

SÉMINAIRE SUR LES ESPACES DE MODULES DE SPECTRES EN ANNEAU

BENOIT FRESSE ET GEOFFREY POWELL

Programme des exposés

1. INTRODUCTION

Exposé 0 : Introduction au théorème de Hopkins-Miller et à sa version E_∞ due à Goerss-Hopkins

- a. *But.* Cet exposé donnera un survol du théorème de Hopkins-Miller et de la théorie d'obstructions de Goerss et Hopkins pour l'existence de structures E_∞ .
- b. *Prérequis et volume.* Cet exposé sera présenté par un organisateur. Durée environ 1h.
- c. *Cahier des charges.* Introduire et motiver le programme de la semaine.
- d. *Références.* L'article de Rezk [26] sur le théorème de Hopkins-Miller donne une introduction à la théorie relative aux structures A_∞ ; l'article survol de Goerss-Hopkins [14] traite du cas E_∞ et pourra être pris comme la référence de base. L'article de Goerss [12] pourra servir comme référence pour les questions générales sur les problèmes de réalisation.

2. CATÉGORIES MODÈLES

Exposé 1 : Notions fondamentales

- a. *But.* Il s'agit d'introduire ou de rappeler les définitions fondamentales des structures de catégories modèles, puis d'introduire la structure modèle de Reedy pour les objets simpliciaux et cosimpliciaux.
- b. *Prérequis et volume.* Cet exposé s'adresse à des débutants en théorie de l'homotopie, sa durée sera d'environ 1h15.
- c. *Cahier des charges.*
 - (1) Notions fondamentales : axiomes, la catégorie homotopique d'une catégorie modèle.
 - (2) Catégories modèles simpliciales.
 - (3) La structure modèle de Reedy sur $\mathcal{C}^{\Delta^{op}}$, respectivement sur \mathcal{C}^Δ . On pourra motiver l'introduction de structures de Reedy par la propriété suivante : la réalisation $|-|$ d'un objet simplicial, respectivement l'espace total Tot d'un objet cosimplicial, préserve les équivalences faibles entre objets cofibrants, respectivement fibrants, au sens de Reedy. La démonstration de ce résultat est une application directe des techniques d'adjonctions qui seront introduites dans l'exposé suivant.

d. *Références.* Une bonne référence moderne pour les objectifs du groupe de travail est la deuxième partie du livre [17]. On renvoie plus précisément aux chapitres 7-9 de cet ouvrage pour les alinéas (1-2), au chapitre 15 pour l'alinéa (3). Une autre référence moderne est fournie par [18]. La structure modèle de Reedy est également introduite dans [6, Chapitre X] et [16, Chapitres IV-VII] dans le cas particulier où \mathcal{C} est la catégorie des ensembles simpliciaux.

Exposé 2 : Adjonctions de Quillen

a. *But.* Le but de cet exposé est d'introduire les techniques classiques pour transférer une structure modèle par adjonction. Cette méthode intervient par exemple pour définir une structure modèle sur la catégorie d'algèbres associée à une opérade. Les foncteurs dérivés d'une paire de foncteurs adjoints (les adjonctions de Quillen) interviennent également dans la définition de l'homologie de Quillen.

b. *Prérequis et volume.* Cet exposé est un peu plus avancé que le précédent, mais s'adresse aussi à des débutants en théorie de l'homotopie, sa durée estimée est d'environ 1h.

c. *Cahier des charges.*

- (1) Adjonctions et équivalences de Quillen.
- (2) Catégories modèles cofibramment engendrées, argument des petits objets et principe de transfert.
- (3) Exemple d'application : définition de la catégorie modèle des algèbres commutatives simpliciales par transfert.
- (4) Catégories cellulaires.

d. *Références.* On renvoie également au livre [17], chapitre 8 pour l'alinéa (1), chapitres 10-12 pour les alinéas (2-4). Pour le principe de transfert, on pourra se référer à [2] et à la référence [8], citée dans cet article, pour un énoncé général.

