\widetilde{p}^\alpha T_\alpha\colon (\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1}\mathcal{R}_S)[T_\alpha] \to (\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1}\mathcal{R}_S)[T_\alpha]\big)\\ &= \widetilde{p}^{p-1-\alpha}(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1}\mathcal{R}_S)[T_\alpha]\end{aligned}$$

vu que $\mathcal{R}_S$ n'a pas de $\widetilde{p}$-torsion et $\alpha < p-1$. Comme

$$\begin{aligned}\widetilde{p}^{p-1-\alpha}(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1}\mathcal{R}_S)[T_\alpha] &= \widetilde{p}^{p-1-\alpha}(A/pA)\\ &= \widetilde{p}^{p-1-\alpha}(\widetilde{\Lambda}_\alpha(S)/p\widetilde{\Lambda}_\alpha(S))\end{aligned}$$

(car $[\widetilde{p}]^{p-1-\alpha}([\widetilde{p}]^\alpha T_\alpha - p)$ a une image nulle dans A/pA) : l'inclusion

$$([\widetilde{p}]^{p-1-\alpha} - \lambda T_\alpha)\widetilde{\Lambda}_\alpha(S) \subset \mathsf{Ker}\,\big(p\colon \widetilde{\Lambda}_\alpha(S) \to \widetilde{\Lambda}_\alpha(S)\big)$$

est donc une égalité. $\square$

Définition 5.14. Si $\alpha \in \mathbf{Q} \cap [0, 1[$, on note $\Lambda_\alpha(S)$ le séparé complété, pour la topologie p-adique, du quotient de $\widetilde{\Lambda}_\alpha(S)$ par sa p-torsion. D'après le lemme 5.13, on a

$$\Lambda_\alpha(S) \simeq \varprojlim_n \Lambda_0(S)\big[T_\alpha\big]/\big([\widetilde{p}]^\alpha T_\alpha - p, [\widetilde{p}]^{p-1-\alpha} - \lambda T_\alpha, p^n\big)\Lambda_0(S)\big[T_\alpha\big]$$

(remarquons que la notation est consistante pour $\alpha = 0$). Étant le complété p-adique d'un anneau sans p-torsion, $\Lambda_\alpha(S)$ est sans p-torsion.

L'homomorphisme $\theta\colon \mathrm{W}(\mathcal{R}_S) \to \widehat{\overline{S}}$ induit $\theta\colon \Lambda_0(S) \to \widehat{\overline{S}}$. On prolonge ce dernier à $\Lambda_0(S)\big[T_\alpha\big]$ en posant $\theta\big(T_\alpha\big) = p^{1-\alpha}$. On a alors $[\widetilde{p}]^\alpha T_\alpha - p, [\widetilde{p}]^{p-1-\alpha} - \lambda T_\alpha \in \mathsf{Ker}(\theta)$, de sorte que ce dernier induit un homomorphisme de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$-algèbres $\theta\colon \Lambda_\alpha(S) \to \widehat{\overline{S}}$.

Posons
$$\xi_\alpha = [\widetilde{p}]^{1-\alpha} - T_\alpha = \frac{\xi}{[\widetilde{p}]^\alpha}$$
On a $\xi_\alpha \in \Lambda_\alpha(S)$ et $\theta(\xi_\alpha) = 0$. Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, l'homomorphisme θ induit
$$\theta_n\colon \Lambda_\alpha(S)/p^n\Lambda_\alpha(S) \to \overline{S}/p^n\overline{S}$$

Lemme 5.15. *Si $\alpha \in \mathbf{Q}\cap[0,1[$ et $n \in \mathbf{N}_{>0}\cup\{+\infty\}$, on a*
$$\mathsf{Ker}(\theta_n) = \xi_\alpha\big(\Lambda_\alpha(S)/p^n\Lambda_\alpha(S)\big)$$
et $\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S) \cap p^n\Lambda_\alpha(S) = p^n\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)$.

Démonstration. On a bien sûr $\xi_\alpha\big(\Lambda_\alpha(S)/p^n\Lambda_\alpha(S)\big) \subseteq \mathsf{Ker}(\theta_n)$. Par ailleurs,
$$\begin{aligned}\big(\Lambda_\alpha(S)/p^n\Lambda_\alpha(S)\big)/\xi_\alpha\big(\Lambda_\alpha(S)/p^n\Lambda_\alpha(S)\big) &= \Lambda_\alpha(S)/(p^n,\xi_\alpha)\Lambda_\alpha(S)\\ &= \Lambda_0(S)\big[T_\alpha\big]/\big([\widetilde{p}]^\alpha T_\alpha - p, [\widetilde{p}]^{p-1-\alpha} - \lambda T_\alpha, [\widetilde{p}]^{1-\alpha} - T_\alpha, p^n\big)\Lambda_0(S)\big[T_\alpha\big]\\ &= \Lambda_0(S)/(\xi,p^n)\Lambda_0(S) \simeq \overline{S}/p^n\overline{S}\end{aligned}$$
(car $\theta([\widetilde{p}]^{p-2} - \lambda) = 0$) ce qui prouve l'égalité lorsque $n \in \mathbf{N}_{>0}$. Le cas $n = +\infty$ s'en déduit en passant à la limite.

Comme Λ_α n'a pas de p-torsion, on a le diagramme commutatif à lignes exactes
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Lambda_\alpha(S) \arrow[r, "p^n"] \arrow[d, "\theta"] & \Lambda_\alpha(S) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & \Lambda_\alpha(S)/p^n\Lambda_\alpha(S) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \widehat{\overline{S}} \arrow[r, "p^n"] & \widehat{\overline{S}} \arrow[r] & \overline{S}/p^n\overline{S} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
Le lemme du serpent fournit la suite exacte
$$0 \to \xi_\alpha\Lambda_\alpha(S) \xrightarrow{p^n} \xi_\alpha\Lambda_\alpha(S) \to \Lambda_\alpha(S)/p^n\Lambda_\alpha(S)$$
ce qu'on voulait. □

Lemme 5.16. *Si $p > 3$, on a $\lambda = \omega[\widetilde{p}]^{p-2} + p\mu$ avec $\omega \in \Lambda_0(S)^\times$ et $\mu \equiv (2\omega+1)[\widetilde{p}]^{p-3} + [\widetilde{p}]^{p-2}$ $\mathrm{mod}\ p\Lambda_0(S)$. En outre, on a $\omega - 1, \omega^2 + \omega + 1 \in \Lambda_0(S)^\times$.*

Démonstration. On a $\lambda = \frac{(p+\xi)^{p-1}}{p} = \frac{\xi^{p-1}}{p} + \sum\limits_{i=1}^{p-1}\binom{p-1}{i}p^{i-1}\xi^{p-1-i}$: on a
$$\begin{aligned}\lambda &\equiv \tfrac{\xi^{p-1}}{p} + (p-1)\xi^{p-2} + p\tfrac{(p-1)(p-2)}{2}\xi^{p-3} \mod p^2\Lambda_0(S)\\ &\equiv \tfrac{\xi^{p-1}}{p} + (p-1)([\widetilde{p}]^{p-2} - p(p-2)[\widetilde{p}]^{p-3}) + p[\widetilde{p}]^{p-3} \mod p^2\Lambda_0(S)\\ &\equiv \tfrac{\xi^{p-1}}{p} + (p-1)[\widetilde{p}]^{p-2} - p[\widetilde{p}]^{p-3} \mod p^2\Lambda_0(S)\end{aligned}$$
(car $p > 3$). Étudions maintenant l'image de $\frac{\xi^{p-1}}{p}$ dans $\Lambda_0(S)$. Comme ϖ et ξ sont des générateurs de $\mathsf{Ker}(\theta)$ dans $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$, il existe $\nu \in \mathrm{W}(\mathcal{R}_S)^\times$ tel que $\xi = \nu\varpi$.
On a $(X-1)^p = X^p - 1 + p(X-1)A(X)$, et donc $(X-1)^{p-1} = \frac{X^p-1}{X-1} + pA(X)$ avec $A \in \mathbf{Z}[X]$ (on a $A(1) = -1$). On a donc $([\zeta]^{1/p} - 1)^{p-1} = \varpi + pA([\zeta]^{1/p})$ d'où
$$\begin{aligned}\varpi^p &\equiv ([\zeta]^{1/p} - 1)^{p(p-1)} - p^2A([\zeta]^{1/p})([\zeta]^{1/p} - 1)^{(p-1)^2} \mod p^3\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\\ &\equiv ([\zeta]^{1/p} - 1)^{p(p-1)} - p^2A([\zeta]^{1/p})\varpi^{p-1} \mod p^3\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\end{aligned}$$

Comme $([\zeta]^{1/p}-1)^p=[\zeta]-1+p([\zeta]^{1/p}-1)A([\zeta]^{1/p})$, on a

$$\begin{aligned}([\zeta]^{1/p}-1)^{p(p-1)} \equiv \underbrace{([\zeta]-1)^{p-1}}_{=([\zeta]-1)^{p-2})([\zeta]^{1/p}-1)\varpi} &+p(p-1)A([\zeta]^{1/p})([\zeta]^{1/p}-1)\underbrace{([\zeta]-1)^{p-2}}_{=([\zeta]^{1/p}-1)^{p-2}\varpi^{p-2}}\\ &+p^2\tbinom{p-1}{2}A([\zeta]^{1/p})^2([\zeta]^{1/p}-1)^2\underbrace{([\zeta]-1)^{p-3}}_{=([\zeta]^{1/p}-1)^{p-3}\varpi^{p-3}} \mod p^3\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\end{aligned}$$

i.e. $([\zeta]^{1/p}-1)^{p(p-1)}\equiv([\zeta]-1)^{p-2})([\zeta]^{1/p}-1)\varpi+pA([\zeta]^{1/p})([\zeta]^{1/p}-1)^{p-1}\big((p-1)\varpi^{p-2}+pA([\zeta]^{1/p})\varpi^{p-3}\big) \mod p^3\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$. Comme

$$\begin{aligned}([\zeta]^{1/p}-1)^{p-1}\big((p-1)\varpi^{p-2}+pA([\zeta]^{1/p})\varpi^{p-3}\big)&=(\varpi+pA([\zeta]^{1/p}))\big((p-1)\varpi^{p-2}+pA([\zeta]^{1/p})\varpi^{p-3}\big)\\ &\equiv (p-1)\varpi^{p-1} \mod p^2\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\end{aligned}$$

on a en fait

$$([\zeta]^{1/p}-1)^{p(p-1)}\equiv([\zeta]-1)^{p-2})([\zeta]^{1/p}-1)\varpi+p(p-1)A([\zeta]^{1/p})\varpi^{p-1} \mod p^3\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$$

et donc

$$\begin{aligned}\varpi^p&\equiv([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)\varpi+p(p-1)A([\zeta]^{1/p})\varpi^{p-1}-p^2A([\zeta]^{1/p})\varpi^{p-1} \mod p^3\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\\ &\equiv([\zeta]-1)^{p-2})([\zeta]^{1/p}-1)\varpi-pA([\zeta]^{1/p})\varpi^{p-1} \mod p^3\varpi\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\end{aligned}$$

(parce que $p^3\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\cap\mathsf{Ker}(\theta)=p^3\varpi\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$). On a donc

$$\tfrac{\varpi^{p-1}}{p}\equiv\underbrace{p^{-1}([\zeta]-1)^{p-2})([\zeta]^{1/p}-1)}_{\in I^{\{p-1\}}\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}-A([\zeta]^{1/p})\varpi^{p-2} \mod p^2\,\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$$

de sorte que $\frac{\varpi^{p-1}}{p}\equiv-A([\zeta]^{1/p})\varpi^{p-2} \mod p^2\Lambda_0(S)$. Cela implique que

$$\begin{aligned}\tfrac{\xi^{p-1}}{p}&=\nu^{p-1}\tfrac{\varpi^{p-1}}{p}\equiv-\nu A([\zeta]^{1/p})\xi^{p-2} \mod p^2\Lambda_0(S)\\ &=-\nu A([\zeta]^{1/p})([\widetilde{p}]^{p-2}-p(p-2)[\widetilde{p}]^{p-3}) \mod p^2\Lambda_0(S)\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\lambda&\equiv-\nu A([\zeta]^{1/p})([\widetilde{p}]^{p-2}+2p[\widetilde{p}]^{p-3})+(p-1)[\widetilde{p}]^{p-2}-p[\widetilde{p}]^{p-3} \mod p^2\Lambda_0(S)\\ &=\omega[\widetilde{p}]^{p-2}+p\mu\end{aligned}$$

avec $\omega=-\nu A([\zeta]^{1/p})-1$ et $\mu\equiv-(2\nu A([\zeta]^{1/p})+1)[\widetilde{p}]^{p-3}+[\widetilde{p}]^{p-2} \mod p\Lambda_0(S)$.
Il reste donc à montrer que $\omega,\omega-1,\omega^2+\omega+1\in\Lambda_0(S)^\times$. Comme $\Lambda_0(S)$ est complet pour la topologie p-adique, il suffit de le montrer modulo p. Comme $\zeta^{1/p}-1$ est nilpotent dans $\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)$, il suffit en outre de le montrer modulo $[\zeta]^{1/p}-1$. On a $\omega=-\nu A([\zeta]^{1/p})-1\equiv\nu-1 \mod ([\zeta]^{1/p}-1)\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ parce que $A(1)=-1$. Il suffit donc de montrer que $\nu-1,\nu-2,\nu^2-\nu+1\in\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)^\times$. Comme $\xi=\nu\varpi$, on a $\widetilde{p}=\overline{\nu}(\zeta^{1/p}-1)^{p-1}$ dans $\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^p\mathcal{R}_S$. On dispose de l'isomorphisme d'anneaux $\theta_1\colon\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^p\mathcal{R}_S\xrightarrow{\sim}\overline{S}/p\overline{S}$; $x\mapsto x_1$; on a $\theta_1(\widetilde{p})=p^{1/p}$ et $\theta_1(\zeta^{1/p})=\zeta^{(2)}$, ce qui implique $p^{1/p}=\theta_1(\overline{\nu})(\zeta^{(2)}-1)^{p-1}$: il suffit de montrer que si $x=\frac{p^{1/p}}{(\zeta^{(2)}-1)^{p-1}}$, alors $x-1,x-2,x^2-x+1\in\overline{S}^\times$. Comme $(\zeta^{(2)}-1)^p=\zeta^{(1)}-1+p(\zeta^{(2)}-1)A(\zeta^{(2)})$, donc $(\zeta^{(2)}-1)^{p(p-1)}\equiv(\zeta^{(1)}-1)^{p-1}-p(\zeta^{(2)}-1)A(\zeta^{(2)})(\zeta^{(1)}-1)^{p-2} \mod p^2\overline{S}$, et $(\zeta^{(1)}-1)^{p-1}=pA(\zeta^{(1)})$, on a

$$\begin{aligned}x^{-p}=\tfrac{(\zeta^{(2)}-1)^{p(p-1)}}{p}&\equiv A(\zeta^{(1)})-(\zeta^{(2)}-1)A(\zeta^{(2)})(\zeta^{(1)}-1)^{p-2} \mod p\overline{S}\\ &\equiv-1 \mod (\zeta^{(1)}-1)\overline{S}\end{aligned}$$

(parce que $A(\zeta^{(1)})\equiv-1 \mod (\zeta^{(1)}-1)\overline{S}$, vu que $A(1)=-1$). Cela implique que $x^p\equiv-1 \mod (\zeta^{(1)}-1)\overline{S}$ d'où $x\equiv-1 \mod (\zeta^{(2)}-1)\overline{S}$, et donc l'inversibilité de $x-1$, $x-2$ et de x^2-x+1, car $p\notin\{2,3\}$. □

Proposition 5.17. *On a*

$$\Lambda_\alpha(S)/p\Lambda_\alpha(S) \simeq \frac{(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\mathcal{R}_S)[T_\alpha]}{\widetilde{p}^\alpha T_\alpha(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\mathcal{R}_S)[T_\alpha]}$$

Si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, le noyau de la multiplication par ξ_α sur $\Lambda_\alpha(S)/p\Lambda_\alpha(S)$ est l'idéal engendré par $\widetilde{p}^{p-2}$.

Démonstration. On a

$$\Lambda_\alpha(S)/p\Lambda_\alpha(S) \simeq \frac{\Lambda_0(S)\{T_\alpha\}}{(p, [\widetilde{p}]^\alpha T_\alpha - p, \lambda T_\alpha - [\widetilde{p}]^{p-1-\alpha})} \simeq \frac{(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1}\mathcal{R}_S)[T_\alpha]}{(\widetilde{p}^\alpha T_\alpha, \overline{\lambda} T_\alpha - \widetilde{p}^{p-1-\alpha})} \simeq \frac{(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\mathcal{R}_S)[T_\alpha]}{(\widetilde{p}^\alpha T_\alpha)}$$

parce que $\overline{\lambda} T_\alpha$ a une image nulle, puisque divisible par $\widetilde{p}^\alpha T_\alpha$ en vertu du lemme 5.16 (rappelons que $\alpha < 1$).

Supposons $\alpha \leq \frac{1}{2}$, et soit $x \in \Lambda_\alpha(S)/p\Lambda_\alpha(S)$ tel que $\xi_\alpha x = 0$. Écrivons $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n T_\alpha^n$ avec $x_0 \in \mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\mathcal{R}_S$ et $x_n \in \mathcal{R}_S/\widetilde{p}^\alpha\mathcal{R}_S$ si $n > 0$, nul pour n assez grand. On a $\alpha \leq 1 - \alpha$, donc $\widetilde{p}^{1-\alpha} T_\alpha = 0$, si bien que $\widetilde{p}^{1-\alpha} x = \widetilde{p}^{1-\alpha} x_0$, donc $\xi_\alpha x = \widetilde{p}^{1-\alpha} x_0 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n T_\alpha^{n+1} = 0$. Cela implique que $\widetilde{p}^{1-\alpha} x_0 = 0$ dans $\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\mathcal{R}_S$, *i.e.* que $x_0 \in \widetilde{p}^{p-2}\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\mathcal{R}_S$, et que $x_n = 0$ pour $n > 0$. On a donc $x \in \widetilde{p}^{p-2}(\Lambda_\alpha(S)/p\Lambda_\alpha(S))$. Réciproquement, on a $\xi_\alpha \widetilde{p}^{p-2} = \widetilde{p}^{p-1-\alpha} - \widetilde{p}^{p-2} T_\alpha = 0$ dans $\Lambda_\alpha(S)/p\Lambda_\alpha(S)$, d'après ce qui précède (rappelons que $p > 2$). □

Proposition 5.18. *Si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, on a*

$$\xi_\alpha(\Lambda_\alpha(S)/p\Lambda_\alpha(S)) = \xi_\alpha(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\mathcal{R}_S) \oplus \xi_\alpha T_\alpha K_\alpha$$

avec $K_\alpha = (\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^\alpha\mathcal{R}_S)[T_\alpha]$. En outre, la multiplication par ξ_α induit un isomorphisme

$$\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-2}\mathcal{R}_S \xrightarrow{\sim} \xi_\alpha(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\mathcal{R}_S)$$

Démonstration. La première assertion résulte de la proposition 5.17. Pour la deuxième, soit $x \in \mathcal{R}_S$ tel que $\xi_\alpha x$ a une image nulle dans $\Lambda_\alpha(S)/p\Lambda_\alpha(S)$: d'après la proposition 5.17 on a $\widetilde{p}^{1-\alpha}x - T_\alpha x \in \widetilde{p}^\alpha T_\alpha(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\mathcal{R}_S)[T_\alpha]$, ce qui équivaut à $\widetilde{p}^{1-\alpha}x \in \widetilde{p}^{p-1-\alpha}\mathcal{R}_S$ et $x \in \widetilde{p}^\alpha\mathcal{R}_S$. Comme $\mathcal{R}_S$ n'a pas de $\widetilde{p}$-torsion, cela équivaut donc à $x \in \widetilde{p}^{p-2}\mathcal{R}_S$. □

5.19. Le module syntomique sur $\Lambda_\alpha(S)$. Si $\alpha \in [0, 1/p[$, le Frobenius φ sur $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ passe au quotient modulo $([\zeta] - 1)^{p-1}$, et induit un morphisme σ-linéaire

$$\varphi \colon \Lambda_\alpha(S) \to \Lambda_{p\alpha}(S)$$

tel que $\varphi(T_\alpha) = T_{p\alpha}$ (car $\varphi([\widetilde{p}]^\alpha) = [\widetilde{p}]^{p\alpha}$). On dispose en outre du morphisme naturel $v \colon \Lambda_\alpha(S) \to \Lambda_{p\alpha}(S)$, qui envoie T_α sur $[\widetilde{p}]^{(p-1)\alpha} T_{p\alpha}$. Ce dernier ainsi que φ sont continus pour la topologie p-adique, et $\mathcal{G}_S$-équivariants. Si $(\mathcal{M}, \phi)$ est un σ-module sur $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S)$, on peut donc définir le morphisme syntomique

$$\mathscr{S}_\alpha(\mathcal{M}) := \mathscr{S}(v, \varphi, (\mathcal{M}, \phi)) : \quad J^{[1]}\Lambda_\alpha(S) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S)} \mathcal{M} \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \phi - v \otimes 1} \Lambda_{p\alpha}(S) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S)} \mathcal{M}$$

(rappelons que $\Lambda_{p\alpha}$ est sans p-torsion) et le module syntomique

$$\mathbf{V}_\alpha(\mathcal{M}) := \mathsf{Ker}\left(\mathscr{S}_\alpha(\mathcal{M})\right)$$

c'est un $\mathbf{Z}_p$-module topologique muni d'une action continue de $\mathcal{G}_S$.

