

# SÉMINAIRE SUR LES ESPACES DE MODULES DE SPECTRES EN ANNEAU

BENOIT FRESSE ET GEOFFREY POWELL

## PROGRAMME

RÉSUMÉ. Le but de ce séminaire est d'étudier la théorie d'obstruction, définie par Goerss et Hopkins [12, 13], pour l'existence d'un spectre  $E_\infty$  représentant une théorie de cohomologie donnée et de l'appliquer aux spectres de Lubin-Tate, le résultat obtenu améliorant le théorème de Hopkins-Miller [19]. Cette théorie d'obstruction utilise des techniques d'une portée plus générale : décompositions d'espaces de modules à la Dwyer-Kan [4] ; opérades et cohomologie de André-Quillen.

Le problème de réalisation considéré dans ce séminaire se résume comme suit. Toute théorie de cohomologie est représentée par un *spectre* dans la catégorie d'homotopie stable. Une structure multiplicative (commutative) est représentée par un produit qui est commutatif et associatif à homotopie près. Pour certaines applications il est essentiel de disposer d'une structure multiplicative plus rigide, à savoir une structure  $E_\infty$  ; du point de vue moderne, un spectre muni d'une structure  $E_\infty$  est équivalent à un monoïde commutatif dans une catégorie de spectres munie d'un produit smash qui est strictement associatif et commutatif. On se pose les deux questions suivantes :

- (1) Pour une théorie de cohomologie multiplicative donnée, existe-t-il un spectre  $E_\infty$  qui la représente ?
- (2) Une transformation naturelle entre deux théories de cohomologie multiplicatives est-elle représentée par un morphisme  $E_\infty$  ?

Ces problèmes s'abordent à l'aide de théories d'obstructions, dans la lignée des constructions de Robinson. Dans l'approche de Goerss et Hopkins, on passe par une étude à la *Dwyer-Kan* d'espaces de modules correspondant au problème (1). Il s'agit d'abord de démontrer que l'espace de modules est non-vide et ensuite de comprendre son type d'homotopie. Pour ce faire, on décompose l'espace de modules en utilisant des tours de Postnikov avec des invariants qui font intervenir une cohomologie d'André-Quillen.

L'application de la théorie visée par le séminaire est une version "commutative" du théorème de Hopkins et Miller [19]. Une conséquence de ce théorème est la construction de théories de cohomologie qui généralisent la  $K$ -théorie orthogonale,  $KO$  (voir [9, 10]). La  $K$ -théorie orthogonale peut être obtenue à partir de la  $K$ -théorie unitaire  $KU$  par passage aux points fixes (homotopiques) par l'action de  $\mathbb{Z}/2$  correspondant à la conjugaison complexe. Dans la généralisation, on remplace  $KU$  par un spectre de Lubin-Tate et le groupe  $\mathbb{Z}/2$  par un groupe fini convenable, qui agit par des morphismes  $E_\infty$ .

Une autre motivation des travaux de Goerss et Hopkins est la construction du spectre  $tmf$  des formes modulaires topologiques [15]. Ce spectre est relié à des questions d'origines géométriques (propriétés du genre elliptique de Witten, invariance modulaire). Il a des applications importantes en théorie d'homotopie stable

et s'insère dans la suite naturelle classique de spectres  $E_\infty$  : la cohomologie singulière  $H\mathbb{Z}$ , la  $K$ -théorie connexe  $ku$ ,  $tmf$ , le cobordisme complexe  $MU$ .

Le groupe de travail abordera les thèmes suivants :