3. SPECTRES ET THÉORIES COHOMOLOGIQUES

Exposé 3 : Catégories modèles de l'homotopie stable

a. *But.* On donnera dans cet exposé une introduction axiomatique de la catégorie de l'homotopie stable et de ses propriétés. On pourra baser l'exposé sur l'approche de Bousfield-Friedlander. Il s'agit d'un exposé de présentation. Les démonstrations seront en principe omises, même si quelques constructions sont laissées à l'initiative de l'orateur.

b. *Prérequis et volume.* Cet exposé nécessite quelques connaissances sur les catégories modèles. Sa durée est d'environ 1h.

c. *Cahier des charges.*

- (1) Motivation : théorème de représentabilité de Brown, cohomologie associée à un spectre.
- (2) Définition de la catégorie modèle de Bousfield-Friedlander : objets, morphismes et équivalences faibles, cofibrations.
- (3) Produit smash : une définition naïve, énoncé de l'existence d'une structure monoïdale symétrique, et éventuellement une construction moderne d'un smash produit symétrique ; spectres en anneau.
- (4) Dualité de Spanier-Whitehead des spectres finis.

d. *Références.* Pour les motivations, on pourra se reporter au classique [1]. Pour la catégorie modèle de Bousfield-Friedlander à l'article original [7], ou au livre [16, Section X.4]. Des constructions modernes du produit smash se trouvent dans [10, 19], mais il ne sera sans doute pas possible de faire plus que donner l'idée d'une de ces constructions dans l'exposé. Pour la dualité de Spanier-Whitehead, on pourra s'appuyer sur la présentation de [1, Section III.5] ou sur [25, Section 5.2].

On pourra se référer à [14, Section 1] et [15, Section 1] pour les propriétés axiomatiques de la catégorie d'homotopie stable qui donnent le cadre du travail de Goerss-Hopkins.

Exposé 4 : Algébroïdes de Hopf, comodules et opérations

a. *But.* Un algébroïde de Hopf est une structure algébrique définie par les opérations associées à une théorie cohomologique. Dans l'exemple fondamental de la cohomologie modulo p , cette structure est formée par le dual de l'algèbre de Steenrod munie de sa structure de bigèbre déterminée par Milnor ; dans l'exemple du cobordisme complexe (qui sera introduit dans l'exposé suivant), la structure obtenue représente le schéma en groupoïde affine des isomorphismes stricts de lois de groupes formels. Le but de cet exposé sera de rappeler la définition de cette notion, les constructions classiques, et de donner les propriétés fondamentales de la catégorie de comodules associée à un algébroïde de Hopf, avec éventuellement des éléments de démonstrations, à l'initiative de l'orateur.

b. *Prérequis et volume.* Il s'agit d'un exposé très algébrique. Il n'est pas forcément nécessaire d'avoir au préalable des connaissances sur les algèbres d'opérations associées aux théories cohomologiques classiques. La durée sera d'environ 1h.

c. *Cahier des charges.*

- (1) Définition de la notion d'algébroïde de Hopf et de la catégorie de comodules associée ;
- (2) Exemple : l'algébroïde de Hopf $(E_*, E_*(E))$ associé à un spectre en anneau plat E ;
- (3) La catégorie des comodules sur un algébroïde de Hopf plat est abélienne.
- (4) Produit tensoriel des comodules et théorème de dualité [13, Lemme 3.3].

d. *Références.* On renvoie au livre [24, Appendice 1] pour les alinéas (1-3), à *loc. cit.* pour l'alinéa (4).

Exposé 5 : Cobordisme complexe et cohomologies exactes au sens de Landweber

a. *But.* Le but de cet exposé sera de rappeler la théorie classique reliant théories cohomologiques et lois de groupes formels. Il s'agit toujours d'un exposé de rappels, pour lequel on pourra omettre les démonstrations.