On a $J^{[1]}\Lambda_0(S) = \xi\Lambda_0(S)$ donc $J^{[1]}\Lambda_\alpha(S) = \xi\Lambda_\alpha(S) = [\widetilde{p}]^\alpha \xi_\alpha \Lambda_\alpha(S)$ (lemme 5.15), et

$$\varphi(\xi_\alpha) = [\widetilde{p}]^{p(1-\alpha)} - T_{p\alpha} = T_{p\alpha}\Big(\frac{[\widetilde{p}]^p}{p} - 1\Big) = T_{p\alpha}\sigma_1(\xi)$$

Comme $\Lambda_{p\alpha}(S)$ n'a pas de p-torsion donc pas de $T_{p\alpha}$-torsion, on peut définir

$$\varphi_{1,\alpha} := \frac{\varphi}{T_{p\alpha}} \colon \Lambda_\alpha \to \Lambda_{p\alpha}$$

Si $x \in \Lambda_\alpha(S) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S)} \mathcal{M}$, on a

$$(\varphi_{1,\alpha} \otimes \phi - [\widetilde{p}]^\alpha v \otimes 1)(\xi_\alpha x) = \sigma_1(\xi)(\varphi \otimes \phi)(x) - \xi(v \otimes 1)(x) = (\varphi_1 \otimes \phi - v \otimes 1)(\xi x)$$

de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
J^{[1]}\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M} \arrow[dr, "\varphi_1\otimes\phi-v\otimes 1"] & \\
& \Lambda_{p\alpha}(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M} \\
\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M} \arrow[uu, "{[\widetilde{p}]^\alpha}"] \arrow[ur, "\varphi_{1,\alpha}\otimes\phi-{[\widetilde{p}]^\alpha}v\otimes 1"'] &
\end{tikzcd}$$

Posons

$$\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}) := \mathsf{Ker}(\varphi_{1,\alpha}\otimes\phi-[\widetilde{p}]^\alpha v\otimes 1)\subset \xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$$

Si $\mathcal{M}$ est plat sur $\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)$, la multiplication par $[\widetilde{p}]^\alpha$ induit donc un isomorphisme

$$\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})\xrightarrow{\sim}\mathbf{V}_\alpha(\mathcal{M})$$

($\Lambda_\alpha(S)$ n'a pas de $[\widetilde{p}]^\alpha$-torsion parce qu'il n'a pas de p-torsion et $[\widetilde{p}]^\alpha T_\alpha = p$ dans $\Lambda_\alpha(S)$).

Le but de la majeure partie de ce qui suit est de montrer que, lorsque $\mathcal{M}$ est libre de rang r, de petite hauteur de Hodge, et α est convenable, le $\mathbf{Z}_p$-module $\mathbf{V}_\alpha(\mathcal{M})$ est libre de rang r.

Remarque 5.20. L'intérêt du $\mathbf{Z}_p$-module $\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$ réside dans le fait qu'il se prête plus au dévissage que $\mathbf{V}_\alpha(\mathcal{M})$ (*cf* proposition 5.21). Comme l'a également observé le rapporteur, lorsque $\alpha\neq 0$, l'énoncé du lemme 5.15 est faux si on remplace ξ_α par ξ.

Ces constructions s'étendent de façon immédiate au cas où $\mathcal{M}$ est un $\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)$-module (pas nécessairement projectif) muni d'un endomorphisme σ-linéaire.

Proposition 5.21. *Soient $\alpha\in\mathbf{Q}\cap[0,1/p[$ et $(\mathcal{M},\phi_{\mathcal{M}})$ un σ-module projectif sur $\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)$. Pour tout $n\in\mathbf{N}_{>0}$, la suite*

$$0\to\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M})\xrightarrow{p}\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}/p^{n+1}\mathcal{M})\to\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}/p\mathcal{M})$$

est exacte.

Démonstration. Comme $\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\subset\Lambda_\alpha(S)$ et $\Lambda_{p\alpha}(S)$ sont sans p-torsion par construction, on a les suites exactes

$$0\to\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)/p^n\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\xrightarrow{p}\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)/p^{n+1}\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\to\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)/p\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\to 0$$

$$\text{et}\quad 0\to\Lambda_{p\alpha}(S)/p^n\Lambda_{p\alpha}(S)\xrightarrow{p}\Lambda_{p\alpha}(S)/p^{n+1}\Lambda_{p\alpha}(S)\to\Lambda_{p\alpha}(S)/p\Lambda_{p\alpha}(S)\to 0$$

Par ailleurs, on a

$$\big(\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)/p^n\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\big)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}\simeq\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\big(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}\big)$$

en vertu du lemme 5.15 : comme $\mathcal{M}$ est projectif sur $\mathrm{A}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)$, on a le diagramme à colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\big(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}\big) \arrow[r, "\varphi_{1,\alpha}\otimes\phi-{[\widetilde{p}]^\alpha}v\otimes 1"] \arrow[d, "p"] & \Lambda_{p\alpha}(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\big(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}\big) \arrow[d, "p"] \\
\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\big(\mathcal{M}/p^{n+1}\mathcal{M}\big) \arrow[r, "\varphi_{1,\alpha}\otimes\phi-{[\widetilde{p}]^\alpha}v\otimes 1"] \arrow[d] & \Lambda_{p\alpha}(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\big(\mathcal{M}/p^{n+1}\mathcal{M}\big) \arrow[d] \\
\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\big(\mathcal{M}/p\mathcal{M}\big) \arrow[r, "\varphi_{1,\alpha}\otimes\phi-{[\widetilde{p}]^\alpha}v\otimes 1"] \arrow[d] & \Lambda_{p\alpha}(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\big(\mathcal{M}/p\mathcal{M}\big) \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

et la proposition résulte du lemme du serpent. □

5.22. Étude de $\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}/p\mathcal{M})$. Soient $r \in \mathbf{N}_{>0}$, $\overline{A} \in \mathsf{M}_r(\overline{S}/p\overline{S})$ et

$$\begin{aligned} f_{\overline{A}} \colon (\overline{S}/p\overline{S})^r &\to (\overline{S}/p\overline{S})^r \\ X &\mapsto \overline{A}\sigma(X) + p^{1/p}X \end{aligned}$$

L'application $f_{\overline{A}}$ est $\mathbf{F}_p$-linéaire. Soit $\beta \in \mathbf{Q} \cap \big[0, \frac{p(p-2)}{p-1}\big[$. On a

$$f_{\overline{A}}\big(p^{1-(1+\beta)/p}X\big) = p^{p-1-\beta}\overline{A}\sigma(X) + p^{1-\beta/p}X = p^{1-\beta/p}\big(p^{p-2-(1-1/p)\beta}\overline{A}\sigma(X) + X\big)$$

de sorte que $f_{\overline{A}}$ induit un homomorphisme $\mathbf{F}_p$-linéaire

$$f_{\overline{A},\beta} \colon (\overline{S}/p^{1-(1+\beta)/p}\overline{S})^r \to (\overline{S}/p^{1-\beta/p}\overline{S})^r.$$

Lemme 5.23. *Supposons $p > 3$. Soit $\overline{A} \in \mathsf{M}_r(\overline{S}/p\overline{S})$ telle que $p^\varepsilon \in \det(\overline{A})$ avec $\varepsilon \in [0, 1/p[$.*

(i) Pour tout $Y \in (\overline{S}/p\overline{S})^r$, l'ensemble $f_{\overline{A}}^{-1}(\overline{A}\sigma(Y))$ est non vide ;

(ii) si $\beta \in \mathbf{Q} \cap [0, 2[$, on a $\dim_{\mathbf{F}_p}\big(\mathsf{Ker}(f_{\overline{A},\beta})\big) = r$.

Démonstration. (i) En effectuant le changement de variable $Z = X - Y \in (\overline{S}/p\overline{S})^r$, il s'agit de résoudre l'équation

$$\overline{A}\sigma(Z) + p^{1/p}(Z + Y) = 0 \tag{1}$$

dans $(\overline{S}/p\overline{S})^r$. Comme $p^\varepsilon \in \det(\overline{A})$, il existe $\overline{B} \in \mathsf{M}_r(\overline{S}/p\overline{S})$ tel que $\overline{BA} = p^\varepsilon\,\mathrm{Id}$.

Il existe $\widetilde{S} \in \mathscr{I}_S$ tel que $p^{1/p}, p^\varepsilon \in \widetilde{S}$, $\overline{A}, \overline{B} \in \mathsf{M}_r(\widetilde{S}/p\widetilde{S})$ et $Y = [y_i]_{1\le i\le d} \in (\widetilde{S}/p\widetilde{S})^r$. Choisissons des relèvements $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathsf{M}_r(\widetilde{S})$ et $\widehat{Y} = [\widehat{y}_i]_{1\le i\le d} \in \widetilde{S}^r$ et posons

$$\begin{aligned} h_{\widehat{A},\widehat{Y}} \colon \overline{S}_K^r &\to \overline{S}_K^r \\ Z &\mapsto \widehat{A}Z^{(p)} + p^{1/p}(Z + \widehat{Y}) \end{aligned}$$

(où $Z^{(p)} = [z_i^p]_{1\le i\le r}$ pour tout $Z = [z_i]_{1\le i\le r} \in \overline{S}[p^{-1}]^r$). On a

$$\widehat{U} = p^{-\varepsilon}\widehat{B}\widehat{A} \in \mathrm{Id} + p^{1-\varepsilon}\,\mathsf{M}_r(\widetilde{S}) \subset \mathsf{GL}_r(\widetilde{S})$$

vu que $\widetilde{S}$ est séparé et complet pour la topologie p-adique. Pour $Z \in \overline{S}[p^{-1}]^r$, on a alors

$$\widehat{A}^{-1}h_{\widehat{A},\widehat{Y}}(Z) = Z^{(p)} + p^{1/p-\varepsilon}\widehat{U}^{-1}\widehat{B}(Z + \widehat{Y})$$

Écrivons $\widehat{U}^{-1}\widehat{B} = [c_{i,j}]_{1\le i,j\le r} \in \mathsf{M}_r(\widetilde{S})$ et posons

$$\mathcal{A} = \widetilde{S}[Z_i]_{1\le i\le r}\Big/\Big(Z_i^p + p^{1/p-\varepsilon}\sum_{j=1}^r c_{i,j}(Z_j + \widehat{y}_j)\Big)_{1\le i\le r}$$

C'est une $\widetilde{S}$-algèbre libre de rang p^r. En particulier, elle est séparée et complète pour la topologie p-adique. La matrice jacobienne du système d'équations $\Big(Z_i^p + p^{1/p-\varepsilon}\sum_{j=1}^r c_{i,j}(Z_j + \widehat{y}_j)\Big)_{1\le i\le r}$ est égale à

$$J_{\mathcal{A}} = pD + p^{1/p-\varepsilon}\widehat{U}^{-1}\widehat{B}$$

où $D = \mathrm{diag}(Z_1^{p-1}, \dots, Z_r^{p-1})$. On a donc

$$J_{\mathcal{A}}\widehat{A} = p^{1/p}\big(\mathrm{Id} + p^{1-1/p}D\widehat{A}\big)$$

Comme $\mathcal{A}$ est complet pour la topologie p-adique, l'image de $\mathrm{Id} + p^{1-1/p}D\widehat{A}$ dans $\mathsf{M}_r(\mathcal{A})$ est inversible, de sorte que l'image de $J_{\mathcal{A}}$ dans $\mathsf{M}_r(\mathcal{A}_K)$ est inversible : la $\widetilde{S}_K$-algèbre $\mathcal{A}_K$ est étale. Il existe donc p^r morphismes de $\widetilde{S}$-algèbres $\mathcal{A} \to \overline{S}_K$, qui correspondent à p^r vecteurs colonnes $\widehat{Z}$ dans $\overline{S}_K^r$, qui satisfont $\widehat{Z}^{(p)} + p^{1/p-\varepsilon}\widehat{U}^{-1}\widehat{B}(\widehat{Z} + \widehat{Y}) = 0$, ce qui équivaut à $h_{\widehat{A},\widehat{Y}}(Z) = 0$. Posons alors $v_p(\widehat{Z}) = \sup\big\{x \in \mathbf{Q},\ p^{-x}\widehat{Z} \in \overline{S}^r\big\}$. Ce n'est pas une valuation, mais on a

$$v_p\big(\widehat{Z}^{(p)}\big) = pv_p(\widehat{Z}) = 1/p - \varepsilon + v_p(\widehat{U}^{-1}\widehat{B}(\widehat{Z} + \widehat{Y})) \ge 1/p - \varepsilon + v_p(\widehat{U}^{-1}\widehat{B}) + \inf\big\{v_p(\widehat{Z}), v_p(\widehat{Y})\big\}$$

et donc $pv_p(\widehat{Z}) \ge 1/p - \varepsilon + \min\big\{v_p(\widehat{Z}), 0\big\}$ vu que $v_p(\widehat{U}^{-1}\widehat{B}) \ge 0$ et $v_p(\widehat{Y}) \ge 0$, et donc $v_p(\widehat{Z}) \ge \frac{1-p\varepsilon}{p^2}$ *i.e.* $\widehat{Z} \in \overline{S}^r$. Les réductions modulo p des $\widehat{Z}$ sont des solutions de (1) dans $(\overline{S}/p\overline{S})^r$.

(ii) Supposons désormais $Y = 0$. D'après ce qu'on vient de voir, l'ensemble $E_{\widehat{A}}$ de solutions de l'équation $h_{\widehat{A},0}(X) = 0$ dans $\overline{S}_K^r$ est de cardinal p^r, et est inclus dans $\overline{S}^r$. La réduction modulo $p^{1-(1+\beta)/p}\overline{S}$ fournit une application

$$\rho_\beta\colon E_{\widehat{A}} \to \mathsf{Ker}(f_{\overline{A},\beta})$$

Montrons que c'est une bijection si $\beta \in \mathbf{Q} \cap [0, 2[$.

Surjectivité de ρ_β. Soit $Z \in \mathsf{Ker}(f_{\overline{A},\beta}) \subset (\overline{S}/p^{1-(1+\beta)/p}\overline{S})^r$. Il faut montrer que Z peut se relever en une solution de l'équation $h_{\widehat{A},0}(X) = 0$ dans $\overline{S}^r$. L'application $h_{\widehat{A},0}$ est une application polynomiale à coefficients dans $\widetilde{S}^r$: on applique l'algorithme de Hensel. Quitte à agrandir $\widetilde{S}$, on peut supposer que $Z \in (\widetilde{S}/p^{1-(1+\beta)/p}\widetilde{S})^r$. Posons $\delta = 1 - (2+\beta)/p$. On a $\delta \in \mathbf{Q}_{>0}$ parce que $p \geq 5$ et $\beta < 2$. Par construction, il existe $Z_0 \in \widetilde{S}^r$ qui relève Z et tel que $h_{\widehat{A},0}(Z_0) \in p^{1-\beta/p}\widetilde{S}^r$. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $Z_n \in \widetilde{S}^r$ relevant Z, tels que $h_{\widehat{A},0}(Z_n) \in p^{1-\beta/p+n\delta}\widetilde{S}^r$. Écrivons $h_{\widehat{A},0}(Z_n) = p^{1-\beta/p+n\delta}Y_n$. On a alors

$$h_{\widehat{A},0}(Z_n + p^{1-(1+\beta)/p+n\delta}X) \equiv p^{1-\beta/p+n\delta}Y_n + p^{1-(1+\beta)/p+n\delta}J_{\mathcal{A}}(Z_n)X \mod p^{2(1-(1+\beta)/p+n\delta)}\widetilde{S}^r$$

Comme $2(1-(1+\beta)/p+n\delta) = 1-\beta/p+(2n+1)\delta$, on a $f(Z_n+p^{1-(1+\beta)/p+n\delta}X) \in p^{1-\beta/p+(n+1)\delta}\widetilde{S}^r$ si et seulement si $p^{1-\beta/p+n\delta}Y_n + p^{1-(1+\beta)/p+n\delta}J_{\mathcal{A}}(Z_n)X \in p^{1-\beta/p+(n+1)\delta}\widetilde{S}^r$ *i.e.*

$$p^{1/p}Y_n + J_{\mathcal{A}}(Z_n)X \in p^{1/p+\delta}\widetilde{S}^r$$

Comme on l'a vu plus haut, on a $p^{1/p} \in \det(J_{\mathcal{A}}(Z_n))$, donc $J_{\mathcal{A}}(Z_n) \in \mathsf{GL}_r(\widetilde{S}[p^{-1}])$ et $J_{\mathcal{A}}(Z_n)^{-1} \in p^{-1/p}\,\mathsf{M}_r(\widetilde{S})$. Ainsi, $f(Z_n + p^{1-(1+\beta)/p+n\delta}X) \in p^{1-\beta/p+(n+1)\delta}\widetilde{S}^r$ si et seulement si

$$X \equiv -p^{1/p}J_{\mathcal{A}}(Z_n)^{-1}Y_n \mod p^\delta\widetilde{S}^r$$

en particulier, si $Z_{n+1} = Z_n - p^{1-\beta/p+n\delta}J_{\mathcal{A}}(Z_n)^{-1}Y_n \in \widetilde{S}^r$, on a $Z_{n+1} \equiv Z_n \mod p^{1-(1+\beta)/p+n\delta}\widetilde{S}^r$ (de sorte que Z_{n+1} relève Z) et $f(Z_{n+1}) \in p^{1-\beta/p+(n+1)\delta}\widetilde{S}^r$. La suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge pour la topologie p-adique dans $\widetilde{S}^r$ vers une solution $\widehat{Z}$ de $h_{\widehat{A},0}(X) = 0$ qui relève Z, ce qui montre que ρ_β est surjective.