- (1) **Catégories modèles** [18, 16, 14, 3]  
Notions de base sur les catégories modèles, les catégories modèles simpliciales, la cellularité et la localisation à la Bousfield.
- (2) **Espaces de modules à la Dwyer-Kan** [4, 12, 13]  
Les espaces de modules à la Dwyer-Kan et leur décomposition en termes des monoïdes d'auto-équivalences d'objets. Exemples : espaces de modules d'un objet, de diagrammes d'objets ...
- (3) **Théorie d'homotopie stable** [1, 17, 8]  
L'existence d'une catégorie adaptée de spectres, munie d'une structure symétrique monoïdale, en suivant l'approche axiomatique de [12, 13], et l'exemple : les spectres symétriques.
- (4) **Théorie d'homotopie des algèbres sur une opérade** [19, 12, 13]  
L'introduction du cadre général qui permet l'étude des spectres  $E_\infty$  : les opérades et opérades simpliciales ; algèbres sur une opérade ; spectres simpliciaux et algèbres sur une opérade simpliciale.
- (5) **Catégories modèles de résolution** [2, 12, 13]  
Les catégories modèles de résolution d'après Bousfield ; l'application aux résolutions de spectres par rapport à une théorie d'homologie qui satisfait à la condition d'Adams.
- (6) **Algebroides de Hopf et comodules** [11]  
Éléments de la théorie d'homotopie des comodules sur un algebroïde de Hopf.
- (7) **Cohomologie d'André-Quillen** [18, 12, 11, 13]  
Cohomologie d'algèbres sur une opérade ; la théorie pour les algèbres en comodules sur une algebroïde de Hopf. Systèmes de Postnikov pour des algèbres simpliciales.
- (8) **L'espace de modules des réalisations** [12, 13]  
L'étude du type d'homotopie d'un espace de modules à la Dwyer-Kan.
  - (a) [7, 6, 5] Notions d'homotopie dans une catégorie modèle de résolution ; les suites exactes spirales en homotopie ; suites spectrales associées à la réalisation géométrique.
  - (b) La tour de Postnikov de l'espace de modules ; objets d'Eilenberg-MacLane ; la théorie d'obstructions.
- (9) **Calcul de la cohomologie d'André-Quillen** [12, 11, 13, 19]  
Les techniques de calcul de la cohomologie associée à la théorie d'obstructions de structures  $E_\infty$  - et (éventuellement) l'application aux spectres de Lubin-Tate, la théorie d'Hopkins-Miller version  $E_\infty$ .

#### RÉFÉRENCES

- [1] J. F. Adams. *Stable homotopy and generalised homology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1995. Reprint of the 1974 original.
- [2] A. K. Bousfield. Cosimplicial resolutions and homotopy spectral sequences in model categories. *Geom. Topol.*, 7 :1001–1053 (electronic), 2003.
- [3] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan, and Jeffrey H. Smith. *Homotopy limit functors on model categories and homotopical categories*, volume 113 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

- [4] W. G. Dwyer and D. M. Kan. A classification theorem for diagrams of simplicial sets. *Topology*, 23(2) :139–155, 1984.
- [5] W. G. Dwyer, D. M. Kan, J. H. Smith, and C. R. Stover. A  $\Pi$ -algebra spectral sequence for function spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120(2) :615–621, 1994.
- [6] W. G. Dwyer, D. M. Kan, and C. R. Stover. An  $E^2$  model category structure for pointed simplicial spaces. *J. Pure Appl. Algebra*, 90(2) :137–152, 1993.
- [7] W. G. Dwyer, D. M. Kan, and C. R. Stover. The bigraded homotopy groups  $\pi_{i,j}X$  of a pointed simplicial space  $X$ . *J. Pure Appl. Algebra*, 103(2) :167–188, 1995.
- [8] A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell, and J. P. May. *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*, volume 47 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. With an appendix by M. Cole.
- [9] P. Goerss, H.-W. Henn, and M. Mahowald. The homotopy of  $L_2V(1)$  for the prime 3. In *Categorical decomposition techniques in algebraic topology (Isle of Skye, 2001)*, volume 215 of *Progr. Math.*, pages 125–151. Birkhäuser, Basel, 2004.
- [10] P. Goerss, H.-W. Henn, M. Mahowald, and C. Rezk. A resolution of the  $K(2)$ -local sphere at the prime 3. *Ann. of Math. (2)*, 162(2) :777–822, 2005.
- [11] P. G. Goerss and M. J. Hopkins. André-Quillen (co)-homology for simplicial algebras over simplicial operads. In *Une dégustation topologique [Topological morsels] : homotopy theory in the Swiss Alps (Arolla, 1999)*, volume 265 of *Contemp. Math.*, pages 41–85. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [12] P. G. Goerss and M. J. Hopkins. Moduli spaces of commutative ring spectra. In *Structured ring spectra*, volume 315 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 151–200. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [13] P. G. Goerss and M. J. Hopkins. Moduli problems for structured ring spectra, 2005. 126 pages.
- [14] P. S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*, volume 99 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [15] M. J. Hopkins. Topological modular forms, the Witten genus, and the theorem of the cube. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 554–565, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [16] M. Hovey. *Model categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [17] M. Hovey, B. Shipley, and J. Smith. Symmetric spectra. *J. Amer. Math. Soc.*, 13(1) :149–208, 2000.
- [18] D. G. Quillen. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [19] C. Rezk. Notes on the Hopkins-Miller theorem. In *Homotopy theory via algebraic geometry and group representations (Evanston, IL, 1997)*, volume 220 of *Contemp. Math.*, pages 313–366. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

<http://www.math.univ-paris13.fr/powell/gdt/cirm2007/>

GDR CNRS 2875