Le théorème des foncteurs exacts de Landweber permet de construire la théorie cohomologique associée à une bonne loi de groupe formel. Un exemple d'une telle construction sera donné dans l'exposé suivant. Un des buts principaux du travail de Goerss-Hopkins consiste grosso-modo à relever cette correspondance

$$\{\text{lois de groupe formel}\} \rightarrow \{\text{cohomologies}\}$$

en un foncteur à valeurs dans les spectres E_∞ .

b. *Prérequis et volume.* Il s'agit d'un exposé classique qui ne nécessite rien d'autre que des connaissances de base en topologie algébrique : la définition d'un spectre, quelques notions sur les fibrés vectoriels. Sa durée sera de 1h environ.

c. *Cahier des charges.*

- (1) Définition d'une loi de groupe formel et (iso)morphismes de groupe formel.
- (2) Définition d'un spectre \mathbb{C} -orienté; loi de groupe formel associée; exemples fondamentaux $(H\mathbb{Z}, KU)$.
- (3) Le théorème de Lazard (existence et structure d'une loi de groupe formel universelle).
- (4) Construction du spectre MU ; structure de spectre en anneau.
- (5) Le théorème de Quillen : la structure de (MU_*, MU_*MU) .
- (6) Le théorème des foncteurs exacts de Landweber.

d. *Références.* Pour cet exposé, on pourra se référer au classique [1] et aux chapitres appropriés de [25, 24]. Une très bonne référence moderne pour un exposé complet et détaillé sur le cobordisme et ses applications en homotopie est donnée par le livre [20].

Exposé 6 : Déformations de groupes formels et théorie de Lubin-Tate

a. *But.* On a mentionné sans plus de précision que l'un des buts du travail de Goerss-Hopkins est de construire une flèche

$$\{\text{lois de groupe formel}\} \rightarrow \{\text{spectres } E_\infty\}.$$

On s'intéresse plus spécifiquement à la catégorie constituée par les déformations d'une loi de groupe formel sur un corps de caractéristique positive. Le but de cet exposé sera de rappeler la théorie de Lubin-Tate qui conduit à une classification de ces déformations, puis de construire les théories cohomologiques associées en application du théorème des foncteurs exacts de Landweber. Le relèvement aux spectres fera l'objet des exposés 19-20 du groupe de travail.

b. *Prérequis et volume.* Il s'agit d'un exposé très algébrique. Les prérequis topologiques sont essentiellement la connaissance des axiomes d'une cohomologie généralisée et l'énoncé du théorème des foncteurs exacts de Landweber suffira pour la préparation de cet exposé. La durée sera de 1h environ.

c. *Cahier des charges.*

- (1) Lois de groupe formel en caractéristique p : classification par la hauteur, loi de groupe formel de Honda.
- (2) Déformation d'une loi de groupe formel. Le théorème de Lubin-Tate : existence de la déformation universelle.
- (3) Le spectre de Lubin-Tate : existence de la théorie cohomologique associée à la loi de Lubin-Tate en application du théorème des foncteurs exacts de Landweber.

d. *Références.* On pourra se référer à l'article [26] pour un rappel rapide des notions introduites dans (1-2) et pour la définition du spectre de Lubin-tate (3). Le livre [24] contient également un résumé de la théorie p -locale des lois de groupes formels en vue des applications en topologie algébrique. On renvoie à la bibliographie de ces ouvrages pour plus de références.

4. OPÉRADES

Exposé 7 : Définitions fondamentales

a. *But.* Le but de cet exposé sera de rappeler les définitions fondamentales des opérades dans le cadre des catégories monoïdales symétriques.

b. *Prérequis et volume.* Il s'agit d'un exposé fondamental qui nécessite peu de connaissance. Sa durée sera de 1h15 environ.

c. *Cahier des charges.*

- (1) Rappels : axiomes de catégorie monoïdale symétriques, exemples fondamentaux.
- (2) Opérades : définition classique, catégorie d'algèbres associée.
- (3) Exemples : l'opérade commutative, associative.
- (4) La monade associée à une opérade.
- (5) La structure de l'opérade libre associée à un Σ -objet.

d. *Références.* On pourra se baser sur le livre de référence [21]. On pourra aussi consulter l'article original [22] pour la définition classique de la structure d'opérade et de la monade associée dans le cadre topologique. L'article [11, Sections 1, 3] apporte des précisions sur la relation opérade/monade et sur les propriétés fines de l'opérade libre. On pourra se baser sur la présentation de cet article pour (5).