Injectivité de ρ_β. Soient $X_1, X_2 \in \overline{S}^r$ de même réduction modulo $p^{1-(1+\beta)/p}\overline{S}^r$: on peut écrire $X_2 = X_1 + Y$ avec $Y = p^{\beta'}Y' \in \overline{S}^r$ et $\beta' \geq 1-(1+\beta)/p$. On a alors $h_{\widehat{A},0}(X_2) \equiv h_{\widehat{A},0}(X_1) + p^{\beta'}J_{\mathcal{A}}(X_1)Y' \mod p^{2\beta'}\overline{S}^r$. Si $h_{\widehat{A},0}(X_1) = h_{\widehat{A},0}(X_2) = 0$, on a alors

$$Y' \in p^{\beta'}J_{\mathcal{A}}(X_1)^{-1}\overline{S}^r \subset p^{\beta'-1/p}\overline{S}^r$$

d'après ce qui précède, si bien que $v_p(Y) = \beta' + v_p(Y') \geq 2\beta' - 1/p$. Comme

$$\beta' = v_p(Y) \geq 1-(1+\beta)/p > 1/p$$

vu que $p \geq 5$ et $\beta < 2$, on en déduit $v_p(Y) = +\infty$, c'est-à-dire $Y = 0$, ce qu'on voulait. $\square$

Remarque 5.24. (1) Le lemme 5.23 implique que pour tout $\beta \in \mathbf{Q}\cap[0,2[$ et $Y \in (\overline{S}/p\overline{S})^r$, l'espace affine $f_{\overline{A},\beta}^{-1}(\overline{A}\sigma(Y))$ est de dimension r sur $\mathbf{F}_p$.

(2) L'ensemble des solutions de (1) dans $(\overline{S}/p\overline{S})^r$ est infini (si $Y = 0$, il contient $p^{1-1/p}(\overline{S}/p\overline{S})^r$) c'est seulement sa réduction modulo $p^{1-1/p}$ qui a p^r éléments.

Soit $(\overline{\mathcal{M}}, \phi)$ un σ-module libre de rang r sur $\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)$. Si $\alpha \in \mathbf{Q}\cap[0,1[$, on dispose du morphisme syntomique

$$s_{\overline{\mathcal{M}},\alpha}\colon J^{[1]}(\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) \otimes_{\Lambda_0(S)} (\overline{\mathcal{M}}/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\overline{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\varphi_1\otimes\phi-1\otimes\mathrm{Id}} (\overline{\mathcal{M}}/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\overline{\mathcal{M}})$$

Proposition 5.25. *Supposons $p > 3$ et que $\widetilde{p}^{p\varepsilon} \in \det(1\otimes\phi_{\overline{\mathcal{M}}})$ avec $\varepsilon \in [0, 1/p[$. Alors on a*

(i) $\widetilde{p}^{p\varepsilon}\overline{\mathcal{M}} \subset \mathrm{Im}(\phi_{\overline{\mathcal{M}}}) = \mathrm{Im}\left(s_{\overline{\mathcal{M}},0}\right)$;

(ii) Si $\alpha \in \mathbf{Q}\cap[0,1[$, le $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel $\mathsf{Ker}\left(s_{\overline{\mathcal{M}},\alpha}\right)$ est de dimension r. Il est muni d'une action continue (pour la topologie discrète) de $\mathcal{G}_S$.

Démonstration. On a $J^{[1]}(\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) = \xi(\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S))$ (en vertu du lemme 5.15), de sorte que

$$J^{[1]}(\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) \otimes_{\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)} \overline{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{p}\overline{\mathcal{M}} \subset \overline{\mathcal{M}}$$

Par hypothèse on a $\widetilde{p}^{p\varepsilon} \in \det(1 \otimes \phi_{\overline{\mathcal{M}}})$: on a $\widetilde{p}\overline{\mathcal{M}} \subset \widetilde{p}^{p\varepsilon}\overline{\mathcal{M}} \subset \operatorname{Im}(\phi_{\overline{\mathcal{M}}})$ (rappelons que σ est surjectif sur $\overline{S}/p\overline{S}$ d'après la proposition 4.2), de sorte que $s_{\overline{\mathcal{M}},0}\big(\widetilde{p}\overline{\mathcal{M}}\big) = (\sigma_1(\xi)\phi_{\overline{\mathcal{M}}} - \widetilde{p}\,\mathrm{Id})\big(\overline{\mathcal{M}}\big) \subset \operatorname{Im}\big(\phi_{\overline{\mathcal{M}}}\big)$ (car $\sigma_1(\xi)$ a une image inversible dans $\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S) \simeq \mathcal{R}_S/\widetilde{p}^p\mathcal{R}_S$ d'après le lemme 5.10). Montrons l'inclusion réciproque.

Rappelons qu'on dispose de l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1}\mathcal{R}_S &\xrightarrow{\sim} \overline{S}/p^{1-1/p}\overline{S} \\ (x_0, x_1, \ldots) &\mapsto x_1 \end{aligned}$$

qui envoie $\widetilde{p}$ sur $p^{(1)} = p^{1/p}$.

Soient $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\overline{\mathcal{M}}$ sur $\overline{S}/p^{1-1/p}\overline{S}$ et $\overline{A} \in \mathsf{M}_r(\overline{S}/p\overline{S})$ relevant la matrice de $-\sigma_1(\xi)\phi_{\overline{\mathcal{M}}}$ dans la base $\mathbf{e}$. Par hypothèse on a $p^\varepsilon \in \det(\overline{A})$ (car $\sigma_1(\xi)$ a une image inversible dans $\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^p\mathcal{R}_S$). Soient $x \in \overline{\mathcal{M}}$ et $(x_1, \ldots, x_r) \in (\overline{S}/p^{1-1/p}\overline{S})^r$ ses coordonnées dans la base $\mathbf{e}$. Si X est le vecteur colonne dont les composantes sont $x_1, \ldots, x_d$, les coordonnées de $s_{\overline{\mathcal{M}},0}(\widetilde{p}x)$ dans la base $\mathbf{e}$ sont les composantes du vecteur $-(\overline{A}\sigma(X) + p^{1/p}X)$.

Soient $y \in \overline{\mathcal{M}}$, $(y_1, \ldots, y_r) \in (\overline{S}/p^{1-1/p}\overline{S})^r$ ses coordonnées dans la base $\mathbf{e}$ et Y le vecteur colonne dont les composantes sont $y_1, \ldots, y_r$. D'après le lemme 5.23 appliqué avec $\beta = 1 + \alpha$, l'équation $\overline{A}\sigma(X) + p^{1/p}X = \overline{A}\sigma(Y)$ admet exactement p^r solutions dans $(\overline{S}/p^{1-(2+\alpha)/p}\overline{S})^r$.

Avec $\alpha = 0$, cela prouve l'inclusion $\operatorname{Im}\big(\phi_{\overline{\mathcal{M}}}\big) \subset s_{\overline{\mathcal{M}},0}\big(\widetilde{p}\overline{\mathcal{M}}\big)$, c'est-à-dire l'égalité (i). Par ailleurs, cela implique que $\mathsf{Ker}\big(s_{\overline{\mathcal{M}},\alpha}\big)$ est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension r. Ce dernier est muni de l'action induite par $\mathcal{G}_S$ (parce que cette dernière commute au Frobenius). Elle est continue pour la topologie discrète car elle l'est sur $(\overline{S}/p^{1-1/p}\overline{S})^d$: cela prouve (ii). $\square$

Proposition 5.26. *Supposons $p > 3$. Soit $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}})$ un σ-module libre de rang r sur $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)$. Supposons que $\widetilde{p}^{p\varepsilon} \in \det(1 \otimes \phi_{\overline{\mathcal{M}}})$ avec $\varepsilon \in [0, 1/p[$. Alors $\mathbf{V}_0\left(\mathcal{M}/p\mathcal{M}\right)$ est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension r, muni d'une action continue (pour la topologie discrète) de $\mathcal{G}_S$.*

Si $\alpha \in \mathbf{Q} \cap [0, 1/p[$, on a

$$\begin{aligned} \mathsf{Ker}\,\Big(\xi_\alpha(\Lambda_\alpha(S)/p\Lambda_\alpha(S)) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)} \mathcal{M} &\xrightarrow{\varphi_{1,\alpha}\otimes\phi - [\widetilde{p}]^\alpha v\otimes 1} (\Lambda_{p\alpha}(S)/p\Lambda_{p\alpha}(S)) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)} \mathcal{M}\Big) \\ &\simeq \mathbf{V}_0\left(\mathcal{M}/p\mathcal{M}\right) \oplus \xi_\alpha T_\alpha\,\mathsf{Ker}\left(\varphi \otimes \phi\big|K_\alpha \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)} \mathcal{M}/p\mathcal{M}\right) \end{aligned}$$

Démonstration. La première assertion résulte de la proposition 5.25 appliquée à

$$\overline{\mathcal{M}} = (\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)} \mathcal{M}$$

D'après les propositions 5.17 et 5.18, on a

$$\xi_\alpha(\Lambda_\alpha(S)/p\Lambda_\alpha(S)) = \xi_\alpha(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\mathcal{R}_S) \oplus \xi_\alpha T_\alpha K_\alpha$$

avec $K_\alpha = (\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^\alpha\mathcal{R}_S)[T_\alpha]$ et

$$\Lambda_{p\alpha}(S)/p\Lambda_{p\alpha}(S) \simeq \frac{(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-p\alpha}\mathcal{R}_S)[T_{p\alpha}]}{(\widetilde{p}^{p\alpha}T_{p\alpha})}$$

Par ailleurs, on a

$$(\varphi_{1,\alpha} \otimes \phi - [\widetilde{p}]^\alpha v \otimes 1)(\xi_\alpha x \otimes m) = \sigma_1(\xi)\varphi(x) \otimes \phi(m) - \xi v(x) \otimes m$$

de sorte que $\varphi_{1,\alpha} \otimes \phi - [\widetilde{p}]^\alpha v \otimes 1$ envoie $\xi_\alpha(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\mathcal{R}_S) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)} \mathcal{M}$ dans le facteur

$$(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-p\alpha}\mathcal{R}_S) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)} \mathcal{M}$$

de $(\Lambda_{p\alpha}/p\Lambda_{p\alpha}) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)} \mathcal{M}$, et $\xi_\alpha T_\alpha K_\alpha \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)} \mathcal{M}$ dans le facteur $T_{p\alpha}(\Lambda_{p\alpha}/p\Lambda_{p\alpha}) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S)} \mathcal{M}$.

Via les isomorphismes

$$J^{[1]}(\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) = \xi(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1}\mathcal{R}_S) \xleftarrow[\sim]{\xi} \mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-2}\mathcal{R}_S \xrightarrow[\sim]{\xi_\alpha} \xi_\alpha(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\mathcal{R}_S)$$

(*cf* proposition 5.18), on a

$$\mathbf{V}_0\left(\mathcal{M}/p\mathcal{M}\right) \tilde{\to} \mathsf{Ker}\left(\varphi_{1,\alpha}\otimes\phi - [\widetilde{p}]^\alpha v\otimes 1\big|\xi_\alpha(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-\alpha}\mathcal{R}_S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}\right)$$

Enfin, si $z\in K_\alpha\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$, on a

$$\begin{aligned}(\varphi_{1,\alpha}\otimes\phi - [\widetilde{p}]^\alpha v\otimes 1)(\xi_\alpha T_\alpha z) &= \sigma_1(\xi)T_{p\alpha}(\varphi\otimes\phi)(z) - \xi\widetilde{p}^{(p-1)\alpha}T_{p\alpha}(v\otimes 1)(z)\\ &= \sigma_1(\xi)T_{p\alpha}(\varphi\otimes\phi)(z)\end{aligned}$$

car $\xi T_{p\alpha} = \xi_{p\alpha}\widetilde{p}^{p\alpha}T_{p\alpha} = 0$ dans $\Lambda_{p\alpha}/p\Lambda_{p\alpha}$. □

Remarque 5.27. Ce qui précède montre qu'en général, $\mathsf{Ker}(\varphi_{1,\alpha}\otimes\phi - [\widetilde{p}]^\alpha v\otimes 1)$ (et *a fortiori* $\mathbf{V}'_\alpha\left(\mathcal{M}/p\mathcal{M}\right)$) est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension infinie. Néanmoins, la proposition qui suit va impliquer que seul le facteur naturellement isomorphe à $\mathbf{V}_0\left(\mathcal{M}/p\mathcal{M}\right)$ va compter dans le dévissage (*cf* preuve du théorème 5.40).

Lemme 5.28. *Sous les hypothèses de la proposition 5.26, si* $\alpha\geq\frac{p\varepsilon}{p-1}$*, on a*

$$\mathbf{V}'_\alpha\left(\mathcal{M}\right)\cap T_\alpha(\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}) = p\,\mathbf{V}'_\alpha\left(\mathcal{M}\right)$$

Démonstration. Comme $p=[\widetilde{p}]^\alpha T_\alpha$ dans $\Lambda_\alpha(S)$, on a bien sûr

$$p\,\mathbf{V}'_\alpha\left(\mathcal{M}\right)\subseteq\mathbf{V}'_\alpha\left(\mathcal{M}\right)\cap T_\alpha(\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M})$$

Réciproquement, soit $x\in\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ tel que $z:=\xi_\alpha T_\alpha x\in\mathbf{V}'_\alpha\left(\mathcal{M}\right)$. On a alors

$$\sigma_1(\xi)T_{p\alpha}(\varphi\otimes\phi)(x) = \xi[\widetilde{p}]^{(p-1)\alpha}T_{p\alpha}(v\otimes 1)(x)$$

c'est-à-dire

$$(\varphi\otimes\phi)(x) = \sigma_1(\xi)^{-1}\xi_{p\alpha}[\widetilde{p}]^{(2p-1)\alpha}(v\otimes 1)(x)$$

dans $\Lambda_{p\alpha}\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ (rappelons que $\Lambda_{p\alpha}(S)$ n'a pas de p-torsion, donc pas de $T_{p\alpha}$-torsion, et que $\mathcal{M}$ est libre sur $\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)$).

Après le choix d'une base de $\mathcal{M}$, cette égalité se traduit matriciellement par

$$A\varphi(X) = \sigma_1(\xi)^{-1}\xi_{p\alpha}[\widetilde{p}]^{(2p-1)\alpha}(v\otimes 1)(X)$$

(où $X\in\Lambda_\alpha(S)^r$ est le vecteur colonne des coordonnées de x). Modulo p, cela implique

$$\overline{AX}^{(p)} = \sigma_1(\xi)^{-1}\xi_{p\alpha}\widetilde{p}^{(2p-1)\alpha}(v\otimes 1)(\overline{X})$$

Comme $\widetilde{p}^{p\varepsilon}\in\det(1\otimes\phi_{\overline{M}})$, il existe une matrice $\overline{B}\in\mathsf{M}_r(\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S))$ telle que $\overline{BA}=\widetilde{p}^{p\varepsilon}\,\mathrm{Id}_r$, de sorte que

$$\widetilde{p}^{p\varepsilon}\overline{X}^{(p)} = \sigma_1(\xi)^{-1}\xi_{p\alpha}\widetilde{p}^{(2p-1)\alpha}\overline{B}(v\otimes 1)(\overline{X})$$

Cela implique $\overline{X}\in\widetilde{p}^{\frac{(2p-1)\alpha}{p}-\varepsilon}(\Lambda_\alpha(S)/p\Lambda_\alpha(S))^r$. Comme $\alpha\geq\frac{p\varepsilon}{p-1}$, on a $\frac{(2p-1)\alpha}{p}-\varepsilon\geq\alpha$, d'où $x\in\left([\widetilde{p}]^\alpha,p\right)\Lambda_\alpha\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$, de sorte que $T_\alpha x\in p\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ (car $T_\alpha[\widetilde{p}]^\alpha=p$ dans $\Lambda_\alpha(S)$). Écrivons $T_\alpha x = py$ avec $y\in\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$: on a $z=p\xi_\alpha y$. Comme

$$p(\varphi_{1,\alpha}\otimes\phi - [\widetilde{p}]^\alpha v\otimes 1)(\xi_\alpha y) = (\varphi_{1,\alpha}\otimes\phi - [\widetilde{p}]^\alpha v\otimes 1)(z) = 0$$

et comme $\Lambda_{p\alpha}\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ n'a pas de p-torsion, on a $\xi_\alpha y\in\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$, et donc $z\in p\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$. □

Proposition 5.29. *Sous les hypothèses du lemme 5.28, on a*

$$\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})/p\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\left(\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}) \to \xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}/\xi_\alpha T_\alpha\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}\right)$$

En particulier, on a une application

$$\begin{aligned}\iota_\alpha\colon\ \mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})/p\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}) &\to \mathbf{V}_0\left(\mathcal{M}/p\mathcal{M}\right)\\ \xi_\alpha\overline{x} &\mapsto \xi\overline{x}\end{aligned}$$

dont le noyau est inclus dans l'image de $\xi_\alpha([\widetilde{p}]^{p-2},p)\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ *si* $\alpha\leq\frac{1}{2}$.

Démonstration. La première assertion résulte du lemme 5.28. Soit $x\in\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ tel que $\xi_\alpha x\in\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$ et $\iota_\alpha(\xi_\alpha\overline{x})=0$ (où $\overline{x}$ désigne l'image de x modulo p). Alors $\xi_\alpha\overline{x}$ a une image nulle dans

$$\mathsf{Ker}\left(\xi_\alpha(\Lambda_\alpha(S)/p\Lambda_\alpha(S))\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}\xrightarrow{\varphi_{1,\alpha}\otimes\phi-[\widetilde{p}]^\alpha v\otimes 1}(\Lambda_{p\alpha}(S)/p\Lambda_{p\alpha}(S))\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}\right)$$

(proposition 5.26 et lemme 5.28) : l'élément $\overline{x}$ appartient au noyau de la multiplication par ξ_α dans $\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$), *i.e.* $x\in([\widetilde{p}]^{p-2},p)\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ en vertu de la proposition 5.17. □

5.30. Interlude : relèvements à $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$**.** Rappelons qu'on a fixé un relèvement $u\in\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)^\times$ de l'image de $\sigma_1(\xi)$ dans $\Lambda_0(S)$.

Soient $\mathfrak{M}$ un $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$-module libre de rang fini r et $\varphi_{\mathfrak{M}}\colon\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ un endomorphisme φ-linéaire. Posons $\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}/p\mathfrak{M}$. En réduisant modulo $\widetilde{p}^{p-1}$, on dispose de l'application

$$\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-2}\overline{\mathfrak{M}}\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-1}\overline{\mathfrak{M}}$$

Comme $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)/(p,[\widetilde{p}]^{p-1})\,\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)=\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)$ (corollaire 5.9) et $J^{[1]}\Lambda_0(S)=\xi\Lambda_0(S)$ (*cf* lemme 5.15), cette application s'identifie à

$$\mathscr{S}\left(\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S),(\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-1}\overline{\mathfrak{M}},\phi_{\mathfrak{M}})\right)$$

Supposons maintenant que $\widetilde{p}^{p\varepsilon}\in\det(1\otimes\phi_{\overline{\mathfrak{M}}})$ avec $\varepsilon\in\mathbf{Q}\cap[0,1/p[$ et $p>3$. Grâce à la proposition 5.25 appliquée à $\overline{\mathcal{M}}=\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-1}\overline{\mathfrak{M}}$, on a

(a) $\widetilde{p}^{p\varepsilon}\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-1}\overline{\mathfrak{M}}\subset\mathrm{Im}\left(\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-2}\overline{\mathfrak{M}}\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-1}\overline{\mathfrak{M}}\right)$;

(b) $\mathsf{Ker}\left(\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-2}\overline{\mathfrak{M}}\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-1}\overline{\mathfrak{M}}\right)$ est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension r muni d'une action continue (pour la topologie discrète) de $\mathcal{G}_S$.

Lemme 5.31. *Sous les hypothèses qui précèdent, on a*

(1) $\widetilde{p}^{p\varepsilon}\overline{\mathfrak{M}}\subset\mathrm{Im}\left(\overline{\mathfrak{M}}\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}\right)$ *;*

(2) $\mathsf{Ker}\left(\overline{\mathfrak{M}}\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}\right)\xrightarrow{\sim}\mathsf{Ker}\left(\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-2}\overline{\mathfrak{M}}\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-1}\overline{\mathfrak{M}}\right)$ *est un* $\mathbf{F}_p$*-espace vectoriel de dimension* r *muni d'une action continue (pour la topologie discrète) de* $\mathcal{G}_S$*.*

Démonstration. Soit $y\in\overline{\mathfrak{M}}$. D'après (a), il existe $x_1\in\overline{\mathfrak{M}}$ tel que

$$(u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p})(x_1)\equiv\widetilde{p}^{p\varepsilon}y\mod\widetilde{p}^{p-1}\overline{\mathfrak{M}}$$

Soient $n\in\mathbf{N}_{>0}$ et $x_n\in\overline{\mathfrak{M}}$ tels que

$$(u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p})(x_n)\equiv\widetilde{p}^{p\varepsilon}y\mod\widetilde{p}^{\frac{(p^2-3p+1)p^{n-1}+p}{p-1}}\overline{\mathfrak{M}}$$

Écrivons $(u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p})(x_n)=\widetilde{p}^{p\varepsilon}y+\widetilde{p}^{\frac{(p^2-3p+1)p^{n-1}+p}{p-1}}z_n$ et posons

$$x_{n+1}=x_n+\widetilde{p}^{\frac{(p^2-3p+1)p^{n-1}+1}{p-1}}z_n$$

on a alors

$$\begin{aligned}(u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p})(x_{n+1})&=\widetilde{p}^{p\varepsilon}y+\widetilde{p}^{\frac{(p^2-3p+1)p^{n-1}+p}{p-1}}z_n+u\widetilde{p}^{p\frac{(p^2-3p+1)p^{n-1}+1}{p-1}}\phi_{\mathfrak{M}}(z_n)-\widetilde{p}^{\frac{(p^2-3p+1)p^{n-1}+1}{p-1}+1}z_n\\&=\widetilde{p}^{p\varepsilon}y+\widetilde{p}^{\frac{(p^2-3p+1)p^n+p}{p-1}}z_{n+1}\end{aligned}$$

avec $z_{n+1}=u\phi_{\mathfrak{M}}(z_n)$. Comme $p>2$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}_{>0}}$ est de Cauchy pour la topologie $\widetilde{p}$-adique, donc converge dans le $\mathcal{R}_S$-module libre de rang fini $\overline{\mathfrak{M}}$. Sa limite $x\in\overline{\mathfrak{M}}$ vérifie

$$(u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p})(x)=\widetilde{p}^{p\varepsilon}y$$

ce qui prouve (1). Remarquons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}_{>0}}$ vérifie $x_{n+1}\equiv x_n \mod \widetilde{p}^{\frac{(p^2-3p+1)p^{n-1}+1}{p-1}}\overline{\mathfrak{M}}$, si bien que $x_n\equiv x_1 \mod \widetilde{p}^{p-1}\overline{\mathfrak{M}}$ pour tout $n\in\mathbf{N}_{>0}$, et donc $x\equiv x_1 \mod \widetilde{p}^{p-2}\overline{\mathfrak{M}}$. Il en résulte que l'application naturelle

$$\mathsf{Ker}\left(\overline{\mathfrak{M}}\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}\right)\to\mathsf{Ker}\left(\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-2}\overline{\mathfrak{M}}\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-1}\overline{\mathfrak{M}}\right)$$

est surjective. Pour prouver (2) il suffit, grâce à (b), de montrer qu'elle est aussi injective. Soit donc $x\in\mathsf{Ker}\left(\overline{\mathfrak{M}}\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}\right)$ d'image nulle dans $\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-2}\overline{\mathfrak{M}}$. On peut écrire $x=\widetilde{p}^{p-2}z$ avec $z\in\overline{\mathfrak{M}}$. Comme $u\phi_{\mathfrak{M}}(x)=\widetilde{p}x$, on a donc $u\widetilde{p}^{p(p-2)}\phi_{\mathfrak{M}}(z)=\widetilde{p}^{p-1}z$ *i.e.*

$$z=u\widetilde{p}^{p(p-3)+1}\phi_{\mathfrak{M}}(z)$$

Comme $p>2$, cela implique facilement que $z=0$ pour des raisons de divisibilité par $\widetilde{p}$ dans le $\mathcal{R}_S$-module libre de rang fini $\overline{\mathfrak{M}}$. □

Proposition 5.32. *Sous les hypothèses qui précèdent, l'application*

$$\overline{\mathfrak{M}}[\widetilde{p}^{-1}]\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}[\widetilde{p}^{-1}]$$

est surjective. Son noyau est isomorphe à $\mathsf{Ker}\left(\overline{\mathfrak{M}}\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}\right)$ *: c'est un* $\mathbf{F}_p$*-espace vectoriel de dimension* r*, muni d'une action continue (pour la topologie discrète) de* $\mathcal{G}_S$*.*

Démonstration. Soient $\lambda\in\mathbf{Q}_{\geq 0}$ et $x\in\overline{\mathfrak{M}}$ tels que $\widetilde{p}^{-\lambda}x\in\mathsf{Ker}\left(\overline{\mathfrak{M}}[\widetilde{p}^{-1}]\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}[\widetilde{p}^{-1}]\right)$. On a alors $u\widetilde{p}^{-p\lambda}\phi_{\mathfrak{M}}(x)=\widetilde{p}^{1-\lambda}x$ *i.e.* $u\phi_{\mathfrak{M}}(x)=\widetilde{p}^{1+(p-1)\lambda}x$. Soient $\mathbf{e}$ une base de $\mathfrak{M}$ sur $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$ et $A\in\mathsf{M}_r\left(\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\right)$ la matrice de $\phi_{\mathfrak{M}}$ dans la base $\mathbf{e}$. Si $\overline{A}$ désigne la réduction de A modulo p et $\overline{X}\in\mathcal{R}_S^r$ le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de x dans $\mathbf{e}$, l'égalité qui précède s'écrit

$$u\overline{A}\sigma(\overline{X})=\widetilde{p}^{1+(p-1)\lambda}\overline{X}$$

On a donc $\sigma(\overline{X})=u^{-1}\widetilde{p}^{1+(p-1)\lambda}\overline{A}^{-1}\overline{X}$. En particulier, on a $pv_{\mathbf{E}}(\overline{X})\geq 1+(p-1)\lambda-p\varepsilon+v_{\mathbf{E}}(\overline{X})$ (car $\widetilde{p}^{p\varepsilon}\in\det(\overline{A})$), de sorte que

$$v_{\mathbf{E}}(\overline{X})\geq\lambda+\frac{1-p\varepsilon}{p-1}>\lambda$$

Cela implique de x est divisible par $\widetilde{p}^{\lambda}$ dans $\overline{\mathfrak{M}}$, et donc que l'application naturelle

$$\mathsf{Ker}\left(\overline{\mathfrak{M}}\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}\right)\to\mathsf{Ker}\left(\overline{\mathfrak{M}}[\widetilde{p}^{-1}]\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}[\widetilde{p}^{-1}]\right)$$

est bijective : l'assertion sur le noyau de $\overline{\mathfrak{M}}[\widetilde{p}^{-1}]\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}[\widetilde{p}^{-1}]$ résulte donc du lemme 5.31 (2).

Montrons la surjectivité. Si $\lambda\in\mathbf{Q}_{\geq 0}$ et $x\in\overline{\mathfrak{M}}$, on a

$$\begin{aligned}\left(u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}\right)\left(\widetilde{p}^{-\lambda}x\right)&=\widetilde{p}^{-p\lambda}\left(u\phi_{\mathfrak{M}}(x)-\widetilde{p}^{1+(p-1)\lambda}x\right)\\&=\widetilde{p}^{-p\lambda}\left((u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p})(x)+\widetilde{p}(1-\widetilde{p}^{(p-1)\lambda})x\right)\end{aligned}$$

Comme $\widetilde{p}^{p\varepsilon}\overline{\mathfrak{M}}\subset(u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p})\left(\overline{\mathfrak{M}}\right)$ d'après le lemme 5.31 (1), on en déduit que $\widetilde{p}^{p\varepsilon-p\lambda}\overline{\mathfrak{M}}\subset(u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p})\left(\widetilde{p}^{-\lambda}\overline{\mathfrak{M}}\right)$ modulo $\widetilde{p}^{1-p\lambda}\overline{\mathfrak{M}}$. En appliquant ceci à $\lambda=n\frac{1-p\varepsilon}{p}$, un récurrence sur $n\in\mathbf{N}$ montre alors que

$$\widetilde{p}^{1-(n+1)(1-p\varepsilon)}\overline{\mathfrak{M}}\subset(u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p})\left(\widetilde{p}^{-n\frac{1-p\varepsilon}{p}}\overline{\mathfrak{M}}\right)$$

pour tout $n\in\mathbf{N}$, ce qui prouve la surjectivité (rappelons que $1-p\varepsilon>0$). □

Remarque 5.33. D'après la proposition 4.2 (1), l'anneau $\widehat{\overline{S}}[p^{-1}]$ est perfectoide (*cf* [34, Definition 5.1 (i)]). On a donc les équivalences de catégories

$$\overline{S}[p^{-1}]_{\text{fét}} \approxeq \widehat{\overline{S}}[p^{-1}]_{\text{fét}} \approxeq \mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]_{\text{fét}}$$

en vertu de [34, Proposition 7.4 & Theorem 7.12], de sorte que $\pi_1\big(\mathsf{Spec}(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}])\big) = \{1\}$, ce qui implique directement les deux premières assertions de la proposition 5.32. Cela dit, nous aurons besoin de l'isomorphisme

$$\mathsf{Ker}\left(\overline{\mathfrak{M}}[\widetilde{p}^{-1}] \xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}} \overline{\mathfrak{M}}[\widetilde{p}^{-1}]\right) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ker}\left(\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-2}\overline{\mathfrak{M}} \xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}} \overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-1}\overline{\mathfrak{M}}\right)$$

dans la suite (*cf* preuve du théorème 5.40).

Proposition 5.34. *Sous les hypothèses qui précèdent, pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, l'application*

$$\mathrm{W}_n\left(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]\right) \otimes_{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)} \mathfrak{M} \xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\xi} \mathrm{W}_n\left(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]\right) \otimes_{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)} \mathfrak{M}$$

est surjective, et son noyau $\mathbf{V}_n(\mathfrak{M})$ est un $\mathbf{Z}/p^n\,\mathbf{Z}$-module libre de rang r, muni d'une action continue (pour la topologie discrète) de $\mathcal{G}_S$.

Démonstration. On procède par récurrence sur n, le cas $n = 1$ résultant de la proposition 5.32. Comme $\mathfrak{M}$ est libre sur $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)$, on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{V}_n(\mathfrak{M}) \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \mathbf{V}_{n+1}(\mathfrak{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{V}_1(\mathfrak{M}) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{W}_n\left(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]\right) \otimes_{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)} \mathfrak{M} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u\phi_{\mathfrak{M}}-\xi"] & \mathrm{W}_{n+1}\left(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]\right) \otimes_{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)} \mathfrak{M} \arrow[r] \arrow[d, "u\phi_{\mathfrak{M}}-\xi"] & \overline{\mathfrak{M}} \arrow[r] \arrow[d, "u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{W}_n\left(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]\right) \otimes_{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)} \mathfrak{M} \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \mathrm{W}_{n+1}\left(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]\right) \otimes_{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)} \mathfrak{M} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\mathfrak{M}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& C_n \arrow[r, "p"] & C_{n+1} \arrow[r] & C_1 &
\end{tikzcd}$$

dont les deux lignes du milieu sont exactes. Le lemme du serpent implique alors que la suite

$$0 \to \mathbf{V}_n(\mathfrak{M}) \xrightarrow{p} \mathbf{V}_{n+1}(\mathfrak{M}) \to \mathbf{V}_1(\mathfrak{M}) \to C_n \to C_{n+1} \to C_1 \to 0$$

est exacte. Par hypothèse de récurrence, on a $C_n = C_1 = 0$, de sorte que $C_{n+1} = 0$ et la suite

$$0 \to \mathbf{V}_n(\mathfrak{M}) \xrightarrow{p} \mathbf{V}_{n+1}(\mathfrak{M}) \to \mathbf{V}_1(\mathfrak{M}) \to 0$$

est exacte : l'application

$$\mathrm{W}_{n+1}\left(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]\right) \otimes_{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)} \mathfrak{M} \xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}} \mathrm{W}_{n+1}\left(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]\right) \otimes_{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)} \mathfrak{M}$$

est donc surjective et son noyau $\mathbf{V}_{n+1}(\mathfrak{M})$ est libre de rang r sur $\mathbf{Z}/p^{n+1}\,\mathbf{Z}$. □

Corollaire 5.35. *Sous les hypothèses qui précèdent, l'application*

$$\mathrm{W}\left(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]\right) \otimes_{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)} \mathfrak{M} \xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\xi} \mathrm{W}\left(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]\right) \otimes_{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)} \mathfrak{M}$$

est surjective, et son noyau $\mathbf{V}(\mathfrak{M})$ est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang r, muni d'une action continue (pour la topologie p-adique) de $\mathcal{G}_S$.

Remarque 5.36. L'application naturelle $\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)\big\{[\widetilde{p}]^{-1}\big\} \to \mathrm{W}\left(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]\right)$ est un isomorphisme modulo p. Comme la source et le but sont séparés et complets pour la topologie p-adique et sans p-torsion, c'est un isomorphisme. En particulier, on a $\mathrm{W}\left(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]\right) \otimes_{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)} \mathfrak{M} = \mathfrak{M}\big\{[\widetilde{p}]^{-1}\big\}$.

5.37. Descente à $\Lambda_\alpha(S)$. Pour $m \in \mathbf{N}_{>0}$, notons $c_{\varepsilon,m} = \lceil \frac{p^m\varepsilon}{1-p\varepsilon} \rceil$ le plus petit entier supérieur à $\frac{p^m\varepsilon}{1-p\varepsilon}$.

Proposition 5.38. *Sous les hypothèses qui précèdent, on a*

$$\mathbf{V}(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}\Big\{\frac{p}{[\widetilde{p}]^{2c_{\varepsilon,m}\frac{1-p\varepsilon}{p^m}}}\Big\} \subset \mathfrak{M}\big\{[\widetilde{p}]^{-1}\big\}.$$

Démonstration. Pour $j \in \mathbf{N}$, posons $a_0 = 0$ et $a_j = (j+1)c_{\varepsilon,m}\frac{1-p\varepsilon}{p^m} - \varepsilon$. On a $a_1 - a_0 = 2c_{\varepsilon,m}\frac{1-p\varepsilon}{p^m} - \varepsilon \geq \varepsilon$ et $a_j - a_{j-1} = c_{\varepsilon,m}\frac{1-p\varepsilon}{p^m} \geq \varepsilon$ pour tout $j > 1$. En outre, pour $j > 0$, on a $2jc_{\varepsilon,m}\frac{1-p\varepsilon}{p^m} - a_j = (j-1)c_{\varepsilon,m}\frac{1-p\varepsilon}{p^m} + \varepsilon \geq 0$. Il suffit donc de montrer que

$$\mathbf{V}(\mathfrak{M}) \subset \sum_{j=0}^{\infty} \mathfrak{M}\frac{p^j}{[\widetilde{p}]^{a_j}}.$$

D'après la proposition 5.32 et sa preuve, on sait que $\mathbf{V}_1(\mathfrak{M}) = \mathsf{Ker}\big(\overline{\mathfrak{M}} \xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}} - \widetilde{p}} \overline{\mathfrak{M}}\big)$. Il suffit de vérifier que tout élément du $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel $\mathbf{V}_1(\mathfrak{M})$ peut se relever dans $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \mathfrak{M}\frac{p^j}{[\widetilde{p}]^{a_j}} + p^n\mathfrak{M}\big\{[\widetilde{p}]^{-1}\big\}$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$ (le cas $n = 1$ étant évident) et de l'appliquer à une base de $\mathbf{V}_1(\mathfrak{M})$. On procède par récurrence sur n.

Supposons $n > 1$ et soit $x_n \in \sum\limits_{j=0}^{n-1} \mathfrak{M}\frac{p^j}{[\widetilde{p}]^{a_j}}$ tel que $(u\phi_{\mathfrak{M}} - \xi)(x_n) \in p^n\mathfrak{M}\big[[\widetilde{p}]^{-1}\big]$. On peut écrire $x_n = [\widetilde{p}]^{-a_{n-1}}m_n$ avec $m_n \in \mathfrak{M}$, et donc

$$(u\phi_{\mathfrak{M}} - \xi)(x_n) = u[\widetilde{p}]^{-pa_{n-1}}\phi_{\mathfrak{M}}(m_n) - \xi[\widetilde{p}]^{-a_{n-1}}m_n \in [\widetilde{p}]^{-pa_{n-1}}\mathfrak{M}$$

Cela implique que $(u\phi_{\mathfrak{M}} - \xi)(x_n) \in p^n[\widetilde{p}]^{-pa_{n-1}}\mathfrak{M}$: on peut écrire $(u\phi_{\mathfrak{M}} - \xi)(x_n) = p^n[\widetilde{p}]^{-pa_{n-1}}y_n$ avec $y_n \in \mathfrak{M}$. Cherchons un relèvement de x_n de la forme

$$x_{n+1} = x_n + p^n[\widetilde{p}]^{-a_n}z_n \in \sum_{j=0}^{n} \mathfrak{M}\frac{p^j}{[\widetilde{p}]^{a_j}}$$

avec $z_n \in \mathfrak{M}$ à déterminer. On a

$$(u\phi_{\mathfrak{M}} - \xi)(x_{n+1}) = p^n[\widetilde{p}]^{-pa_n}\big([\widetilde{p}]^{p(a_n-a_{n-1})}y_n + u\phi_{\mathfrak{M}}(z_n) - \xi[\widetilde{p}]^{(p-1)a_n}z_n\big)$$

de sorte que $(u\phi_{\mathfrak{M}} - \xi)(x_{n+1}) \in p^{n+1}\mathfrak{M}\big\{[\widetilde{p}]^{-1}\big\}$ si et seulement si la réduction modulo p de z_n est solution de l'équation

$$(*) \qquad \widetilde{p}^{p(a_n-a_{n-1})}\overline{y}_n + u\phi_{\mathfrak{M}}(z) - \widetilde{p}^{1+(p-1)a_n}z = 0$$

dans $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}/p\mathfrak{M}$.