Exposé 8 : Théorie homotopique des opérades

a. *But.* Le but de cet exposé sera de montrer que les opérades dans la catégorie des ensembles simpliciaux (ou des espaces topologiques) possèdent des résolutions simpliciales avec de bonnes propriétés homotopiques qui passent en cohomologie.

b. *Prérequis et volume.* Les prérequis sont la théorie des catégories modèles (exposés 1-2) et la théorie des opérades (exposé précédent). La préparation de cet exposé suppose donc des connaissances préalables suffisantes dans ces domaines. Le durée de cet exposé sera de 45mn environ.

c. *Cahier des charges.*

- (1) Transfert et structures de catégorie modèle pour les opérades \mathcal{O} dans une catégorie modèle monoïdale symétrique de base ; le cas des opérades dans la catégorie des ensembles simpliciaux, des espaces topologiques, des modules simpliciaux sur un anneau.
- (2) La structure modèle de Reedy pour la catégorie $s\mathcal{O}$ des objets simpliciaux de \mathcal{O} (rappels de l'exposé 1).
- (3) La cohomologie E_* définie par un spectre en anneau applique une opérade cofibrante dans les espaces sur une opérade cofibrante dans les E_* -modules : énoncé et démonstration du théorème 2.1 de [14].

d. *Références.* Pour (1-2), une bonne référence est l'article [2] Pour (3), on renvoie à [14] ou à l'article détaillé [15]. Pour la démonstration de ce résultat, on devra utiliser la structure fine de l'opérade libre qui est décrite dans [11] par exemple.

Exposé 9 : Théorie homotopique des algèbres dans les spectres sur une opérade

a. *But.* Le but de cet exposé sera d'établir les propriétés homotopiques de la catégorie des algèbres dans les spectres sur une opérade simpliciale : structures modèles, adjonction de Quillen entre l'extension et la restriction de structures, ...

b. *Prérequis et volume.* Cet exposé, comme le précédent, a comme prérequis la théorie des catégories modèles (exposés 1-2) et la théorie des opérades (exposé précédent) et suppose des connaissances préalables suffisantes dans ces domaines. Sa durée sera de 1h environ.

c. *Cahier des charges.* On se donne une opérade topologique ou simpliciale C . On considère la catégorie Alg_C des spectres munis d'une structure d'algèbres sur C . On pourra rappeler les axiomes de [14, Section 1.4]-[15, Section 1.2] qui sont demandés pour une bonne catégorie de spectres.

- (1) La structure de catégorie modèle de Alg_C .
- (2) Morphismes d'opérades et adjonctions de Quillen.
- (3) Extensions aux objets simpliciaux : la structure modèle de Reedy pour la catégorie $s\text{Alg}_T$ des spectres simpliciaux sur une opérade topologique simpliciale.

d. *Références.* Les alinéas (1-2) renvoient à des résultats généraux de la théorie homotopique des opérades pour lesquels on pourra consulter [2]. Pour (2), on aura besoin du théorème 1.6 de l'article [14] ou de l'énoncé correspondant [15, Théorème 1.2.4] de l'article détaillé. L'alinéa (3) renvoie à [14, Section 2]-[15, Section 1.3]. Il s'agit d'une généralisation naturelle des structures de Reedy qui auront été introduit dans l'exposé 1.