Posons $\overline{y}_{n,0} = \overline{y}_n$. D'après le lemme 5.31 (1), si $j \in \{0, \ldots, nc_{\varepsilon,m}\}$ et $\overline{y}_{n,j} \in \overline{\mathfrak{M}}$, il existe $\overline{z}_{n,j} \in \overline{\mathfrak{M}}$ tel que $\widetilde{p}^{p\varepsilon}\overline{y}_{n,j} = (u\phi_{\mathfrak{M}} - \widetilde{p})(\overline{z}_{n,j})$, si bien que

$$\begin{aligned}\widetilde{p}^{p(a_n-a_{n-1})+j(1-p\varepsilon)}\overline{y}_{n,j} &= \widetilde{p}^{p\delta_{\varepsilon,m}+j(1-p\varepsilon)}(u\phi_{\mathfrak{M}} - \widetilde{p})(\overline{z}_{n,j})\\ &= u\phi_{\mathfrak{M}}\big(\widetilde{p}^{\delta_{\varepsilon,m}+j\frac{1-p\varepsilon}{p}}\overline{z}_{n,j}\big) - \widetilde{p}^{p\delta_{\varepsilon,m}+j(1-p\varepsilon)+1}\overline{z}_{n,j}\end{aligned}$$

où $\delta_{\varepsilon,m} = a_n - a_{n-1} - \varepsilon \geq 0$. On a alors

$$\widetilde{p}^{p(a_n-a_{n-1})+j(1-p\varepsilon)}\overline{y}_{n,j} + u\phi_{\mathfrak{M}}(z) - \widetilde{p}^{1+(p-1)a_n}z = \widetilde{p}^{p(a_n-a_{n-1})+(j+1)(1-p\varepsilon)}\overline{y}_{n,j+1} + u\phi_{\mathfrak{M}}(z') - \widetilde{p}^{1+(p-1)a_n}z'$$

avec $z' = z + \widetilde{p}^{\delta_{\varepsilon,m}+j\frac{(1-p\varepsilon)}{p}}\overline{z}_{n,j}$ et $\overline{y}_{n,j+1} = \Big(\widetilde{p}^{(p-1)(a_n-\delta_{\varepsilon,m}-j\frac{1-p\varepsilon}{p})} - 1\Big)\overline{z}_{n,j}$. Le rationnel

$$a_n - \delta_{\varepsilon,m} - j\frac{1-p\varepsilon}{p} = a_{n-1} + \varepsilon - j\frac{1-p\varepsilon}{p} = (nc_{\varepsilon,m} - j)\frac{1-p\varepsilon}{p}$$

est positif, et nul lorsque $j = nc_{\varepsilon,m}$, si bien que $\overline{y}_{n,nc_{\varepsilon,m}+1} = 0$. Posons $\overline{z}_n = \sum\limits_{j=0}^{nc_{\varepsilon,m}} \widetilde{p}^{\delta_{\varepsilon,m}+j\frac{(1-p\varepsilon)}{p}} \overline{z}_{n,j}$. D'après ce qui précède, si on pose $z' = z + \overline{z}_n$, l'équation $(*)$ est équivalente à

$$u\phi_{\mathfrak{M}}(z') - \widetilde{p}^{1+(p-1)a_n} z' = 0$$

qui admet la solution nulle : $\overline{z}_n$ est solution de $(*)$ et on a fini. □

Remarque 5.39. (1) Lorsque $\varepsilon = 0$, on a $c_{\varepsilon,m} = 0$: on a l'inclusion (évidente par dévissage à partir du lemme 5.31) $\mathbf{V}(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$.

(2) La proposition 5.38 implique que $\mathbf{V}(\mathfrak{M})$ est « surconvergente » de rayon $r_{\varepsilon,m} = \frac{p^m}{2c_{\varepsilon,m}(1-p\varepsilon)}$, *i.e.* que ses « périodes » vivent dans $\widetilde{\mathbf{A}}_S^{(0,r_{\varepsilon,m}]}$ (*cf* [3, §4]).

(3) Si $\varepsilon \in \mathbf{Q} \cap \big[0, \frac{1}{2p}\big[$, on a $\lim\limits_{m\to\infty} 2c_{\varepsilon,m}\frac{1-p\varepsilon}{p^m} = 2\varepsilon$: pour tout $\alpha \in \mathbf{Q} \cap [2\varepsilon, 1/p[$, il existe $m \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que $2c_{\varepsilon,m}\frac{1-p\varepsilon}{p^m} \leq \alpha < 1/p$.

Théorème 5.40. *Supposons $p > 3$. Soit $(\mathcal{M}, \phi)$ un σ-module libre de rang r sur $\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)$ tel que $\widetilde{p}^{p\varepsilon} \in \det(1 \otimes \phi)$ avec $\varepsilon \in \big[0, \frac{1}{2p}\big[$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbf{Q} \cap \big[2\varepsilon, \frac{1}{p}\big[$, le $\mathbf{Z}_p$-module $\mathbf{V}_\alpha(\mathcal{M})$ est libre de rang r, muni d'une action continue de $\mathcal{G}_S$.*

Lemme 5.41. *Sous les hypothèses du théorème 5.40, pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, le $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$-module $\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})/p^n\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$ est libre de rang r.*

Démonstration. Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$, posons

$$\widetilde{\mathbf{V}}_\alpha(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}) = \operatorname{Im}\big(\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}) \to \mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M})\big)$$

Choisissons $\mathfrak{M}$ un $\mathrm{W}\left(\mathcal{R}_S\right)$-module libre de rang r tel que

$$\Lambda_0(S) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)} \mathcal{M} = \mathfrak{M}/\big([\zeta]-1\big)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)\mathfrak{M}$$

et $\phi_{\mathfrak{M}}$ un endomorphisme φ linéaire de $\mathfrak{M}$ qui relève $\phi_{\mathcal{M}}$ (pour en construire, il suffit de choisir une base de $\mathfrak{M}$ et de relever dans $\mathsf{M}_r\left(\mathrm{W}\left(\mathcal{R}_S\right)\right)$ la matrice de $\phi_{\Lambda_0(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(S)}\mathcal{M}}$ dans la base déduite en réduisant modulo $\big(([\zeta]-1\big)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1))$. D'après le corollaire 5.35, l'application

$$\mathrm{W}\left(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]\right) \otimes_{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)} \mathfrak{M} \xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\xi} \mathrm{W}\left(\mathcal{R}_S[\widetilde{p}^{-1}]\right) \otimes_{\mathrm{W}(\mathcal{R}_S)} \mathfrak{M}$$

est surjective, et son noyau $\mathbf{V}(\mathfrak{M})$ est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang r.

D'après la proposition 5.38, on a $\mathbf{V}(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}\Big\{\frac{p}{[\widetilde{p}]^{2c_{\varepsilon,m}\frac{1-p\varepsilon}{p^m}}}\Big\}$ pour tout $m \in \mathbf{N}_{>0}$: si m est tel que $2c_{\varepsilon,m}\frac{1-p\varepsilon}{p^m} \leq \alpha < 1$, la réduction modulo l'idéal engendré par $([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{1/p}-1)$, composée avec la multiplication par ξ_α, induit une application $\mathbf{V}(\mathfrak{M}) \to \mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$. On dispose alors du diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{V}_n(\mathfrak{M}) \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \mathbf{V}_{n+1}(\mathfrak{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{V}_1(\mathfrak{M}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "\iota"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})/p^n\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi_n"'] & \mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})/p^{n+1}\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{n+1}"] & \mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})/p\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dr, "\iota_\alpha"] & 0 \\
 & \widetilde{\mathbf{V}}_\alpha(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, hook] & \widetilde{\mathbf{V}}_\alpha(\mathcal{M}/p^{n+1}\mathcal{M}) \arrow[r, "a_n"] \arrow[d, hook] & \widetilde{\mathbf{V}}_\alpha(\mathcal{M}/p\mathcal{M}) \arrow[d, hook] & \mathbf{V}_0(\mathcal{M}/p\mathcal{M}) \\
0 \arrow[r] & \mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}) \arrow[r, "p"] & \mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}/p^{n+1}\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M}/p\mathcal{M}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où ι_α est l'application de la proposition 5.29, et ι l'application induite par la multiplication par ξ (*cf* §5.30). La dernière ligne est exacte en vertu de la proposition 5.21 : l'application

$$\widetilde{\mathbf{V}}_\alpha(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}) \xrightarrow{p} \widetilde{\mathbf{V}}_\alpha(\mathcal{M}/p^{n+1}\mathcal{M})$$

est injective. La première ligne est exacte d'après la proposition 5.34. La deuxième l'est parce que $\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$ est sans p-torsion (étant un sous-$\mathbf{Z}_p$-module de $\xi_\alpha\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\mathrm{A}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ qui est sans p-torsion parce $\mathcal{M}$ est libre).

Par ailleurs, si $\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}/p\mathfrak{M}$, l'application composée

$$\mathbf{V}_1(\mathfrak{M})\xrightarrow{\sim}\mathbf{V}(\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-1}\overline{\mathfrak{M}})=\mathsf{Ker}\left(\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-2}\overline{\mathfrak{M}}\xrightarrow{u\phi_{\mathfrak{M}}-\widetilde{p}}\overline{\mathfrak{M}}/\widetilde{p}^{p-1}\overline{\mathfrak{M}}\right)\xrightarrow{\sim}\mathbf{V}_0(\mathcal{M}/p\mathcal{M})$$

s'identifie à ι. C'est un isomorphisme d'après le lemme 5.31 et la proposition 5.32. L'application ι_α est donc surjective.

Lemme 5.42. *Sous les hypothèses du théorème 5.40, l'application ι_α est un isomorphisme.*

Démonstration du lemme 5.42. On sait qu'elle est surjective. On a $\frac{1}{2}>\frac{1}{p}>\alpha>2\varepsilon>\frac{p\varepsilon}{p-1}$: d'après la proposition 5.29, son noyau est inclus dans l'image de $\xi_\alpha([\widetilde{p}]^{p-2},p)\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$. Soit $x\in\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ tel que $\xi_\alpha x\in\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$ soit d'image nulle dans $\mathbf{V}_0(\mathcal{M}/p\mathcal{M})$: on peut écrire $x=[\widetilde{p}]^{p-2}y+pz$ avec $y,z\in\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$. On a alors

$$\sigma_1(\xi)\big([\widetilde{p}]^{p(p-2)}(\varphi\otimes\phi)(y)+p(\varphi\otimes\phi)(z)\big)=\xi\big([\widetilde{p}]^{p-2}(v\otimes 1)(y)+p(v\otimes 1)(z)\big)$$

On a $[\widetilde{p}]^{p-1}=p\lambda$, et $\xi[\widetilde{p}]^{p-2}=[\widetilde{p}]^{p-1}-p[\widetilde{p}]^{p-2}=p(\lambda-[\widetilde{p}]^{p-2})$: divisée par p (rappelons que $\Lambda_\alpha(S)$ est sans p-torsion et $\mathcal{M}$ projectif sur $\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)$), l'égalité précédente donne :

$$\sigma_1(\xi)\big(p^{p-3}(\lambda[\widetilde{p}])^{p-2}(\varphi\otimes\phi)(y)+(\varphi\otimes\phi)(z)\big)=(\lambda-[\widetilde{p}]^{p-2})(v\otimes 1)(y)+\xi(v\otimes 1)(z)\tag{2}$$

et donc

$$\sigma_1(\xi)(\varphi\otimes\phi)(z)=(\overline{\omega}-1)\widetilde{p}^{p-2}(v\otimes 1)(y)+\widetilde{p}(v\otimes 1)(z)\tag{3}$$

modulo p (car $p>3$, où $\omega\in\Lambda_0(S)^\times$ est l'unité du lemme 5.16), d'où $\sigma_1(\xi)(\varphi\otimes\phi)(z)=\widetilde{p}(v\otimes 1)(z)$ dans $(\Lambda_{p\alpha}(S)/(p,[\widetilde{p}]^{p-2})\Lambda_{p\alpha}(S))\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$. L'image de $\xi_\alpha z$ dans $(\Lambda_\alpha(S)/(p,[\widetilde{p}]^{p-2})\Lambda_\alpha(S))\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ fournit donc un élément de $\mathbf{V}_0(\mathcal{M}/p\mathcal{M})$: comme ι_α est surjective, on peut supposer, quitte à soustraire à $\xi_\alpha x$ un élément de $p\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$, que $z\in(p,[\widetilde{p}]^{p-2})\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$, soit encore $x\in([\widetilde{p}]^{p-2},p^2)\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$: on peut en fait supposer que $z\in p\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$. L'équation (3) s'écrit alors $(\overline{\omega}-1)\widetilde{p}^{p-2}(v\otimes 1)(y)=0$ (dans $(\Lambda_{p\alpha}(S)/p\Lambda_{p\alpha}(S))\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$). Comme $\Lambda_{p\alpha}(S)/p\Lambda_{p\alpha}(S)\simeq\frac{(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-p\alpha}\mathcal{R}_S)[T_{p\alpha}]}{(\widetilde{p}^{p\alpha}T_{p\alpha})}$ (*cf* proposition 5.17), et comme $\omega-1\in\Lambda_0(S)^\times$ (*cf* lemme 5.16), on en déduit $(v\otimes 1)(y)\in([\widetilde{p}]^{1-p\alpha},T_{p\alpha})\Lambda_{p\alpha}(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$, et donc

$$y\in([\widetilde{p}]^{1-p\alpha},T_\alpha)\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$$

Comme $p\mid[\widetilde{p}]^{p-2}T_\alpha$, on peut supposer que $y\in[\widetilde{p}]^{1-p\alpha}\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ et $z\in\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$. En appliquant de nouveau l'étape précédente, on peut de nouveau se réduire au cas où $z\in p\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$: écrivons $y=[\widetilde{p}]^{1-p\alpha}y'$ et $z=pz'$. L'équation (2) s'écrit alors

$$\sigma_1(\xi)\big(p^{p-3}(\lambda[\widetilde{p}])^{p-2}[\widetilde{p}]^{p(1-p\alpha)}(\varphi\otimes\phi)(y')+p(\varphi\otimes\phi)(z')\big)=(\lambda-[\widetilde{p}]^{p-2})[\widetilde{p}]^{1-p\alpha}(v\otimes 1)(y')+p\xi(v\otimes 1)(z')$$

D'après le lemme 5.16, on a $\lambda=\omega[\widetilde{p}]^{p-1}+p\mu$ dans $\lambda_0(S)$, on a donc $(\lambda-[\widetilde{p}]^{p-2})[\widetilde{p}]^{1-p\alpha}=(\omega-1)[\widetilde{p}]^{p-1-p\alpha}+p\mu[\widetilde{p}]^{1-p\alpha}$. Dans $\Lambda_{p\alpha}(S)$, on a $[\widetilde{p}]^{p-1-p\alpha}=\lambda T_{p\alpha}=(\omega[\widetilde{p}]^{p-2}+p\mu)T_{p\alpha}=p(\omega[\widetilde{p}]^{p-2-p\alpha}+\mu T_{p\alpha})$. Il en résulte que $(\lambda-[\widetilde{p}]^{p-2})[\widetilde{p}]^{1-p\alpha}=p\delta$ avec $\delta=(\omega-1)(\omega[\widetilde{p}]^{p-2-p\alpha}+\mu T_{p\alpha})+\mu[\widetilde{p}]^{1-p\alpha}\in\Lambda_{p\alpha}(S)$. En divisant l'égalité qui précède par p, on obtient :

$$\sigma_1(\xi)\big(p^{p-4}(\lambda[\widetilde{p}])^{p-2}[\widetilde{p}]^{p(1-p\alpha)}(\varphi\otimes\phi)(y')+(\varphi\otimes\phi)(z')\big)=\delta(v\otimes 1)(y')+\xi(v\otimes 1)(z')$$

Comme $p\geq 5$, l'équation précédente donne :

$$\sigma_1(\xi)(\varphi\otimes\phi)(z')=\overline{\delta}(v\otimes 1)(y')+\widetilde{p}(v\otimes 1)(z')\tag{4}$$

modulo p (où la barre désigne la réduction modulo p). D'après le lemme 5.16, on a $\overline{\mu}=(2\overline{\omega}+1)\widetilde{p}^{p-3}+\widetilde{p}^{p-2}$, de sorte que $\overline{\mu}T_{p\alpha}=0$, et $\overline{\delta}=\overline{\omega}(\overline{\omega}-1)\widetilde{p}^{p-2-p\alpha}+(2\overline{\omega}+1)\widetilde{p}^{p-2-p\alpha}+\widetilde{p}^{p-1-p\alpha}=(\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1+\widetilde{p})\widetilde{p}^{p-2-p\alpha}$ dans $\Lambda_{p\alpha}(S)/p\Lambda_{p\alpha}(S)$. L'équation (4) montre que l'image de $\xi_\alpha z'$ dans

$(\Lambda_\alpha(S)/(p,[\widetilde{p}]^{p-2-p\alpha})\Lambda_\alpha(S))\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ fournit donc un élément de $\mathbf{V}_0(\mathcal{M}/p\mathcal{M})$: comme ι_α est surjective, on peut supposer, quitte à soustraire à $\xi_\alpha x$ un élément de $p\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$, que $z'\in(p,[\widetilde{p}]^{p-2-p\alpha})\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$. Ainsi, $[\widetilde{p}](v\otimes 1)(z'),(\varphi\otimes\phi)(z')\in p\Lambda_{p\alpha}(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ (parce que $p(p-2-p\alpha)\geq p-2-p\alpha$, et *cf* proposition 5.17), et l'équation (4) implique que

$$(\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1)\widetilde{p}^{p-2-p\alpha}(v\otimes 1)(y')=0$$

dans $(\Lambda_{p\alpha}(S)/p\Lambda_{p\alpha}(S))\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$. Comme $\Lambda_{p\alpha}(S)/p\Lambda_{p\alpha}(S)\simeq\frac{(\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1-p\alpha}\mathcal{R}_S)[T_{p\alpha}]}{(\widetilde{p}^{p\alpha}T_{p\alpha})}$ et $\omega^2+\omega+1\in\Lambda_0(S)^\times$, on a $(v\otimes 1)(y')\in([\widetilde{p}],T_{p\alpha})\Lambda_{p\alpha}(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$, d'où $y'\in([\widetilde{p}],T_\alpha)\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ et donc $x\in[\widetilde{p}]^{p-1-p\alpha}([\widetilde{p}],T_\alpha)=([\widetilde{p}]^{p-p\alpha},p[\widetilde{p}]^{p-1-(p+1)\alpha})\subset p\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ puisque $p-1-\alpha\leq p-p\alpha$ et $[\widetilde{p}]^{p-1-\alpha}$ a une image nulle dans $\Lambda_\alpha(S)/p\Lambda_\alpha(S)$. On peut donc écrire $x=px'$ avec $x'\in\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$, et $\xi_\alpha x\in\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})\Rightarrow\xi_\alpha x'\in\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$ (parce que $\Lambda_{p\alpha}(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ n'a pas de p-torsion). On a donc $\xi_\alpha x\in p\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$, ce qu'on voulait. □

Suite de la démonstration du lemme 5.41. L'injectivité de ι_α entraîne celle de π_1, qui est donc bijective. Le composé

$$\mathbf{V}_1(\mathfrak{M})\to\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})/p\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})\to\widetilde{\mathbf{V}}_\alpha(\mathcal{M}/p\mathcal{M})$$

est $\pi_1\circ\iota_\alpha^{-1}\circ\iota$: c'est un isomorphisme, ce qui implique la surjectivité du composé

$$\mathbf{V}(\mathfrak{M})\to\mathbf{V}_1(\mathfrak{M})\to\widetilde{\mathbf{V}}_\alpha(\mathcal{M}/p\mathcal{M})$$

la surjectivité de a_n en résulte.

Soient maintenant $x\in\mathsf{Ker}(a_n)$ et $\hat{x}\in\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})/p^{n+1}\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$ tel que $x=\pi_{n+1}(\hat{x})$. Comme π_1 est un isomorphisme, l'image de $\hat{x}$ dans $\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})/p\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$ est nulle : on peut écrire $\hat{x}=p\hat{y}$ avec $\hat{y}\in\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})/p^n\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$, de sorte que $x=\pi_{n+1}(\hat{x})=p\pi_n(\hat{y})\in\mathrm{Im}(p)$. Cela implique l'exactitude de la suite

$$0\to\widetilde{\mathbf{V}}_\alpha(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M})\xrightarrow{p}\widetilde{\mathbf{V}}_\alpha(\mathcal{M}/p^{n+1}\mathcal{M})\xrightarrow{a_n}\widetilde{\mathbf{V}}_\alpha(\mathcal{M}/p\mathcal{M})\to 0$$

Comme $\widetilde{\mathbf{V}}_\alpha(\mathcal{M}/p\mathcal{M})\simeq\mathbf{F}_p^r$, une récurrence immédiate montre que pour tout $n\in\mathbf{N}_{>0}$, le $\mathbf{Z}/p^n\,\mathbf{Z}$-module $\widetilde{\mathbf{V}}_\alpha(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M})$ est libre de rang r, et que l'application π_n est un isomorphisme. □

Remarque 5.43. Il résulte de ce qui précède que la représentation auxiliaire $\mathbf{V}(\mathfrak{M})$ est en fait indépendante du choix du relèvement $\mathfrak{M}$.

Démonstration du théorème 5.40. Le $\mathbf{Z}_p$-module $\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$ est séparé et complet pour la topologie p-adique (parce que c'est le cas du $\Lambda_\alpha(S)$-module libre $\xi_\alpha\Lambda_\alpha\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$, et parce que $\varphi_{1,\alpha}\otimes\phi-[\widetilde{p}]^\alpha v\otimes 1$ est continu pour la topologie p-adique) : on a $\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})\xrightarrow{\sim}\varprojlim_n\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})/p^n\,\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})$. Il est donc libre de rang r en vertu du lemme 5.41. La multiplication par $[\widetilde{p}]^\alpha$ induisant un isomorphisme $\mathbf{V}'_\alpha(\mathcal{M})\xrightarrow{\sim}\mathbf{V}_\alpha(\mathcal{M})$ (*cf* §5.19), le théorème en résulte. □

Proposition 5.44. *Sous les hypothèses du théorème 5.40, soit* $\beta\in\mathbf{Q}\cap\left[\alpha,\frac{1}{p}\right[$. *Alors l'application naturelle* $\Lambda_\alpha(S)\to\Lambda_\beta(S)$ *induit un isomorphisme* $\mathcal{G}_S$*-équivariant*

$$\mathbf{V}_\alpha(\mathcal{M})\xrightarrow{\sim}\mathbf{V}_\beta(\mathcal{M})$$

Démonstration. L'application naturelle $\Lambda_\alpha(S)\to\Lambda_\beta(S)$ fournit un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}_\alpha(\mathcal{M}) \arrow[d, hook] & \mathbf{V}_\beta(\mathcal{M}) \arrow[d, hook] \\
\xi\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M} \arrow[r] & \Lambda_\beta\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

qui induit le morphisme $\mathbf{V}_\alpha(\mathcal{M})\to\mathbf{V}_\beta(\mathcal{M})$. Il est $\mathcal{G}_S$-équivariant (parce que $\xi\Lambda_\alpha(S)\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}\to\Lambda_\beta\otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^\nabla_{\mathrm{cris}}(S)}\mathcal{M}$ l'est), et c'est un isomorphisme parce que c'en est un modulo p (preuve du lemme 5.41), et les $\mathbf{Z}_p$-modules $\mathbf{V}_\alpha(\mathcal{M})$ et $\mathbf{V}_\beta(\mathcal{M})$ sont de type fini. □

5.45. Preuve du théorème 3.23.
• On peut supposer que $\overline{x} = \mathsf{Spec}(\Omega)$ est au-dessus du point générique de V. D'après le théorème 4.28, si $\mathsf{Spf}(S) \subseteq \mathcal{V}$ est tel qu'on est dans les conditions du paragraphe 4.24, on dispose d'un unique sous-σ-module libre $\mathcal{U}_{S'} \subseteq \mathcal{M}_{S'}$ sur $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S')$, dont la hauteur de Hodge est $H(\mathcal{U}_{S'}, \phi_{\mathcal{U}_{S'}}) = \big((p-1)r+1\big)w$ où $w = H(\mathscr{M})$ (avec les notations du paragraphe 4.24). D'après la section 4.30, le choix de Ω fournit des données de recollement

$$f_{S_2,S_1} \colon \widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_2) \otimes_{\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S_1)} \mathcal{U}_{S'_1} \to \mathcal{U}_{S'_2}$$

pour $\mathsf{Spf}(S_1), \mathsf{Spf}(S_2) \subseteq \mathcal{V}$.

On a $p > 3$ et $\widetilde{p}^{p\varepsilon} \in \det(1 \otimes \phi_{\mathcal{U}_{S'}})$ avec $\varepsilon \in \mathbf{Q} \cap \big[0, \frac{1}{2p}\big[$ vu que $p\varepsilon = ((p-1)r+1)w < ((p-1)r+1)\frac{1}{2}\frac{1-\mu}{pr+\frac{2p-1}{p-1}} < \frac{1}{2}$: on peut choisir $\alpha \in \mathbf{Q} \cap \big[2\varepsilon, \frac{1}{p}\big[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, le théorème 5.40 appliqué au σ-module $(\mathcal{U}_{S'}, \phi_{\mathcal{U}_{S'}})$ sur $\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S')$, fournit une représentation $\rho_{S,n} \colon \mathcal{G}_{S'} \to \mathsf{GL}_r(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$, et donc un revêtement fini étale $V_{S,n} \to \big(\mathcal{V}_{\varphi} \underset{\mathcal{X}}{\times}{}_{\iota} \mathsf{Spf}(S)\big)_K$ en fibre générique, de fibre $\mathsf{GL}_r(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. D'après la proposition 5.44, les représentations $\rho_{S,n}$ et donc les revêtements $V_{S,n}$ ne dépendent pas du choix de α.

Les données de recollement de la section 4.30 induisent des données de recollement pour les revêtements $V_{S,n} \to \big(\mathcal{V}_{\varphi} \underset{\mathcal{X}}{\times}{}_{\iota} \mathsf{Spf}(S)\big)_K$. On en déduit un revêtement global fini étale $V_n \to V$, de fibre $\mathsf{GL}_r(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Par construction, la famille $\{V_n \to V\}_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ est une tour de revêtements, qui fournit la représentation ρ_V recherchée.

• Soit $(\mathscr{M}, \Phi, \mathrm{Fil}\,\mathscr{M}_{\mathcal{V}}) \xrightarrow{f} (\mathscr{M}', \Phi', \mathrm{Fil}\,\mathscr{M}'_{\mathcal{V}})$ un morphisme entre deux F-cristaux surconvergents de Hodge vérifiant les hypothèses du théorème 3.23. En vertu du théorème 4.28, on dispose localement de sous-σ-modules $\mathcal{U}_{S'} \subset \mathcal{M}_{S'}$ et $\mathcal{U}'_{S'} \subset \mathcal{M}'_{S'}$. Par unicité, le morphisme f induit un morphisme $\mathcal{U}_{S'} \to \mathcal{U}'_{S'}$, et donc un morphisme $\mathbf{V}_{\alpha}(\mathcal{U}_{S'}) \to \mathbf{V}_{\alpha}(\mathcal{U}'_{S'})$, de sorte que la représentation ρ_V est fonctorielle en $(\mathscr{M}, \Phi, \mathrm{Fil}\,\mathscr{M}_{\mathcal{V}})$.

• Supposons désormais $\mathcal{V}$ formellement lisse, que $\varphi \colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ est un relèvement de Frobenius, que $H(\mathscr{M}) = 0$, et montrons que $\rho_V(-1)$ est la représentation associée à la partie unité de $(\mathscr{M}_{\mathcal{V}}, \mathrm{Fil}\,\mathscr{M}_{\mathcal{V}})$ par la correspondance de Katz. Cela se vérifie localement : on peut supposer que $\mathcal{V} = \mathsf{Spf}(S)$ où S est formellement lisse sur W, de sorte que $\mathscr{M}$ est décrit par un S-module M muni d'une connexion intégrable $\nabla \colon M \to M \otimes_S \widehat{\Omega}_S$ et d'un Frobenius $\phi_M \colon \varphi^* M \to M$ horizontal et d'un sous-module $\mathrm{Fil}\,M$. On peut supposer que $\mathrm{Fil}\,M$ et $M/\mathrm{Fil}\,M$ sont libres sur S. On dispose alors du cristal unité de Dwork (U, ϕ_U), tel que $M = U \oplus \mathrm{Fil}\,M$ comme φ-cristaux sur S et U est étale (*cf* [28, Theorem 4.1]). Par unicité, on a $\mathcal{U} = \big(\widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(S) \otimes_S U\big)^{\nabla=0}$. Remarquons qu'ici, on a $w = 0$ vu que U est étale. En particulier, on peut prendre $\alpha = 0$ (*cf* proposition 5.44) : il s'agit de voir que $\mathbf{V}(\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S), \mathcal{U}) = \mathrm{K}(U)(1)$.

On a $\mathrm{K}(U) = \big(\widehat{S^{\mathrm{nr}}} \otimes_S U\big)^{\sigma \otimes \phi_U = 1}$, c'est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang r. On a $\widehat{S^{\mathrm{nr}}} \subset \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}(S) \subset \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(S)$, et donc $\widehat{S^{\mathrm{nr}}} \otimes_S U \subset \widetilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{cris}}(S) \otimes_S U$. Si $x \in \mathrm{K}(U)$, on a $\varphi(x) = x$, et comme $\varphi\nabla = \nabla\varphi$, on a $\varphi(\nabla(x)) = \nabla(x)$. Comme $\varphi(\widehat{\Omega}_S) \subseteq p\widehat{\Omega}_S$, on a nécessairement $\nabla(x) = 0$, et donc $x \in \mathcal{U}$. Ainsi, on a $\mathrm{K}(U) \subset \mathcal{U}$, et donc $t\mathrm{K}(U) \subseteq J^{[1]}\mathcal{U}$. Comme $(\phi_1 - 1)(tx) = t(\phi - 1)(x)$, on a $t\mathrm{K}(U) \subseteq \mathbf{V}(\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S), \mathcal{U})$. D'après la proposition 5.26, modulo p, cette inclusion induit l'inclusion $t\big((S^{\mathrm{nr}}/pS^{\mathrm{nr}}) \otimes_S U\big)^{\sigma \otimes \phi = 1} \subseteq \mathbf{V}(\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S), \mathcal{U}/p\mathcal{U})$ entre deux $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels de dimension r : c'est un isomorphisme. On a donc $t\mathrm{K}(U) = \mathbf{V}(\widetilde{\mathrm{A}}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(S), \mathcal{U})$, ce qu'on voulait.

Remarque 5.46. Contrairement au cadre algébrique, les données de recollement sont nécessaires pour la construction du revêtement rigide (*cf* [29]).

6. Application aux espaces de modules

6.1. Pureté de Zariski-Nagata pour certains espaces rigides. Dans ce qui suit, les revêtements d'espaces rigides considérés sont finis étales au sens algébrique, *i.e.* localement de la forme $\mathsf{Spm}(S) \to \mathsf{Spm}(R)$ où $R \to S$ est un morphisme fini étale de K-algèbres affinoïdes.

Si $\mathcal{X}$ est un schéma formel admissible sur W, de fibre générique $\mathfrak{X}_K$ et de fibre spéciale $\mathfrak{X}_k$, on dispose d'une application continue et surjective $\mathrm{sp}\colon \mathcal{X}_K \to \mathcal{X}_k$ appelée spécialisation. Lorsque $\mathcal{X} = \mathsf{Spf}(A)$ avec A une W-algèbre admissible, et $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier non ouvert tel que $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$, on a $\mathrm{sp}(\mathfrak{p}_K) = \mathsf{Ker}\left(A \otimes_W k \to (A/\mathfrak{p}) \otimes_W k \to (A/\mathfrak{p}) \otimes_W k/\operatorname{rad}((A/\mathfrak{p}) \otimes_W k))\right)$ (*cf* [8, §8.3]).

Théorème 6.2. *Soit $\mathcal{X}$ un W-schéma formel admissible, $X = \mathcal{X}_K$ sa fibre générique, $C \subset \mathfrak{X}_k$ un sous-schéma de codimension supérieure à 2 de sa fibre spéciale et T_U un revêtement fini étale de $U = \mathrm{sp}^{-1}(\mathcal{X}_k \setminus C)$. On suppose X régulier. Alors T_U se prolonge de façon unique en un revêtement fini étale de X.*

Démonstration. On suit de près la preuve du théorème de Zariski-Nagata (*cf* [21, Exposé X, Théorème 3.4]). L'unicité est évidente par normalité. Soit $\mathcal{U}$ le schéma formel restriction de $\mathcal{X}$ à $\mathcal{X}_k \setminus C$. On note $j\colon \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ l'immersion ouverte et $j_K\colon U \to X$ sa fibre générique.
Si $\dim(\mathcal{X}_k) \leq 1$, il n'y a rien à faire : supposons désormais $\dim(\mathcal{X}_k) \geq 2$. Le revêtement fini étale $T_U \to U$ est donné par un faisceau $\mathscr{B}_U$ de $\mathcal{O}_U$-Algèbres localement libres de rang fini. Notons $\mathscr{B}_{\mathcal{U}}$ le faisceau en $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$-Algèbres normalisation de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ dans $\mathscr{B}_U$. D'après le lemme 2.6, le faisceau $\mathscr{B}_{\mathcal{U}}$ est cohérent (rappelons que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est cohérent).
Montrons que $\mathscr{B} := (j_*\mathscr{B}_{\mathcal{U}})_K$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent. D'après [1, Corollary 6.9.11], il existe un faisceau cohérent $\mathscr{C}$ sur $\mathcal{X}$ qui prolonge $\mathscr{B}_{\mathcal{U}}$. Soient $\mathsf{Spf}(A) \subset \mathcal{X}$ un ouvert affinoïde (avec A une W-algèbre admissible) et $I \subset A$ un idéal non ouvert relevant l'idéal définissant $C \cap \mathsf{Spec}(A \otimes_W k)$. Le faisceau cohérent $\mathscr{C}$ correspond à un A-module de type fini M. Soit $x \in \mathsf{Spec}(A_K) \setminus \mathrm{V}(I_K)$ tel que $c(x) := \operatorname{codim}\left(\overline{\{x\}} \cap Y, \overline{\{x\}}\right) = 1$ (*cf* notations de [21, Exposé VIII, 2.1], relativement au fermé $Y = \mathrm{V}(I_K)$). Comme $x \notin \mathrm{V}(I_K)$, le point x correspond à un idéal premier $\mathfrak{q} \subset A$ tel que $I_K \not\subset \mathfrak{q}_K$. Comme $A_K/\mathfrak{q}_K$ est affinoïde donc un anneau de Jacobson (*cf* [9, Theorem 6.1.1/3]), et comme l'image de I dans $A_K/\mathfrak{q}_K$ est non nulle, il existe un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ tel que $\mathfrak{p}_K$ soit maximal dans A_K, contienne $\mathfrak{q}_K$ et pas I_K. On a donc $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, $I \not\subset \mathfrak{p}$ et $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$. Si $x_1 \in \mathsf{Spm}(A_K)$ désigne le point correspondant à $\mathfrak{p}_K$, on a donc $\mathrm{sp}(x_1) \notin C$, et donc que $M_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module libre de rang fini. En localisant, cela implique que $M_{\mathfrak{q}}$ est un $A_{\mathfrak{q}}$-module libre de rang fini : on a $\operatorname{prof}_x(\mathscr{C}) := \operatorname{prof}(M_{\mathfrak{q}}) = \dim(A_{\mathfrak{q}}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{q}) > 0$ (parce que $c(x) = 1$). Comme c'est vrai pour tout x tel que $c(x) = 1$, le théorème de finitude (*cf* [21, Exposé VIII, Corollaire 2.3]) implique que $(j_*\mathscr{B}_{\mathcal{U}})_K$ est cohérent.

Montrons par récurrence sur $n = \dim(\mathcal{X}_k)$ que $\mathscr{B}$ définit un faisceau d'algèbres étales sur X. Soit $x_0 \in \mathrm{sp}^{-1}(C)$. Fixons un ouvert affinoïde $\mathsf{Spm}(A_K) \subset X$ contenant x_0 (avec A une W-algèbre admissible). Ce dernier correspond à un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ tel que $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$ et $p \notin \mathfrak{p}$. Comme $x_0 \in \mathrm{sp}^{-1}(C)$, on a $\overline{I} \subset \mathfrak{p} \otimes_W k$. L'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier (car X l'est). Par ailleurs, $C \cap \mathsf{Spec}(A \otimes_W k) = \mathrm{V}(\overline{I})$, avec $\operatorname{ht}(\overline{I}) \geq 2$ par hypothèse. Posons $\mathfrak{m} = \mathsf{Ker}(A \to A/\mathfrak{p} \to \kappa(A/\mathfrak{p}))$ (où $\kappa(A/\mathfrak{p})$ désigne le corps résiduel de l'anneau local $A/\mathfrak{p}$) : c'est un idéal maximal de A.

<u>Cas $n = 2$.</u> On a $\operatorname{ht}(\mathfrak{p} \otimes_W k) \geq \operatorname{ht}(\overline{I}) = 2$, donc $\operatorname{ht}(\mathfrak{p} \otimes_W k) = 2$ et $\mathfrak{p} \otimes_W k$ est un idéal maximal de $A \otimes_W k$. Par maximalité, on a $\operatorname{ht}(\mathfrak{m}) = 3$, de sorte que $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 2$, et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal contenant I_K. Montrons que $\operatorname{prof}(\mathscr{B}_{x_0}) \geq 2$: on peut se restreindre à $X_0 := \mathsf{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$. Par construction, la restriction de $\mathscr{B}$ à X_0 est l'image directe d'un $\mathcal{O}_{X_0'}$-module, où $X_0' = X_0 \setminus \{x_0\}$. D'après [21, Exposé I, Corollaire 2.11], cela implique que $\underline{\mathrm{H}}_{x_0}(\mathscr{B}) = \underline{\mathrm{H}}_{x_0}(\mathscr{B}) = 0$, de sorte que $\operatorname{prof}(\mathscr{B}_{x_0}) \geq 2$ en vertu de [21, Exposé III, Proposition 3.3]. D'après le théorème d'Auslander-Buchsbaum (*cf* [31, Theorem 19.1]), $\operatorname{dimproj}(\mathscr{B}_{x_0}) + \operatorname{prof}(\mathscr{B}_{x_0}) = \operatorname{prof}(A_{\mathfrak{p}})$. Comme $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier de dimension 2, on a $\operatorname{prof}(A_{\mathfrak{p}}) = 2$, ce qui implique $\operatorname{dimproj}(\mathscr{B}_{x_0}) = 0$, et donc que $\mathscr{B}_{x_0}$ est libre sur $A_{\mathfrak{p}}$. Comme c'est vrai pour tout x_0, il en résulte que $\mathscr{B}$ définit un revêtement fini et plat de X.
L'idéal discriminant Δ de $\mathscr{B}$ prolonge Δ_U, qui est inversible. Il est localement principal : quitte à se restreindre à des ouverts, on peut supposer Δ engendré par une section locale f de $\mathcal{O}_X$. La restriction $f_{|U}$ de f à U est inversible. Le théorème de Hartogs (principe de Koecher rigide analytique, *cf* [30, Satz 2] & [23, Proposition 2.10]) implique que $f_{|U}^{-1}$ se prolonge (uniquement) en une fonction g sur X. Par unicité du prolongement, on a $fg = 1$ (parce que c'est vrai sur U) : l'idéal Δ est inversible, ce qui montre que $\mathcal{B}$ définit un revêtement fini étale $T \to X$.