5. THÉORIE D'OBSTRUCTIONS À LA BOUSFIELD

Exposé 10 : La suite spectrale homotopique d'un espace cosimplicial

a. *But.* Cet exposé introduira la suite spectrale de Bousfield-Kan d'un espace cosimplicial (pointé) et la théorie d'obstructions de Bousfield à l'existence d'un point dans un espace cosimplicial. L'application principale envisagée de cette théorie est la réalisation et l'unicité de morphismes entre spectres E_∞ .

b. *Prérequis et volume.* Il s'agit d'un outil standard en théorie d'homotopie, qui nécessite une bonne connaissance des espaces cosimpliciaux ; la théorie générale d'obstructions présente quelques difficultés techniques. Durée estimée d'environ 1h.

c. *Cahier des charges.*

- (1) L'espace Tot d'un espace cosimplicial (rappel de l'exposé 1).
- (2) La suite spectrale d'un espace cosimplicial.
- (3) Indications sur la théorie d'obstructions de Bousfield.

d. *Références.* La section 14 de [26] donne un aperçu des résultats nécessaires pour l'application au théorème de Hopkins-Miller. La référence classique pour la suite spectrale de Bousfield-Kan est [6] et on pourrait également se reporter à [16, Section VIII.1]. Pour la théorie d'obstructions, la référence canonique est l'article d'origine [4] et on pourrait également consulter [16, Section VIII.4] par exemple (en particulier, voir les hypothèses techniques p.148 *loc. cit.*).

6. CATÉGORIES MODÈLES DE RÉOLUTIONS

Exposé 11 : Catégories modèles de résolutions

a. *But.* Le but de cet exposé est de donner une introduction générale à la théorie des catégories modèles de résolutions ; il s'agit d'une approche axiomatique, introduite par Bousfield dans le cadre cosimplicial, à la construction des résolutions E_2 de Stover. Cette technique donne une manière de construire des résolutions simpliciales à partir d'une classe d'objets projectifs.

b. *Prérequis et volume.* Il s'agit d'un exposé d'intérêt général qui demande une bonne connaissance de la théorie des catégories de modèles. La durée de l'exposé est estimée à environ 1h15.

c. *Cahier des charges.*

- (1) Catégories modèles de résolution d'après Bousfield (mais dans le cas simplicial) - définition générale par rapport à une classe projective \mathcal{P} convenable. (Ne pas traiter le cas particulier \mathcal{P}_E).
- (2) La structure de catégorie modèle sur les spectres simpliciaux associée à une classe projective de spectres finis.
- (3) Les groupes d'homotopie naturels.
- (4) La suite exacte spirale.

d. *Références.* L'article de Bousfield [5] donne la construction de la catégorie modèle de résolution dans le cadre cosimplicial - on adapte ses définitions au cas simplicial en suivant [14, Section 3] ou [15, Section 1.4] par rapport à une classe d'objets projectifs convenable. La structure de catégorie modèle sur les spectres simpliciaux correspond à [14, Theorem 3.6]. Les groupes d'homotopie naturels sont introduits dans [15, Section 3.1] et [14, Section 1.4]; on pourra également consulter [3].

Exposé 12 : Catégories modèles de résolution associées à un spectre E

a. *But.* Dans cet exposé, on appliquera la théorie générale des catégories modèles de résolution au cas où la classe d'objets projectifs est la classe de spectres finis associée à un spectre qui satisfait à la condition d'Adams, puis on donnera des indications sur la généralisation de cette théorie pour la catégorie des algèbres simpliciales sur une opérade simpliciale T .

b. *Prérequis et volume.* On applique la théorie générale de catégories modèles de résolution et les résultats de transport de structures de modèles. Les difficultés techniques concernant la localisation à la Bousfield seront passées sous silence. Durée estimée d'environ 1h15.

c. *Cahier des charges.*

- (1) La condition d'Adams sur un spectre en anneau E - exemples.
- (2) La classe projective \mathcal{P}_E associée à E .
- (3) Indications sur le théorème de coefficients universels (suite spectrale associée à un spectre cosimplicial).
- (4) Structure de catégorie modèle de résolutions sur $s\mathbf{Alg}_T$, la catégorie des spectres simpliciaux sur une opérade simpliciale (rappels de l'exposé 9).
- (5) Indications sur la E -localisation de cette structure.

d. *Références.* La référence principale pour cet exposé est [14, Section 3]. La structure de catégorie de modèles sur $s\mathbf{Alg}_T$ est donnée dans [14, Theorem 3.12] et l'idée de la E -localisation dans [14, Theorem 3.13]. (Il y a des problèmes techniques - cf. [15, Theorem 1.5.1].)