Cas $n > 2$. Notons $\{\overline{\mathfrak{P}}_1, \dots, \overline{\mathfrak{P}}_s\}$ l'ensemble (éventuellement vide) des idéaux premiers de $A \otimes_W k$ qui sont de hauteur 2 et qui contiennent $\overline{I}$. Supposons que $\mathfrak{p} \otimes_W k \subset \bigcup_{i=1}^s \overline{\mathfrak{P}}_i$: d'après le lemme d'évitement des idéaux premiers, il existe $i \in \{1, \dots, s\}$ tel que $\mathfrak{p} \otimes_W k \subset \overline{\mathfrak{P}}_i$, de sorte que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p} \otimes_W k) \leq 2$. Comme $p \notin \mathfrak{p}$, on a $n = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$: d'après [31, Theorem 13.6], on a $n \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p} \otimes_W k)$, et donc $n \leq 2$, ce qui est contradictoire. On a donc $\mathfrak{p} \otimes_W k \not\subset \bigcup_{i=1}^s \overline{\mathfrak{P}}_i$: on peut choisir $t \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$ de sorte que $t \notin \overline{\mathfrak{P}}_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$.
L'élément t est un paramètre régulier dans l'anneau local régulier $A_{\mathfrak{p}}$: l'anneau $(A/tA)_{\mathfrak{p}}$ est régulier. Comme $(A/tA)_K$ est excellent (*cf* lemme 2.6), le lieu $\mathrm{Reg}((A/tA)_K)$ est ouvert dans $\mathsf{Spec}((A/tA)_K)$: quitte à se restreindre à un ouvert affine $\mathsf{Spf}(A)$ plus petit, on peut supposer $(A/tA)_K$ intègre et régulier. Posons $\mathfrak{q} = \mathsf{Ker}(A \to (A/tA)_K)$, c'est un idéal premier de A contenant t. Quitte à se restreindre à un ouvert plus petit, on peut en outre supposer que $\mathfrak{q} = tA$. N'ayant pas de p-torsion l'anneau $A/\mathfrak{q}$ est une W-algèbre admissible (*cf* [8, 7.3 Corollary 5]).
Supposons qu'il existe $u, v \in A$ tels que $tu = pv$. Comme $\mathfrak{q} = tA$ est premier et $p \notin tA$ (parce que $t \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ et $p \in A_{\mathfrak{p}}^{\times}$), on a $v = tw$ avec $w \in A$, et donc $t(u - pw) = 0$ et donc $u = pw \in pA$. Cela implique que t n'est pas diviseur de zéro dans $A \otimes_W k$. Ce n'est pas non plus une unité (ce n'est pas une unité dans A qui est p-adiquement complet) : on a donc $\dim((A/\mathfrak{q}) \otimes_W k) = \dim(A \otimes_W k) - 1$. Soit $\overline{\mathfrak{P}} \in \mathrm{V}(\overline{I}) \cap \mathrm{V}(\mathfrak{q} \otimes_W k) = C \cap \mathsf{Spec}((A/\mathfrak{q}) \otimes_W k)$. Si $\overline{\mathfrak{P}} \notin \{\overline{\mathfrak{P}}_1, \dots, \overline{\mathfrak{P}}_s\}$, alors $\mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}}) \geq 3$, de sorte que $\mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q} \otimes_W k) = \mathrm{ht}((\overline{\mathfrak{P}} + tA \otimes_W k)/tA \otimes_W k) \geq \mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}}) - 1 \geq 2$. Si $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{P}}_i$, alors $t \notin \overline{\mathfrak{P}}$, donc $\mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}} + tA \otimes_W k) > \mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}}) = 2$, et $\mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q} \otimes_W k) = \mathrm{ht}((\overline{\mathfrak{P}} + tA \otimes_W k)/tA \otimes_W k) \geq \mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}}) - 1 \geq 2$. Dans tous les cas, on a $\mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{P}}/\mathfrak{q} \otimes_W k) \geq 2$, ce qui implique que $C \cap \mathsf{Spec}((A/\mathfrak{q}) \otimes_W k)$ est de codimension ≥ 2 dans $\mathsf{Spec}((A/\mathfrak{q}) \otimes_W k)$. L'hypothèse de récurrence appliquée au schéma formel admissible $\mathsf{Spf}(A/\mathfrak{q})$ et à la restriction du faisceau $\mathscr{B}$ à sa fibre générique montrent que cette restriction définit un faisceau d'algèbres étales sur $\mathsf{Spf}(A/\mathfrak{q})^{\mathrm{rig}}$: si $B_K = \Gamma(\mathsf{Spf}(A)^{\mathrm{rig}}, \mathscr{B})$, la A_K/tA_K-algèbre B_K/tB_K est finie étale. Cela implique que le morphisme $\varprojlim_m A_K/t^m A_K \to \varprojlim_m B_K/t^m B_K$ est fini étale. Après changement de base par $\varprojlim_m A_K/t^m A_K \to \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ (où $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ désigne le complété de l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$), le morphisme $\widehat{A}_{\mathfrak{p}} \to B_K \otimes_{A_K} \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ est fini étale. Par fidèle platitude du morphisme $A_{\mathfrak{p}} \to \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$, le morphisme $A_{\mathfrak{p}} \to B_K \otimes_{A_K} A_{\mathfrak{p}}$ est fini étale, de sorte que le faisceau d'algèbres $\mathscr{B}$ est fini étale en x_0. Comme c'est vrai pour tout $x_0 \in \mathrm{sp}^{-1}(C)$, on a fini. □

Corollaire 6.3. *Sous les hypothèses du théorème 6.2, notons* $\mathbf{\acute{E}t}(X)$ *(resp.* $\mathbf{\acute{E}t}(U)$*) la catégorie des revêtements finis étales de* X *(resp.* U*). Alors le foncteur de restriction* $\mathbf{\acute{E}t}(X) \to \mathbf{\acute{E}t}(U)$ *est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Reprenons les notations de la preuve du théorème 6.2. Comme C est de codimension supérieure à 2 dans $\mathcal{X}_k$, l'homomorphisme naturel $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \to j_* \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ est un isomorphisme (*cf* [21, Exposé X, lemme 3.5]). En inversant p, on en déduit un isomorphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[p^{-1}] \to j_* \mathcal{O}_{\mathcal{U}}[p^{-1}]$. Comme dans *loc. cit.*, cela implique que si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux faisceaux en $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[p^{-1}]$-modules localement libres de rang fini, l'homomorphisme naturel $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[p^{-1}]}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to j_* \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{U}}[p^{-1}]}(\mathscr{F}_{|\mathcal{U}}, \mathscr{G}_{|\mathcal{U}})$ est un isomorphisme. Soient maintenant $T_1 \to X$ et $T_2 \to X$ deux revêtements finis étales. Ils correspondent à des faisceaux $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ de $\mathcal{O}_X$-Algèbres localement libres de rang fini. Notons $\mathscr{B}_{1,\mathcal{X}}$ et $\mathscr{B}_{2,\mathcal{X}}$ les normalisations de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ dans ces derniers. On dispose des faisceaux Zariski $\mathscr{B}_{1,\mathcal{X}}[p^{-1}]$ et $\mathscr{B}_{2,\mathcal{X}}[p^{-1}]$. Ce sont des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[p^{-1}]$-Modules localement libres (qui ne sont autres que les restrictions de $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ à $\mathcal{X}_{k,\mathrm{Zar}}$ via le morphisme de spécialisation). Ces derniers sont localement libres de rang fini, de sorte que l'homomorphisme naturel $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[p^{-1}]}(\mathscr{B}_{2,\mathcal{X}}[p^{-1}], \mathscr{B}_{1,\mathcal{X}}[p^{-1}]) \to j_* \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{U}}[p^{-1}]}(\mathscr{B}_{2,\mathcal{U}}[p^{-1}], \mathscr{B}_{1,\mathcal{U}}[p^{-1}])$ est un isomorphisme. Mais par normalité, on a l'égalité $\mathsf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_1) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[p^{-1}]}(\mathscr{B}_{2,\mathcal{X}}[p^{-1}], \mathscr{B}_{1,\mathcal{X}}[p^{-1}])$ (et de même sur $\mathcal{U}$) : cela montre que $\mathsf{Hom}_X(T_1, T_2) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_1) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{B}_{2|U}, \mathscr{B}_{1|U}) \simeq \mathsf{Hom}_U(T_1 \times_X U, T_2 \times_X U)$, et donc la pleine fidélité. L'essentielle surjectivité résulte du théorème 6.2. □

Remarque 6.4. (1) La pleine fidélité appliquée aux revêtements triviaux $T_1 = T_2 = X$ redonne le théorème de Hartogs (invoqué au cours de la preuve du théorème 6.2).

(2) Bien qu'induisant un isomorphisme au niveau des sections globales (en vertu du théorème de Hartogs , le morphisme naturel $\mathcal{O}_X \to j_{K*}\mathcal{O}_U$ entre les faisceaux de fonctions rigides n'est pas un isomorphisme.

6.5. Sous-groupe canonique et monodromie p-adique. Supposons $p > 3$. On commence par rappeler quelques résultats et donner quelques compléments sur la surconvergence du relèvement du Frobenius du lieu ordinaire de la variété modulaire de Siegel (*cf* [2, §8]).

On fixe des entiers $g \geq 2$, $N \geq 3$ et un nombre premier p ne divisant pas N. On note $\mathcal{A}_{g,N}$ l'espace de module sur $\mathbf{Z}_p$ des variétés abéliennes de dimension g, principalement polarisées et avec structure de niveau N et $\mathcal{A}_{g,N}^{\mathrm{univ}}$ le schéma abélien universel.

Notons $\mathcal{X}$ le complété formel p-adique de $\mathcal{A}_{g,N}$ et $\mathcal{Q}$ l'ouvert ordinaire, dont la fibre réduite paramètre les variétés abéliennes ordinaires.

On considère le problème de module $\mathcal{A}_{g,N}^{\mathrm{ord}}$ qui associe à tout $\mathbf{Z}_p$-schéma localement noethérien S dans lequel p est localement nilpotent, l'ensemble des classes d'isomorphisme

$$\mathcal{A}_{g,N}^{\mathrm{ord}}(S) = \{(B, \lambda, \delta_N)\}/_{\simeq}$$

où $(B, \lambda, \delta_N) \in \mathcal{A}_{g,N}(S)$ telle que toutes les fibres géométriques de $B \to S$ sont des variétés abéliennes ordinaires. Alors $\mathcal{A}_{g,N}^{\mathrm{ord}}$ est ind-représentable par $\mathcal{Q}$. Soient $f\colon \mathbf{A} \to \mathcal{Q}$ le schéma abélien formel universel, $\lambda\colon \mathbf{A} \to \widehat{\mathbf{A}}$ sa polarisation principale et δ sa structure de niveau N. Soient $\mathbf{A}[p]$ le noyau de la multiplication par p, $\mathbf{A}[p]^{\text{ét}}$ son plus grand quotient étale (*cf* [32, II Proposition 4.9]) et $\mathbf{A}[p]^{\circ}$ le noyau du morphisme naturel $\mathbf{A}[p] \to \mathbf{A}[p]^{\text{ét}}$. Le quotient $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathbf{A}[p]^{\circ}$ est un $\mathcal{Q}$-schéma abélien formel dont toutes les fibres géométriques sont ordinaires. La polarisation principale de $\mathbf{A}$ et la dualité de Cartier entre $\mathbf{A}[p]$ et $\widehat{\mathbf{A}}[p]$ induisent un accouplement parfait $\mathbf{A}[p] \times_{\mathcal{Q}} \mathbf{A}[p] \to \mu_p \times_{\mathsf{Spf}(\mathbf{Z}_p)} \mathcal{Q}$, pour lequel $\mathbf{A}[p]^{\circ}$ est totalement isotrope. Par conséquent λ induit une polarisation $\lambda'\colon \mathbf{B} \to \widehat{\mathbf{B}}$.

Soient $\mathrm{Frob}_{\mathcal{Q}_k}$ le Frobenius absolu de $\mathcal{Q}_k$ et $\mathbf{A}_k^{(p)} \to \mathcal{Q}_k$ le changement de base de $\mathbf{A}_k \to \mathcal{Q}_k$ par $\mathrm{Frob}_{\mathcal{Q}_k}$. Les $\mathcal{Q}$-schémas en groupes formels $\mathbf{A}[p]^{\circ}$ et $\widehat{\mathbf{A}}[p]^{\circ}$ relèvent les noyaux des isogénies de Frobenius $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}_k^{(p)}$ et $\widehat{\mathbf{A}}_k \to \widehat{\mathbf{A}}_k^{(p)}$ respectivement. Donc on a des isomorphismes canoniques $\mathbf{B}_k \simeq \mathbf{A}_k^{(p)}$ et $\widehat{\mathbf{B}}_k \simeq \widehat{\mathbf{A}}_k^{(p)}$ de $\mathcal{Q}_k$-schémas abéliens. Sous ces identifications, la polarisation $\lambda' \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p$ de $\mathbf{B}_k$ est l'image inverse par $\mathrm{Frob}_{\mathcal{Q}_k}$ de la polarisation $\lambda \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p$ de $\mathbf{A}_k$. Le morphisme canonique $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ induit un isomorphisme $\mathbf{A}[N] \simeq \mathbf{B}[N]$, donc une structure de niveau δ' sur $\mathbf{B}$. Le triplet $(\mathbf{B}, \lambda', \delta')$ induit alors un morphisme

$$\mathcal{Q} \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{Q}}} \mathcal{Q}$$

L'universalité de X et l'isomorphisme $\mathbf{B}_k \simeq \mathbf{A}_k^{(p)}$ (compatible aux polarisations et structures de niveau) montrent que $\varphi_{\mathcal{Q}}$ relève $\mathrm{Frob}_{\mathcal{Q}_k}$.

La fibre générique rigide $Q = \mathcal{Q}^{\mathrm{rig}}$ associée, au sens de Raynaud, au schéma formel $\mathcal{Q}$ est un ouvert admissible de $X = \mathcal{X}^{\mathrm{rig}}$. La surconvergence du relèvement $\varphi_{\mathcal{Q}}$ du Frobenius de $\mathcal{Q}_k$ peut se résumer dans le théorème suivant (*cf* [2, Th 8.1.1] et [17, Théorème 8 (2)]) :

Théorème 6.6. *Il existe un voisinage strict V de Q dans X et un morphisme $\varphi_V\colon V \to X$ qui prolonge $\varphi_{Q}^{\mathrm{rig}}\colon Q \to Q$.*

Théorème 6.7. *La représentation de monodromie associé à $\mathbf{A}[p^{\infty}]^{\text{ét}}$ est surconvergente.*

Démonstration. Le voisinage strict V du théorème 6.6 admet un modèle entier normal $\iota\colon \mathcal{V} \to \mathcal{X}$ (défini sur une extension, éventuellement ramifiée, de $\mathbf{Z}_p$). Par conséquent, le morphisme φ_V s'étend en $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{X}$. D'après [17, Théorème 4 (3)], $(\mathcal{V}, \iota, \varphi)$ est un relèvement surconvergent du Frobenius absolu de $\mathcal{Q}_k$ (*cf* définition 3.10).

Soit $\mathscr{M}$ le cristal de Dieudonné sur le gros site cristallin $(\mathcal{V}/W)_{\mathrm{CRIS}}$ associé au schéma abélien universel $\mathcal{A}_{g,N}^{\mathrm{univ}}$ (*i.e.* au groupe de Barsotti-Tate $\mathcal{A}_{g,N}^{\mathrm{univ}}[p^{\infty}]$). La cohomologie de de Rham $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{A}_{\mathcal{V}}/\mathcal{V})$ est l'évaluation $\mathscr{M}_{\mathcal{V}}$ de $\mathscr{M}$ en l'immersion triviale $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{V}$: elle est munie de la filtration de Hodge $\mathrm{Fil}\,\mathscr{M}_{\mathcal{V}} \subset \mathscr{M}_{\mathcal{V}}$. D'après [17, Théorème 4 (3)], le Frobenius cristallin fait localement du quadruplet $(\mathscr{M}, \Phi, \mathrm{Fil}\,\mathscr{M}_{\mathcal{V}})$ un F-cristal surconvergent de Hodge, de sorte que $\mathscr{M}$ est un F-cristal surconvergent localement de Hodge.

D'après le lemme 3.8 et la proposition 7.1, il existe un ouvert d'un éclatement admissible de $\mathcal{V}$ et voisinage formel strict du lieu ordinaire tel que la restriction de $\mathscr{M}_{\mathcal{V}}/\operatorname{Fil}\mathscr{M}_{\mathcal{V}}$ ait une hauteur de Hodge inférieure à la borne du théorème 3.23. Quitte à remplacer $\mathcal{V}$ par cet ouvert, on peut supposer qu'on est sous les hypothèses du théorème 3.23 modulo la condition d'isotrivialité.

D'après [33, Théorème 3.4], cette dernière est remplie au voisinage des variétés abéliennes A_0 sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ telles que $a(A_0) = \dim_{\overline{\mathbf{F}}_p}(\alpha_p, A_0[p]) \leq 1$. Le complémentaire C de ces points est un sous-schéma de codimension supérieure à 1 de la fibre spéciale $\mathcal{V}_k$. Si $\mathcal{V}' = \mathcal{V}_\varphi \times_{\mathcal{X}_\iota} \mathcal{V}$, le théorème 3.23 fournit alors une tour de revêtements finis étales $\{T_{U,n} \to U = \operatorname{sp}^{-1}(\mathcal{V}'_k \setminus C)\}_n$ (correspondant à une représentation $\pi_1(U,\overline{x}) \to \mathsf{GL}_r(\mathbf{Z}_p)$). D'après le théorème 6.2, cette tour se prolonge en une tour de revêtements finis étales $\{T_n \to V\}_n$, correspondant à la représentation $\pi_1(V,\overline{x}) \to \mathsf{GL}_r(\mathbf{Z}_p)$ recherchée. $\square$

6.8. Tours d'Igusa surconvergentes. Soit V un voisinage strict de Q tel que la représentation de monodromie se prolonge à V. On dispose sur V d'un système compatible de faisceaux étales localement constants finis $(\mathcal{L}_n)_n$ localement isomorphes à $\big((\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^g\big)_n$. Ils prolongent les faisceaux étales $(\mathbf{A}[p^n]^{\text{ét}})^{\text{rig}}$ sur Q. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$T_{n,V} = \underline{\operatorname{Isom}}_V(\mathcal{L}_n, (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^g)$$

C'est un revêtement étale galoisien de V dont le groupe de Galois est canoniquement isomorphe à $\mathsf{GL}_g(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. La famille $\big(T_{n,V}\big)_n$ est la *tour d'Igusa surconvergente* au-dessus de V. On pose $T_{\infty,V} = \varprojlim_n T_{n,V}$. De même, soit

$$T_n = \underline{\operatorname{Isom}}_Q\left((\mathbf{A}[p^n]^{\text{ét}})^{\text{rig}}, (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^g\right)$$

la tour d'Igusa classique. On note $\operatorname{pr}_V : T_{\infty,V} \to V$ (resp. $\operatorname{pr}: T_\infty \to Q$) la projection.

Soit N le sous-groupe algébrique des matrices unipotentes supérieures de GL_g. On définit l'*espace des formes modulaires p-adiques de Siegel* par :

$$M_p = \mathrm{H}^0\left(Q, \operatorname{pr}_*\widehat{\mathscr{O}}_{T_\infty}^{\mathsf{N}(\mathbf{Z}_p)}\right)$$

où le chapeau désigne le complété de $\mathscr{O}_{T_\infty} = \varinjlim_n \mathscr{O}_{T_n}$ pour la norme définie par $\|f\| = \sup\limits_{\psi \in T_n} |f(\psi)|$ (notons que T_n est quasi-compact et que $\mathscr{O}_{T_n}$ est un faisceau de Banach fini sur $\mathscr{O}_Q$).