7. COHOMOLOGIE DE ANDRÉ-QUILLEN

Exposé 13 : Cohomologie de André-Quillen associée à une opérade

a. *But.* Dans cet exposé, on rappellera la définition de la cohomologie de André-Quillen classique et on montrera comment cette théorie se généralise dans le cadre des opérades.

b. *Prérequis et volume.* Cet exposé ne présente pas trop de difficultés techniques; la durée estimée de l'exposé est d'environ 1h.

c. *Cahier des charges.*

- (1) Résumé de la théorie classique de la cohomologie d'André-Quillen : structure de catégorie modèle sur les algèbres simpliciales ; dérivations, différentiels et complexe cotangent.
- (2) Propriétés de la cohomologie d'André-Quillen.
- (3) La cohomologie d'André-Quillen pour les algèbres sur une opérade.
- (4) Objets d'Eilenberg-MacLane ; représentabilité de la cohomologie d'André-Quillen.

d. *Références.* L'approche générale à la cohomologie de Quillen est présentée dans [23, Section II.4] ; pour une approche classique à la cohomologie d'André-Quillen des algèbres commutatives, on peut consulter [27, Chapter 8] par exemple. La généralisation dans le cadre des opérades est développée dans [13, Section 2] et [14, Section 4].

Exposé 14 : Cohomologie de Quillen pour les comodules sur une algebroïde de Hopf

a. *But.* Dans cet exposé, on montrera comment définir la cohomologie d'André-Quillen associée à une opérade dans le cadre d'une catégorie de E_*E -comodules. Pour cela, on développera la théorie d'homotopie des comodules sur un algebroïde de Hopf.

b. *Prérequis et volume.* Cet exposé est plus avancé que le précédent, dont il dépend fortement. Il nécessite une bonne compréhension des catégories de modèles et des comodules. Durée prévue d'environ 1h.

c. *Cahier des charges.*

- (1) Éléments de la théorie d'homotopie des comodules sur une algebroïde de Hopf qui satisfait à la condition d'Adams.
- (2) Structure de catégorie modèle simpliciale sur les comodules simpliciaux.
- (3) Algèbres simpliciales sur une opérade simpliciale T en comodules.
- (4) Cohomologie d'André-Quillen pour les T -algèbres en comodules.
- (5) Réduction aux modules : la cohomologie d'André-Quillen à coefficients dans un comodule étendu. (Indications).

d. *Références.* Une théorie d'homotopie des comodules sur une algebroïde de Hopf est introduite dans [13, Section 3] (on pourrait également consulter [15, Section 2.4.1]). La théorie pour les algèbres en comodules sur une opérade est développée dans [13, Section 4]. On renvoie également à cette référence pour la définition de la cohomologie d'André-Quillen dans ce cadre. Le résultat sur la cohomologie à coefficients dans un comodule étendu est donné dans [14, Proposition 4.2].

8. ESPACES DE MODULES

Exposé 15 : La théorie de Dwyer-Kan

a. *But.* Cet exposé donnera une introduction à la théorie des espaces de modules à la Dwyer-Kan.

b. *Prérequis et volume.* Cet exposé sous-entend une certaine culture de méthodes homotopiques ; il s'agit d'un exposé d'intérêt général. La durée estimée est d'environ 45min.

c. *Cahier des charges.*

- (1) Les espaces de modules à la Dwyer-Kan.
- (2) Leur décomposition en termes des monoïdes d'auto-équivalences d'objets.
- (3) Exemples : espaces de modules d'un objet, de diagrammes d'objet. . .

d. *Références.* La référence originale est [9] ; la section 1.1.2 de [15] donne un résumé ainsi que quelques exemples. (Toutefois, les catégories semi-modèles ne devraient pas être introduites). On devrait également consulter le matériel à la fin de [14, Section 1].

Exposé 16 : Décomposition d'un espace de modules et théorie d'obstruction I

a. *But.* Dans cet exposé et le suivant, on développera la théorie d'obstructions à l'existence de structures E_∞ . Cela se fait en décomposant un espace de modules à l'aide d'une tour de Postnikov.

b. *Prérequis et volume.* Il s'agit de deux exposés avancés. La durée de chacun peut être estimée à d'environ 1h.

c. *Cahier des charges.*

- (1) L'espace de modules $\mathcal{TM}(A)$ associé au problème de réalisation $\mathcal{E}(A)$.
- (2) Les espaces $\mathcal{TM}_n(A)$ des n -réalisations ; les groupes d'homotopie des n -réalisations.
- (3) La tour $\mathcal{TM}_n(A)$ et l'approximation homotopique.
- (4) Les algèbres simpliciales de type B_A .
- (5) L'identification de l'espace $\mathcal{TM}_0(A)$.

d. *Références.* La référence principale pour cet exposé (et le suivant) est [14, Section 5] ; la méthode utilisée est une généralisation de celle de [3]. On peut également consulter [15] pour davantage de détails.

Exposé 17 : Décomposition d'un espace de modules et théorie d'obstruction II

a. *Cahier des charges.*

- (1) Morphismes de type $B_A(M, n)$.
- (2) La relation entre les morphismes de type $B_A(M, n)$ et la cohomologie d'André-Quillen.
- (3) La description de $\mathcal{TM}_n(A) \rightarrow \mathcal{TM}_{n-1}(A)$ à l'aide d'un carré homotopiquement cartésien.
- (4) La théorie d'obstructions associée.

9. LE THÉORÈME D'HOPKINS-MILLER ET SA VERSION E_∞ PAR GOERSS-HOPKINS

Exposé 18 : Théories d'obstructions dans le cadre E_∞ : techniques de calculs

a. *But.* Dans cet exposé, on appliquera la théorie d'obstructions à l'existence de structures E_∞ pour démontrer la version E_∞ du théorème de Hopkins-Miller - à savoir l'existence de la structure E_∞ sur les spectres de Lubin-Tate.

b. *Prérequis et volume.* Il s'agit d'un exposé avancé. La durée estimée est d'environ 1h30.

c. *Cahier des charges.*

- (1) Les groupes d'obstruction : cohomologie d'André-Quillen pour une T -algèbre en comodules.
- (2) Réduction à la cohomologie d'André-Quillen pour une T -algèbre en modules.
- (3) Techniques de calcul pour une opérade E_∞ ; algèbres instables sur l'algèbre de Dyer-Lashof.
- (4) Existence d'une structure E_∞ sur les spectres de Lubin-Tate ; identification du type d'homotopie de l'espace de modules.

d. *Références.* La référence principale pour cet exposé est [14, Section 6] pour les méthodes de calcul associées à une opérade E_∞ et [14, Section 7] pour la démonstration du théorème d'Hopkins-Miller (la version E_∞). On consultera [26] pour quelques détails utilisés dans cette démonstration - et pour comparer le théorème de Goerss-Hopkins-Miller avec la démonstration de la version A_∞ (plus élémentaire) de ce théorème.

Exposé 19 : Théories d'obstructions et morphismes E_∞

a. *But.* Cet exposé appliquera la suite spectrale de Bousfield-Kan aux morphismes E_∞ entre deux spectres de Lubin-Tate.

b. *Prérequis et volume.* Exposé avancé qui est la continuation naturelle (voire complément) de l'exposé précédent. Durée estimée d'environ 1h.

c. *Cahier des charges.*

- (1) La suite spectrale de Bousfield-Kan pour l'espace des morphismes entre spectres E_∞ et la théorie d'obstructions à la Bousfield.
- (2) Application au théorème de Hopkins-Miller : type d'homotopie de l'espace des morphismes E_∞ entre deux spectres de Lubin-Tate.

d. *Références.* La référence pour cette suite spectrale de Bousfield-Kan est Section 4 de [14]. Le théorème de Hopkins-Goerss-Miller est [14, Corollary 7.7].