Si $Q \subset V' \subseteq V$ est un voisinage strict de Q dans V, on a $T_{\infty,V'} = T_{\infty,V} \times_V V'$. Notons

$$M_{V'} \subseteq \mathrm{H}^0\left(V', \operatorname{pr}_{V'*}\widehat{\mathscr{O}}_{T_{\infty V'}}^{\mathsf{N}(\mathbf{Z}_p)}\right)$$

le sous-espace des sections *localement analytiques* relativement à l'action de GL_g. On définit l'*espace des formes modulaires surconvergentes de Siegel* par :

$$M^\dagger = \varinjlim_{Q \subset V' \subseteq V} M_{V'}$$

Les inclusions $T_\infty \subset T_{\infty,V'}$ induisent une inclusion

$$M^\dagger \hookrightarrow M_p$$

On munit $M^\dagger$ de la topologie limite inductive. On dispose d'une action continue de $\mathsf{T}(\mathbf{Z}_p)$, et d'un opérateur de Dwork U, induit par l'opérateur de Hecke U_p sur M_p (*cf* [2, Prop. 7.5]).

Soit $\mathcal{W}$ l'espace des poids, c'est un espace analytique dont les $\mathbf{C}_p$-points sont $\mathsf{Hom}_{\text{cont}}(\mathsf{T}(\mathbf{Z}_p), \mathbf{C}_p)$. Pour $u \in \mathbf{Q}_{>0}$, notons $\mathcal{U}_u$ l'ouvert de $\mathcal{W}$ constitué des caractères de $\mathsf{T}(\mathbf{Z}_p)$ qui se prolongent analytiquement aux disques centrés sur $\mathsf{T}(\mathbf{Z}_p)$ de rayon p^{-u}. La famille $\{\mathcal{U}_u\}_u$ est un recouvrement admissible de $\mathcal{W}$. L'espace $M^\dagger$ fournit un $\Gamma(\mathcal{U}_u, \mathcal{O}_{\mathcal{U}_u})$-module de Banach orthonormalisable muni de l'action de l'opérateur U et des opérateurs de Hecke. L'étude spectrale de l'opérateur U agissant sur ces modules de Banach permet de construire des familles de formes modulaires surconvergentes interpolant les formes classiques. C'est l'objectif de [12].

7. Appendice : normalité des modèles formels des voisinages stricts

Proposition 7.1. *Soient A un anneau noethérien, excellent, intègre, normal, $\alpha \in A$ premier, $r \in \mathbf{N}_{>0}$ et $f_1, \ldots, f_r \in A$. On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, l'idéal $\mathfrak{p}_i = \alpha A + f_i A$ est premier de hauteur 2, et $f_j \notin \mathfrak{p}_i$ si $j \neq i$. Si $f = f_1 \cdots f_r$ et $n \in \mathbf{N}_{>0}$, le complété α-adique de $A\big[\frac{\alpha^n}{f}\big]$ est normal.*

Commençons par observer que α est régulier dans A/f_iA pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. En effet, comme $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) = 2$, on a $f_i \notin \alpha A$: si $\alpha x = f_i y$ avec $x, y \in A$, on a $y \in \alpha A$ puisque α est premier, si bien que $x \in f_i A$.

Posons $\widetilde{A} = \big[\frac{\alpha^n}{f}\big] := A[X]/(\alpha^n - Xf)A[X]$.

Lemme 7.2. *$\widetilde{A}$ est un sous-anneau de $A\big[\frac{1}{f}\big]$, donc intègre.*

Démonstration. Soit $\lambda\colon A[X] \to A\big[\frac{1}{f}\big]$ le morphisme d'évaluation en α^n/f : il s'agit de montrer que $\mathsf{Ker}(\lambda) = (\alpha^n - Xf)A[X]$. Soit $P(x) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_N X^N \in \mathsf{Ker}(\lambda)$. On a $a_0 f^N + a_1 \alpha^n f^{N-1} + \cdots + a_N \alpha^{Nn} = 0$ donc $a_0 f^N \in \alpha^n A$. Comme $A/\alpha A$ est intègre, que les images des f_i dans $A/\alpha A$ sont non nulles (vu que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) = 2$), celle de f est non nulle, donc non diviseur de zéro : comme A est intègre, on a $a_0 = \alpha^n b_0 \in \alpha^n A$, de sorte que $P(x) = (\alpha^n - Xf)b_0 + (fb_0 + a_1)X + a_2 X^2 + \cdots + a_N X^N = (\alpha^n - Xf)b_0 + XQ(X)$. On a alors $Q \in \mathsf{Ker}(\lambda)$: on peut conclure par récurrence sur $\deg(P)$. □

Lemme 7.3. *Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, posons $\mathfrak{p}_i\widetilde{A} \subset \widetilde{A}$. On a :*

(1) l'idéal $\mathfrak{p}_i\widetilde{A}$ est premier dans $\widetilde{A}$ et $A \cap \mathfrak{p}_i\widetilde{A} = \mathfrak{p}_i$;
(2) l'anneau $\widetilde{A}_{\mathfrak{p}_i\widetilde{A}}$ est de valuation discrète, en particulier $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i\widetilde{A}) = 1$;
(3) $f_i\widetilde{A}$ est $\mathfrak{p}_i\widetilde{A}$-primaire ;
(4) une décomposition primaire de $f\widetilde{A}$ est $f\widetilde{A} = f_1\widetilde{A} \cap \cdots \cap f_r\widetilde{A}$;
(5) pour tout $m \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $\mathrm{Ass}_{\widetilde{A}}\big(f\widetilde{A}\big) = \big\{\mathfrak{p}_1\widetilde{A}, \ldots, \mathfrak{p}_r\widetilde{A}\big\}$.

Démonstration. (1) On a $\widetilde{A} = A[X]/(\alpha^n - Xf)A[X]$ donc $\widetilde{A}/\mathfrak{p}_i\widetilde{A} \simeq (A/\mathfrak{p}_i)[X]$ est intègre. En outre, on a $\mathsf{Ker}\big(A \to \widetilde{A}/\mathfrak{p}_i\widetilde{A} \simeq (A/\mathfrak{p}_i)[X]\big) = \mathfrak{p}_i$.
(2) Posons $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{p}_i A[X] = \mathsf{Ker}(A[X] \to \widetilde{A}/\mathfrak{p}_i\widetilde{A})$ (car $\alpha^n - Xf \in \mathfrak{p}_i A[X]$). On a alors

$$\widetilde{A}_{\mathfrak{p}_i\widetilde{A}} = \widetilde{A} \otimes_{A[X]} (A[X])_{\mathfrak{P}_i} \simeq (A[X])_{\mathfrak{P}_i}/(\alpha^n - Xf)(A[X])_{\mathfrak{P}_i}$$

donc $\widetilde{A}_{\mathfrak{p}_i\widetilde{A}}/\alpha\widetilde{A}_{\mathfrak{p}_i\widetilde{A}} \simeq (A[X])_{\mathfrak{P}_i}/(\alpha, Xf)(A[X])_{\mathfrak{P}_i}$. Comme $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) = 2$, on a $X \notin \mathfrak{P}_i$ et $f_j \notin \mathfrak{P}_i$ pour $j \neq i$, de sorte que $\widetilde{A}_{\mathfrak{p}_i\widetilde{A}}/\alpha\widetilde{A}_{\mathfrak{p}_i\widetilde{A}} \simeq (A[X])_{\mathfrak{P}_i}/(\alpha, f_i)(A[X])_{\mathfrak{P}_i} = k(\mathfrak{P}_i)$ est un corps. Il en résulte que $\alpha\widetilde{A}_{\mathfrak{p}_i\widetilde{A}}$ est l'idéal maximal de l'anneau local $\widetilde{A}_{\mathfrak{p}_i\widetilde{A}}$. Comme cet idéal est non nul et A donc $\widetilde{A}_{\mathfrak{p}_i\widetilde{A}}$ est noethérien, ce dernier est un anneau de valuation discrète en vertu de [31, Theorem 11.2].
(3) On a $\widetilde{A}/f_i\widetilde{A} \simeq (A/(\alpha^n, f_i)A)[X]$. L'idéal premier $\mathfrak{p}_i(\widetilde{A}/f_i\widetilde{A}) = \alpha(\widetilde{A}/f_i\widetilde{A})$ est nilpotent : on a $\mathrm{nil}(\widetilde{A}/f_i\widetilde{A}) = \mathfrak{p}_i(\widetilde{A}/f_i\widetilde{A})$, si bien que $\sqrt{f_i\widetilde{A}} = \mathfrak{p}_i\widetilde{A}$.
Soient $P, Q \in (A/f_iA)[X]$ tels que $PQ \in \alpha(A/f_iA)[X]$ *i.e.* que $\overline{PQ} = 0 \in (A/\mathfrak{p}_i)[X]$: comme $\mathfrak{p}_i$ est premier, on a $P \in \alpha(A/f_iA)[X]$ ou $Q \in \alpha(A/f_iA)[X]$. L'élément α étant régulier dans A/f_iA donc dans $(A/f_iA)[X]$, cela implique que si $PQ \in \alpha^n(A/f_iA)[X]$, alors il existe $m \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $P \in \alpha^m(A/f_iA)[X]$ et $Q \in \alpha^{n-m}(A/f_iA)[X]$. Modulo α^n, il en résulte que si $xy = 0$ dans $\widetilde{A}/f_i\widetilde{A}$, on a $x \in \alpha^m\widetilde{A}/f_i\widetilde{A}$ et $y \in \alpha^{n-m}\widetilde{A}/f_i\widetilde{A}$ avec $m \in \{0, \ldots, n\}$. En particulier, si x est un diviseur de zéro et $y \in \widetilde{A}/f_i\widetilde{A} \setminus \{0\}$ est tel que $xy = 0$, on a $m > 0$, donc $x \in \alpha\widetilde{A}/f_i\widetilde{A}$. L'ensemble des diviseurs de zéro dans $\widetilde{A}/f_i\widetilde{A}$ coïncide donc avec le nilradical, de sorte que $f_i\widetilde{A}$ est primaire.
(4) Soit $j \neq i$. On a $f_j \notin \mathfrak{p}_i\widetilde{A}$ (sinon on aurait $f_j \in A \cap \mathfrak{p}_i\widetilde{A} = \mathfrak{p}_i$, ce qui n'est pas par hypothèse), de sorte que $f_j \notin \mathfrak{p}_i(\widetilde{A}/f_i\widetilde{A})$, *i.e.* f_j est régulier dans $\widetilde{A}/f_i\widetilde{A}$ en vertu de (3). Ainsi, si $x \in \widetilde{A}$ est tel que $f_j x \in f_i\widetilde{A}$, on a $x \in f_i\widetilde{A}$. Comme $\widetilde{A}$ est intègre (*cf* lemme 7.2), cela implique que $f_1\widetilde{A} \cap \cdots \cap f_r\widetilde{A} \subseteq f_1 \cdots \widetilde{A} = f\widetilde{A}$. L'inclusion réciproque est triviale.

(5) D'après [31, §6, exercice 2], on a $\mathrm{Ass}_{\widetilde{A}}\left(f^m\widetilde{A}\right) = \mathrm{Ass}_{\widetilde{A}}\left(f\widetilde{A}\right) = \left\{\mathfrak{p}_1\widetilde{A}, \ldots, \mathfrak{p}_r\widetilde{A}\right\}$ en vertu de [31, Theorem 6.8 (ii)]. □

Démonstration de la proposition 7.1. Commençons par montrer que $\widetilde{A}$ est normal. Comme $\widetilde{A}\left[\frac{1}{f}\right] = A\left[\frac{1}{f}\right]$ est normal, les localisés $\widetilde{A}_{\mathfrak{p}}$ sont normaux pour $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\left(\widetilde{A}\left[\frac{1}{f}\right]\right)$ de hauteur 1. Si $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\left(\widetilde{A}\right)$ contient f, alors il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $f_i \in \mathfrak{p}$. Comme $\alpha^n = f\frac{\alpha^n}{f} \in \mathfrak{p}$, on a aussi $\alpha \in \mathfrak{p}$, et donc $\mathfrak{p}_i\widetilde{A} \subseteq \mathfrak{p}$. Si en outre $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, on a nécessairement $\mathfrak{p}_i\widetilde{A} = \mathfrak{p}$: comme $\widetilde{A}_{\mathfrak{p}_i\widetilde{A}}$ est de valuation discrète (*cf* lemme 7.3 (2)), il est normal. Ce qui précède montre donc que l'anneau $\widetilde{A}$ vérifie la propriété (R1) de Serre.
L'anneau $\widetilde{A}\left[\frac{1}{f}\right]$ étant normal, pour prouver la normalité de $\widetilde{A}$, il suffit de prouver la propriété (S2) de Serre pour les diviseurs de f^m avec $m \in \mathbf{N}_{>0}$, *i.e.* que $\mathrm{Ass}_{\widetilde{A}}\left(f^m\widetilde{A}\right)$ n'est constitué que d'idéaux premiers de hauteur 1, mais cela résulte du lemme 7.3 (2) & (5).
Comme A est excellent, il en est de même de la A-algèbre de type fini $\widetilde{A}$ (*cf* [19, 7.8.3 (ii)]). Étant normale d'après ce qui précède, son complété α-adique est normal (*cf* [19, 7.8.3 (v)]). □

Corollaire 7.4. *Plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition 7.1, et soit B une A-algèbre étale. Alors le complété α-adique de $B\left[\frac{\alpha^n}{f}\right] := B[X]/(\alpha^n - Xf)B[X]$ est normal pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$.*

Démonstration. On a la suite exacte $0 \to A[X] \xrightarrow{\alpha^n - Xf} A[X] \to \widetilde{A} \to 0$. Comme B est étale donc plat sur A, la suite $0 \to B[X] \xrightarrow{\alpha^n - Xf} B[X] \to B \otimes_A \widetilde{A} \to 0$ est exacte, de sorte que l'anneau $\widetilde{B} := B\left[\frac{\alpha^n}{f}\right] \simeq B \otimes_A \widetilde{A}$ est étale sur $\widetilde{A}$. Il est donc normal en vertu de la normalité de $\widetilde{A}$ et de [20, Corollaire 9.11]. On en déduit la normalité du complété de $\widetilde{B}$ comme à la fin de la preuve de la proposition 7.1. □

Références

[1] G. A. & J. Dieudonné – « Éléments de Géométrie Algébrique I », in *Éléments de Géométrie Algébrique I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 166, Springer Verlag, 1971, p. 466.

[2] A. Abbès & A. Mokrane – « Sous-groupes canoniques et cycles évanescents p-adiques », *Publ. Math. de l'IHES* **99** (2004), p. 117–162.

[3] F. Andreatta & O. Brinon – « Surconvergence des représentations p-adiques : le cas relatif », in *Représentations p-adiques de groupes p-adiques I : représentations galoisiennes et (φ, Γ)-modules*, Astérisque, vol. 319, Société Mathématique de France, 2008, p. 39–116.

[4] F. Andreatta & C. Gasbarri – « The canonical subgroup for families of abelian varieties », *Compos. Math.* **143** (2007), p. 566–602.

[5] F. Andreatta, A. Iovita & V. Pilloni – « p-adic families of Siegel modular cuspforms », *Annals of Mathematics* **181** (2015), p. 623–697.

[6] P. Berthelot – « Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre, première partie », prépublication de l'IRMAR 96-03, 1996.

[7] P. Berthelot & A. Ogus – *Notes on crystalline cohomology*, Mathematical notes, vol. 21, Princeton University press, 1978.

[8] S. Bosch – « Lectures on formal and rigid geometry », in *Lectures on formal and rigid geometry*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2105, Springer Verlag, 2014, p. viii+254.

[9] S. Bosch, U. Güntzer & R. Remmert – *Non-archimedean analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 261, Springer Verlag, 1984.

[10] S. Bosch & W. Lütkebomert – « Formal and rigid geometry I. Rigid spaces », *Math. Ann.* **295** (1993), p. 291–317.

[11] O. Brinon – *Représentations p-adiques cristallines et de de Rham dans le cas relatif*, Mémoires de la SMF, vol. 112, Société Mathématique de France, 2008.

[12] O. Brinon, A. Mokrane & J. Tilouine – « Tours d'Igusa surconvergentes et familles p-adiques de formes de Siegel surconvergentes », Travail en cours.

[13] R. Coleman – « p-adic Banach spaces and families of modular forms », *Invent. Math.* **127** (1997), p. 417–479.

[14] R. Crew – « F-isocrystals and p-adic representations », in *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., 1987, Part 2, p. 111–138.

[15] B. Dwork – « p-adic cycles », *Publ. Math. IHES* **37** (1969), p. 27–115.

[16] ———, « Normalized period matrices », *Ann. of Math.* **94** (1971), p. 337–388.

[17] L. Fargues – « La filtration canonique des points de torsion des groupes p-divisibles (avec la collaboration de Yichao Tian) », *Annales scientifiques de l'ENS* **44** (2011), p. 905–961.

[18] J.-M. Fontaine – « Le corps des périodes p-adiques », in *Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988)*, Astérisque, vol. 223, Société Mathématique de France, 1994, p. 59–111.

[19] A. Grothendieck – « Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie », *Publ. Math. IHÉS* **24** (1965), p. 5–231.

[20] ———, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, vol. 3, Société Mathématique de France, 2003.

[21] A. Grothendieck & al. – « Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de lefschetz locaux et globaux (sga 2) », in *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)*, Documents Mathématiques, vol. 4, Société mathématique de France, 2005, p. 208.

[22] H. Hida – « Control theorems of coherent sheaves on Shimura varieties of PEL type », *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), p. 1–76.

[23] P. Kassaei – « Modularity lifting in parallel weight one », *J. Amer. Math. Soc.* **26** (2013), p. 199–225.

[24] F. Kato – « Rapid Course in p-adic Analysis », in *Period mappings and differential equations : From* $\mathbf{C}$ *to* $\mathbf{C}_p$*. Tôhoku-Hokkaidô lectures in arithmetic geometry ; with appendices by F. Kato and N. Tsuzuki*, Mathematical Society of Japan Memoirs, vol. 12, 1984, p. 205–218.

[25] K. Kato – « On p-adic vanishing cycles (application of ideas of Fontaine-Messing) », in *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, 1987, p. 207–251.

[26] N. Katz – « Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin », *Publ. Math. IHES* **39** (1970), p. 175–232.

[27] ———, « p-adic properties of modular schemes and modular forms », in *Modular functions of one variable, III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, Lecture Notes in Math., vol. 350, Springer Verlag, 1973, p. 69–190.

[28] ———, « Travaux de Dwork », in *Séminaire Bourbaki 1971/72, exposé 409*, Lecture Notes in Math., vol. 317, Springer Verlag, 1973, p. 167–200.

[29] W. Lütkebohmert – « Riemann's existence problem for a p-adic field », *Invent. Math.* **111** (1993), p. 309–330.

[30] W. Lütkebohmert – « Fortsetzbarkeit k-meromorpher Funktionen », *Math. Ann.* **220** (1976), no. 3, p. 273–284.

[31] H. Matsumura – *Commutative ring theory, second edition*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge university Press, 1986.

[32] W. Messing – *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 264, Springer-Verlag, 1972.

[33] F. Oort – « Newton polygons and formal groups : Conjectures by Manin and Grothendieck », *Ann. of Math.* **152** (2000), p. 183–206.

[34] P. Scholze – « Perfectoid spaces », *Publ. Math. IHES* **116** (2012), p. 245–313.

[35] T. Tsuji – « p-adic étale cohomology and crystalline cohomology », *Invent. Math.* **137** (1999), p. 233–411.

[36] P. Valabrega – « A few theorems on completion of excellent rings », *Nagoya Math. J.* **61** (1976), p. 127–133.

IMB, CNRS UMR 5251, Université Bordeaux 1, 33405 Talence, France
E-mail address: `olivier.brinon@math.u-bordeaux1.fr`

LAGA, CNRS UMR 7539, Université Paris 8, 93200 Saint-Denis, France
E-mail address: `mokrane@math.univ-paris13.fr`