RÉFÉRENCES

- [1] J. F. Adams. *Stable homotopy and generalised homology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1995. Reprint of the 1974 original.
- [2] C. Berger and Moerdijk I. Axiomatic homotopy theory for operads. *Comment. Math. Helv.*, 78 :805–831, 2003.
- [3] D. Blanc, W. G. Dwyer, and P. G. Goerss. The realization space of a Π -algebra : a moduli problem in algebraic topology. *Topology*, 43(4) :857–892, 2004.
- [4] A. K. Bousfield. Homotopy spectral sequences and obstructions. *Israel J. Math.*, 66(1-3) :54–104, 1989.
- [5] A. K. Bousfield. Cosimplicial resolutions and homotopy spectral sequences in model categories. *Geom. Topol.*, 7 :1001–1053 (electronic), 2003.
- [6] A. K. Bousfield and D. M. Kan. *Homotopy limits, completions and localizations*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304.
- [7] A. K. Bousfield and Friedlander E. M. Homotopy theory of γ -spaces, spectra and bisimplicial sets. In *Geometric applications of homotopy theory, II*, volume 658 of *Lecture Notes in Math.*, pages 80–130. Springer-Verlag, 1978.
- [8] C. Crans. Quillen closed model structures for sheaves. *J. Pure Appl. Alg.*, 101 :35–57, 1995.

- [9] W. G. Dwyer and D. M. Kan. A classification theorem for diagrams of simplicial sets. *Topology*, 23(2) :139–155, 1984.
- [10] A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell, and J. P. May. *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*, volume 47 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. With an appendix by M. Cole.
- [11] B. Fresse. Koszul duality of operads and homology of partition posets. In *Homotopy theory : relations with algebraic geometry, group cohomology, and algebraic K-theory*, volume 346 of *Contemp. Math.*, pages 115–215. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [12] P. G. Goerss. (Pre-)sheaves of ring spectra over the moduli stack of formal group laws. In *Axiomatic, enriched and motivic homotopy theory*, volume 131 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 101–131. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [13] P. G. Goerss and M. J. Hopkins. André-Quillen (co)-homology for simplicial algebras over simplicial operads. In *Une dégustation topologique [Topological morsels] : homotopy theory in the Swiss Alps (Arolla, 1999)*, volume 265 of *Contemp. Math.*, pages 41–85. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [14] P. G. Goerss and M. J. Hopkins. Moduli spaces of commutative ring spectra. In *Structured ring spectra*, volume 315 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 151–200. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [15] P. G. Goerss and M. J. Hopkins. Moduli problems for structured ring spectra. 126 pages, available at "<http://www.math.northwestern.edu/~pgoerss/spectra/obstruct.pdf>", 2005.
- [16] P. G. Goerss and J. F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*, volume 174 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.
- [17] P. S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*, volume 99 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [18] M. Hovey. *Model categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [19] M. Hovey, B. Shipley, and J. Smith. Symmetric spectra. *J. Amer. Math. Soc.*, 13(1) :149–208, 2000.
- [20] S. O. Kochman. *Bordism, stable homotopy and Adams spectral sequences*, volume 7 of *Fields Institute Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [21] M. Markl, S. Shnider, and J. Stasheff. *Operads in algebra, topology and physics*, volume 96 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [22] J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271.
- [23] D. G. Quillen. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [24] D. C. Ravenel. *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, volume 121 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986.
- [25] D. C. Ravenel. *Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory*, volume 128 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. Appendix C by Jeff Smith.
- [26] C. Rezk. Notes on the Hopkins-Miller theorem. In *Homotopy theory via algebraic geometry and group representations (Evanston, IL, 1997)*, volume 220 of *Contemp. Math.*, pages 313–366. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [27] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

<http://www.math.univ-paris13.fr/~powell/gdt/cirm2007/>

GDR CNRS 2875